Corso di Fisica per Farmacia Rimini

AA 2010/11

F.-L. Navarria
navarria@bo.infn.it
http://www.bo.infn.it/ctf/eser

Corso di Fisica per Farmacia Rn

- struttura del corso
  - lezioni ~24h (F.-L. Navarria), ~40h (F. Rimondi)
- orario delle lezioni
  - mar 14-17; gio 14-17 (l'orario cambiera` da Aprile in poi)
  - [NB questa settimana niente gio, la prossima gio+ven]
- ricevimento & tutorato (FLN, Navigare Necesse, Sala Docenti, 1° piano)
  - mar ~13-14 (R); gio ~13-14 (R) fino a fine Aprile
- tutorato (studenti):

guendalina.sabbatini@studio.unibo.it

Testi consigliati - Fisica

- D.C. Giancoli, Fisica, Casa Ed. Ambrosiana (ad es.)
- E. Ragozzino, Principi di Fisica, EdiSES (ad es.)
- Jewett & Serway, Principi di Fisica, EdiSES (ad es.)
- F.R. Cavallo e F.-L. Navarria, *Appunti di Probabilità e Statistica per un corso di Fisica*, Ed. CLUEB
- (J.W. Kane e M.M. Sternheim, Fisica biomedica, Ed. E.M.S.I.)
- (D.M. Burns e S.G.G. MacDonald, *Fisica per gli studenti di biologia e medicina*, Ed. Zanichelli)

URL consigliati - Fisica

- pagina principale per gli studenti di Farmacia Rn
  http://www.bo.infn.it/ctf/eser
- [programma del corso (link nella pag. pr.)]
- **eserciziario elettronico** (link nella pag. pr.)
- [meccanica dei fluidi]
  http://ishtar.df.unibo.it/mflu/html/cover.html
- [diffusione nelle soluzioni]
  http://ishtar.df.unibo.it/dif/html/diffu/index.html
- [corrente elettrica e circuiti]
  http://ishtar.df.unibo.it/em/elet/cover.html
- [modelli atomici]
  http://ishtar.df.unibo.it/ma/index.htm

Lo scritto: i parziali

- sono previsti due scritti p., uno a ½ corso (Termod. inclusa) ~ meta` Aprile, l'altro fine Maggio alla fine del corso, ciascuno con tre esercizi e 45 min di durata
- i p. si superano con tre + ε esercizi corretti (*) su sei in complesso [avendo quindi partecipato a tutti e due i p.]
- i p. hanno validità un anno (→ Luglio 2012)

Compito di Esame di Fisica - Facolta` di Farmacia - A.A. 2008/09
Sede di: Bologna - parz1 Appello -
xx 05 2009
Cognome e Nome................................. N.Matr................

3

1)Un fluido avente viscosita` 4.05 *10**-3 N*s/m**2 scorre stazionario in un condotto del diametro d = 0.771 mm e lungo 33.09 cm. Qual e` la velocita` media del fluido se la differenza di pressione alle estremita` del condotto e` 0.356E-01 atm?

2)Un corpo di massa m = 10.543 kg scivola su un piano orizzontale lubrificato con una velocita` costante v = 0.6335 m/s quando e` sottoposto ad una forza F = 0.1080E+00 N lungo l'orizzontale. Trovare il coefficiente di attrito.

3)Se dell'acqua scorre con velocita` v1 = 8.52 cm/sec in un tubo di sezione S1 = 0.636E+00 dm**2, con che velocita` v2 (in m/sec) scorre in un tubo, connesso con il primo e di sezione S2 = 1.797 cm**2? Si assume il liquido ideale e il moto stazionario.

(*) vedi lucido successivo

Lo scritto: tradizionale

- lo scritto consiste di sei esercizi da completare in 1h30
- si supera con un minimo di tre esercizi corretti su sei [formula risolutiva, risultato con unità di misura e 3 cifre significative]
- e` valutato suff/insuff
- lo scritto vale tre mesi

Compito 48

Facoltà di Farmacia - Sede di Bologa
Corso di CTF / Farmacia - A.A.2007/08
Compito di esame di Fisica
Appello X 23/02/2009

Cognome e nome... N.Matricola.................

1)Un tiratore ha una probabilità uguale a 0.684 di fare centro ad un qualsiasi colpo. Se prende un autobus per recarsi al poligono di tiro qual è la probabilità che riceva un biglietto dell'autobus con un numero dispari e al tempo stesso di fare centro al secondo colpo?

2)Il coefficiente di diffusione dell'emoglobina in acqua è $D = 6.32 \cdot 10^{-7}$ cm²/sec a temperatura ambiente (20 °C). Calcolare quanta emoglobina diffonderà lungo un tubo orizzontale con sezione di area 3.00 dm² in 9133.0 sec sotto un gradiente di concentrazione di 5.843 g/litro al metro.

3)Si calcoli l'angolo limite (riflessione totale) per il passaggio della luce da un mezzo con indice di rifrazione n = 1.93 ad un mezzo con indice di rifrazione n = 1.56.

4)Un corpo che si muove di moto uniformemente accelerato raggiunge, partendo con una velocità v_0 = 0.541E+02 cm/s, una velocità v_1 = 0.224E+03 km/h in un tempo di t = 6.1 sec. Qual è la sua accelerazione nel SI?

5)Una soluzione di solfato di sodio viene usata talvolta come fertilizzante per le piante. La sua tensione superficiale è $7.3 \cdot 10^{-2}$ N/m e la sua densità di 1500 kg/m^3. Calcolare il diametro massimo di un capillare che sia in grado di far salire il fertilizzante fino in cima ad una pianta alta 0.7235 m. Si assuma l'angolo di contatto pari a 0 gradi.

6)Si calcoli la differenza di energia, in eV, tra due livelli atomici, sapendo che nella transizione dall'uno all'altro vengono emessi (o assorbiti) fotoni con lunghezza d'onda λ = 0.2101E+04 Å (1 eV = $1.602177 \cdot 10^{-12}$ erg).

Programma a blocchi - Fisica

- grandezze fisiche e loro misura (8 h)
- meccanica (punto, corpi, fluidi) (16 h)
- termodinamica (8 h)
- elettromagnetismo
- oscillazioni, onde, ottica
- {microfisica (fisica atomica)}
- esercizi (10 h)

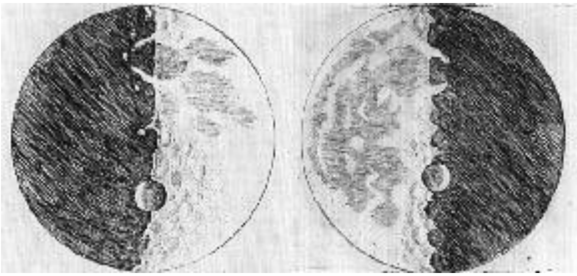
[margine di errore ± 2 h]

com’è fatto l’universo?
quanto è grande?
com’è fatta la materia che ci circonda?
che cosa la tiene insieme?
che cosa c’è dentro?

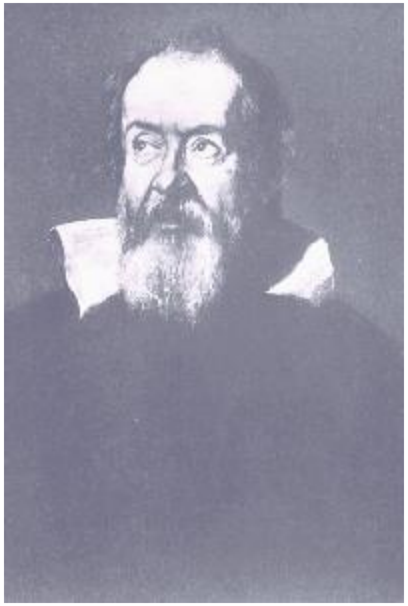
2009 = IYA

1610-2010

- una rivoluzione – si perdono corpi celesti perfetti e centralità della terra (Harriot, Galileo, Keplero)
  - l'imperfezione della superficie lunare
  - i satelliti che ruotano intorno a Giove (7 gennaio 1610)
  - anelli di Saturno, fasi di Venere, macchie solari



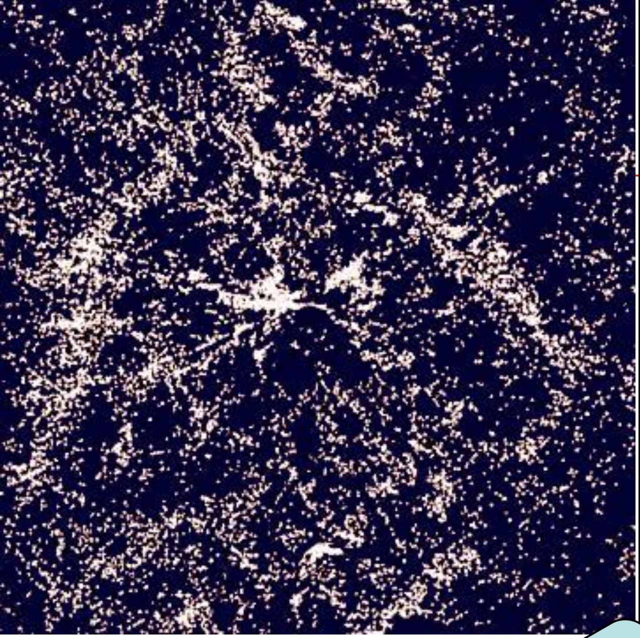
La luna disegnata da Galileo



fino a ~1610 osservazione a occhio nudo, ~1 mm → 1 km, poi telescopio e microscopio: il mondo appare molto diverso

Ancora sul ‘600

- Il ‘600 è il secolo delle rivoluzioni
  - Giordano Bruno: un universo infinito (ora sappiamo che non è così, ma che è molto più grande di quanto appare ad occhio nudo)
  - le leggi della meccanica (fino ad allora c’era stato solo Aristotele)
  - il calcolo infinitesimale (Newton, Leibnitz)
  - la perdita della certezza e la nascita del calcolo delle probabilità (B. Pascal, Lettera del 24 Agosto 1654 a P. de Fermat sul gioco incompiuto): il futuro non è più imprevedibile, possiamo pianificare le nostre attività e la nostra vita sulla base della probabilità di verificarsi dei più svariati eventi – nozione di rischio, utile in tutti i casi di imperfezione, quindi sempre



10^{26} m

10^{23} m

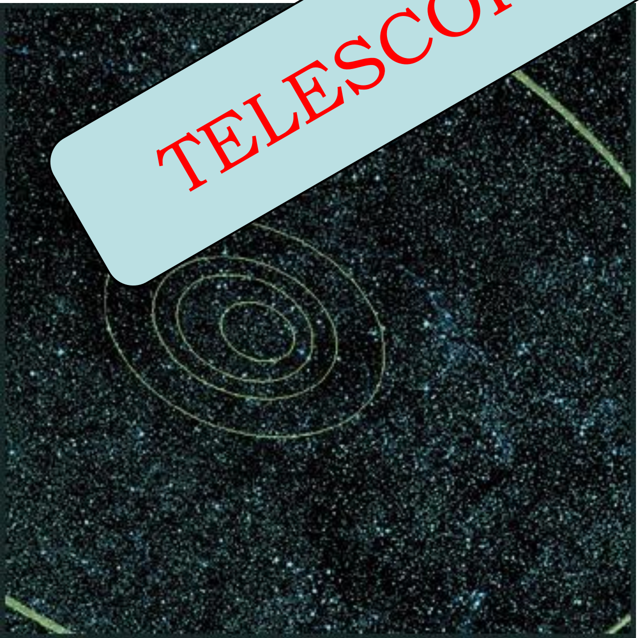
10^{21} m

TELESCOPIO

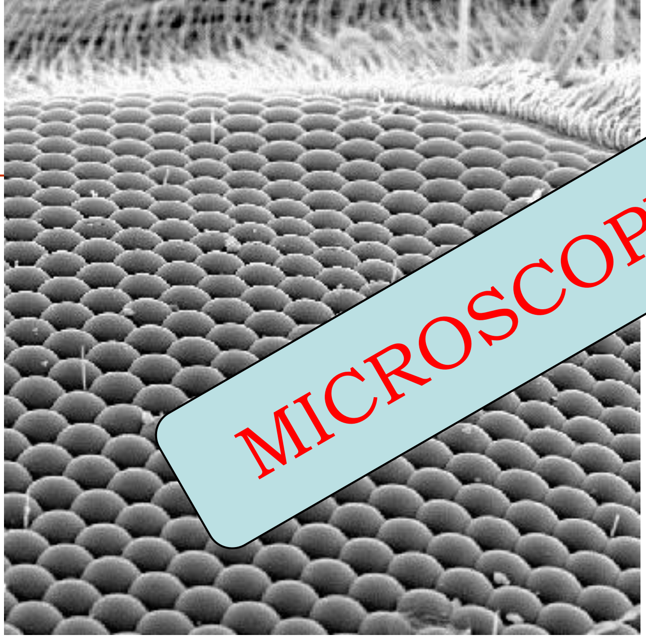
10^{12} m

10^{6} m

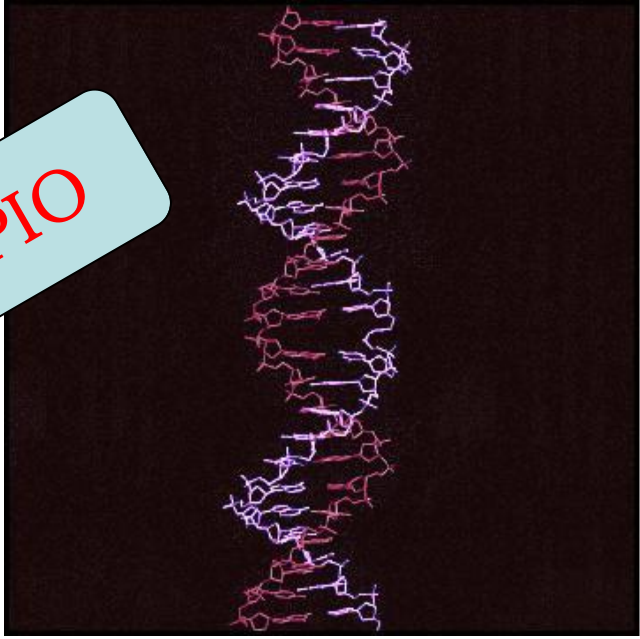
10^{0} m



10^{-2} m

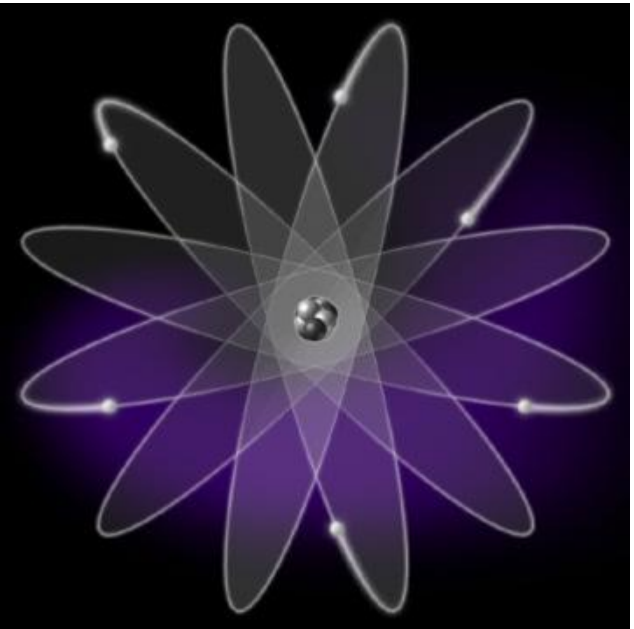


10^{-4} m

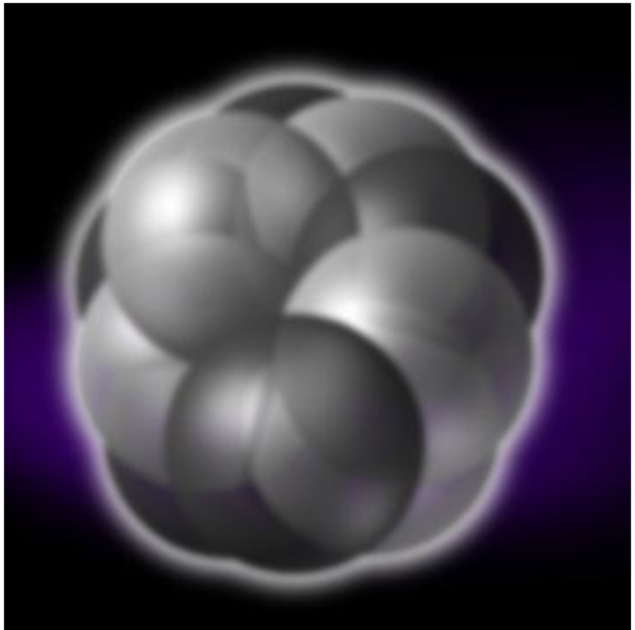


10^{-9} m

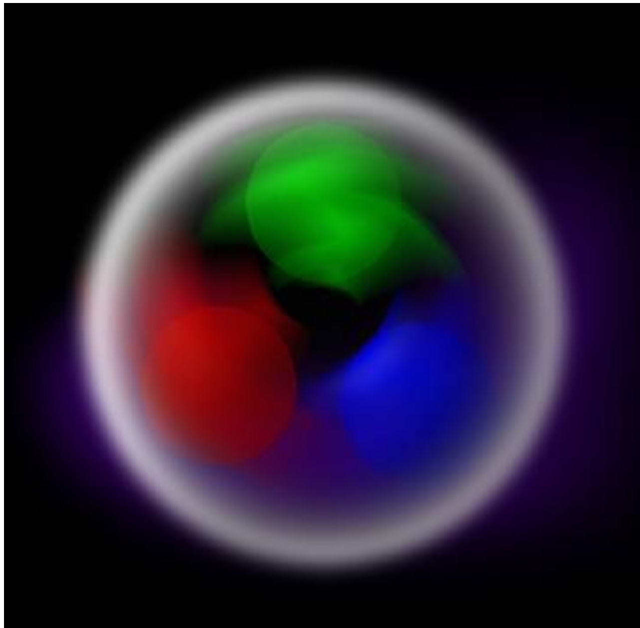
10^{-10} m

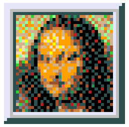


10^{-14} m

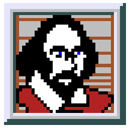


10^{-15} m





Introduzione

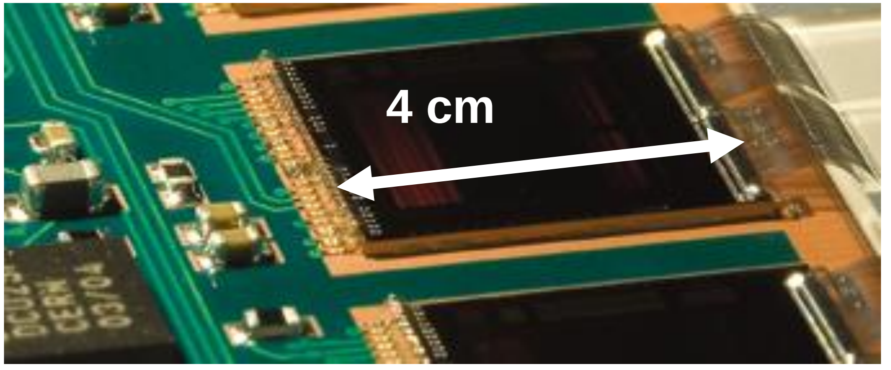


- 1) Quanto è alta la torre Eiffel? 2) Qual'è l'età dell'universo? 3) E' più bello un quadro astratto o uno figurativo? 4) E' più veloce la luce nel diamante o il suono nel ferro? 5) Profuma più una violetta o una rosa? 6) E' più caldo in cima al Cervino o accanto alle piramidi di Gizah? 7) E' più musicale un *la* (440.0 Hz) o un *do* (261.6 Hz)? - Sono tutte domande che ci possiamo porre riguardo a quello che ci circonda.

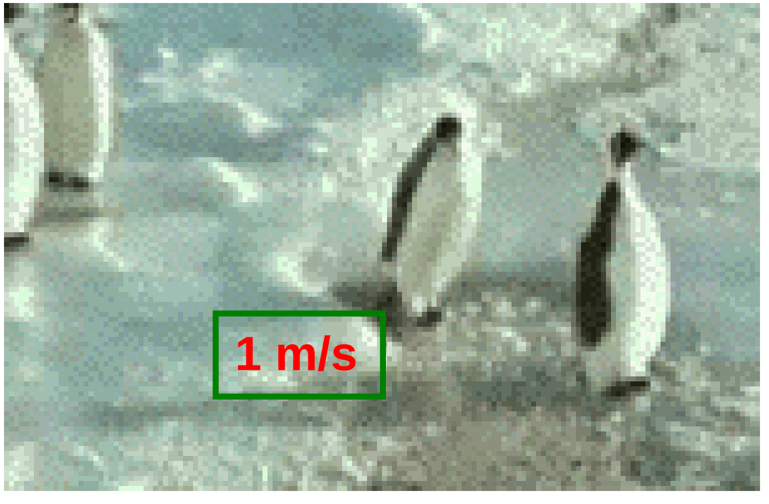
- La fisica può dare risposta ad alcune domande: quelle suscettibili di una risposta quantitativa (1, 2, 4, 6) attraverso un procedimento di misura/confronto dopo aver stabilito una opportuna unità di misura – E' difficile stabilire l'unità di misura di bellezza, di profumo o di musicalità (anche se è possibile stabilire relative scale).

- Parafrasando WShakespeare: c'è più fisica nell'ala di una farfalla dalle ali blu di quanto qualcuno possa immaginare (riflessione, cambiamento di fase, interferenza).

Il mondo che ci circonda e la sua misura (I)



Microelettronica

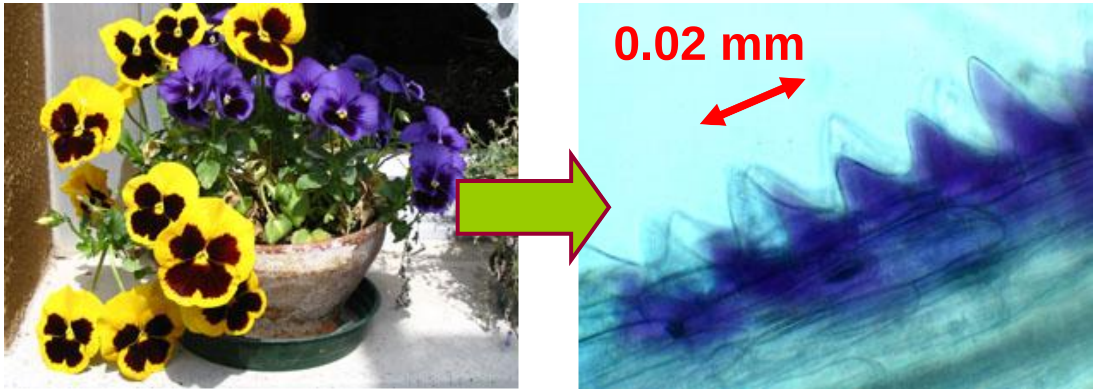


Pinguini

Il mondo che ci circonda e la sua misura (II)

Morpho: un es. di *interferenza* (le ali non contengono un pigmento blu!)

Un altro es. di *interferenza*: lamina di acqua saponata



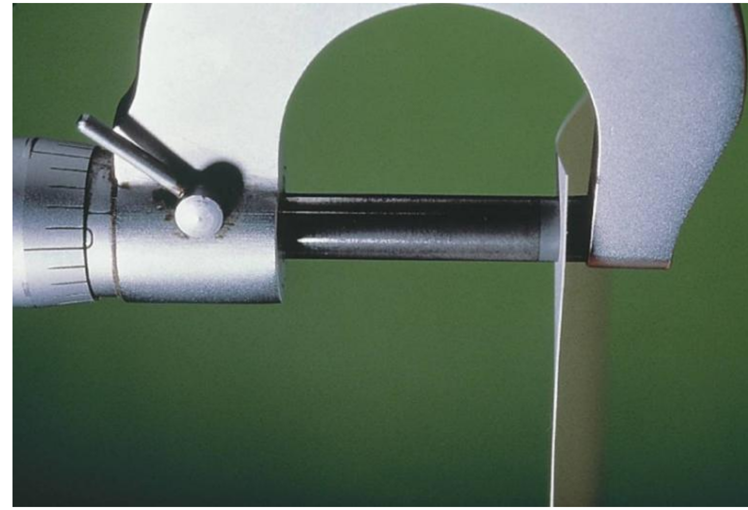
Quello che la fisica è

- Fisica (dal greco φυσικός (*phusikos*) = *naturale*, φύσις = *natura*), si basa su due assiomi:
  - le leggi della natura sono valide ovunque (in qualsiasi tempo e luogo)
  - l'osservazione porta ad una decisione sulla validità di modelli per una descrizione di eventi naturali
- Sperimentazione sulla natura a tutti i livelli, dai complessi ai più elementari, effettuata partendo dalla nozione di misura (quantitativa, riproducibile) e dalla definizione operativa di grandezza fisica attraverso il processo di misura

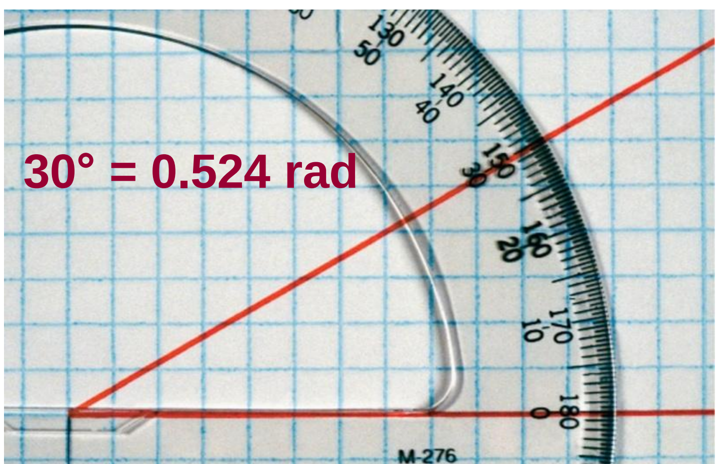
  ⇒ misura quantitativa, quindi suscettibile di correlazione numerica con altre misure (entro gli errori statistici di misura)

  ⇒ misura riproducibile, cioè indipendente dal soggetto che sperimenta e dall'apparato utilizzato (tenuto conto degli errori sistematici e della sensibilità dell'apparato)

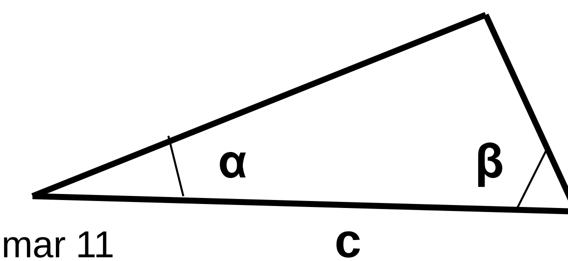
Definizione operativa di una grandezza fisica, processi di misura diretta (confronto) e indiretta



0.07 mm



Misura indiretta: altezza delle montagne mediante triangolazione, misura di temperatura attraverso una misura di resistenza etc.



$$a = \frac{c \sin\alpha}{\sin(180° - \alpha - \beta)}$$

Misura/definizione operativa di grandezza (2)

- Il processo di misura è centrale, fondamentale; per parlare di grandezza fisica occorre dire come si misura:

$\Rightarrow$ scelta dell'unità di misura (arbitraria, comoda)

$\Rightarrow$ procedimento di confronto con l'unità di misura

$\boxed{G = g\, U_g}$ $G' = g'\, U_g$ etc. ossia $G/U_g = g$ etc.

l = 8.8 cm ; s = 0.07 mm ; γ = 30°

G - grandezza, g - numero puro che esprime il rapporto con l'unità di misura U_g

$\Rightarrow$ misurando G con unità di misura diverse si ha

$\boxed{G = g\, U_g = g'\, U_g'}$ $\rightarrow$ $g' = g\, U_g / U_g'$

quindi se l'unità di misura è più piccola G è espresso da un numero più grande l = 8.8 cm = 88 mm

Dimensioni delle grandezze fisiche

- una lunghezza, uno spessore, una distanza, uno spazio percorso Δx sono tutte grandezze fisiche omogenee con una lunghezza, cioè hanno tutti la stessa dimensione che si indica con [L] – si prescinde dal valore numerico
- allo stesso modo una qualsiasi superficie (cerchio, quadrato etc.) è omogenea con il quadrato di una lunghezza e si indica con $[L^2]$ – sia 15 km^2 che 0.7 μm^2 etc
- il tempo misurato a partire da un istante iniziale ed un intervallo di tempo Δt sono omogenei con un tempo: [T]
- in generale in meccanica: $\boxed{[G] = [L^\alpha M^\beta T^\gamma]}$ con α,β,γ +vi,-vi,0
- tutte le relazioni in fisica devono essere dimensionalmente corrette; qualsiasi sia la combinazione di grandezze che compare nella relazione, le dimensioni a dx dell'= devono essere le stesse di quelle a sx dell'= : $[v] = [s/t] = [LT^{-1}]$

Dimensioni delle grandezze fisiche/2

NB si possono sommare e sottrarre *solo* grandezze omogenee (cioè delle stesse dimensioni)

Prefissi e notazioni

- I risultati delle misure possono essere espressi da numeri molto più grandi o più piccoli di 1 - dipende dall'unità di misura scelta - si usano quindi i prefissi, comunemente:

  [atto (a) 10^{-18}; femto (f) 10^{-15},] pico (p) 10^{-12}; nano (n) 10^{-9}; micro(μ) 10^{-6}; milli (m) 10^{-3}; centi (c) 10^{-2}; deci (d) 10^{-1}; deca (da o D) 10^{1}; etto (h) 10^{2}; chilo (k) 10^{3}; mega (M) 10^{6}; giga (G) 10^{9}; tera (T) 10^{12}; peta (P) 10^{15}; [exa (E) 10^{18}]

- Le grandezze sono espresse mediante lettere (ad es. iniziale in italiano o in inglese) ma l'alfabeto latino esteso spesso non è sufficiente ad evitare confusione di notazioni, così si usano anche lettere greche, comunemente:

  minuscole: α,β,γ,δ,ε,η,θ,λ,μ,ν,π,ρ,σ,τ,φ,χ,ψ,ω

  maiuscole: Γ,Δ,Π,Σ,Φ,Ω

- Le unità di misura si indicano con la maiuscola se corrispondono ad un nome proprio - 1 A = 1 ampère

Leggi, modelli, teorie

- misure contemporanee di diverse grandezze permettono di ottenere, entro gli errori di misura, relazioni fra le grandezze misurate (ad es. temperatura esterna ed ora del giorno, tempo e distanza di caduta per un corpo in un fluido)

  $\Rightarrow$ leggi esprimibili in linguaggio matematico

  ad es. funzioni elementari, eq. fra grandezze finite, eq. differenziali etc.

  in generale informazione/correlazione sotto forma di tabella, grafico, n-tupla, database $\leftrightarrow$ calcolatrice, PC etc.

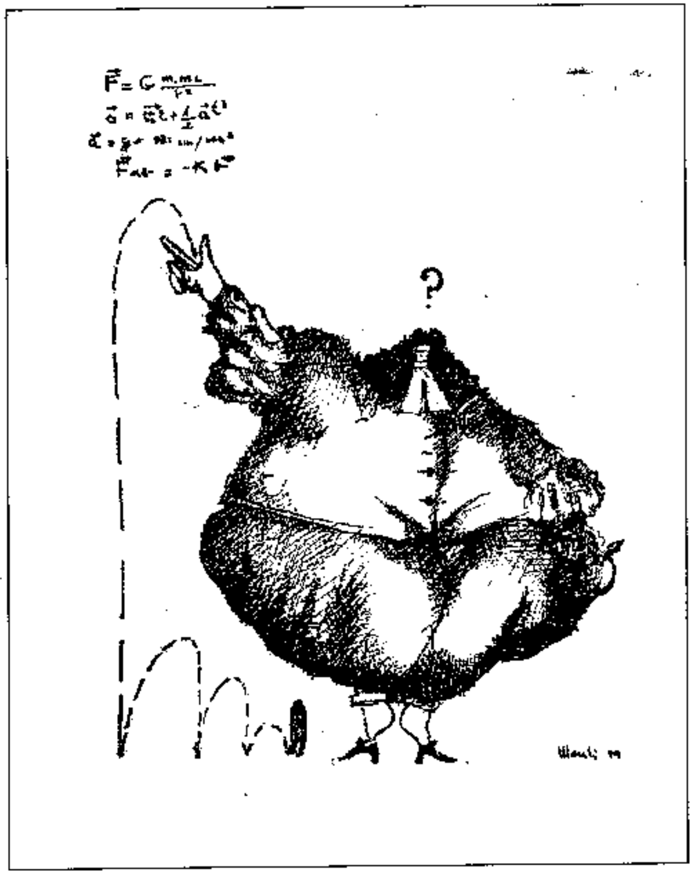
  $\Rightarrow$ (diverse) leggi $\rightarrow$ modello/teoria da confrontare con ulteriori misure (verifica o falsificazione sperimentale, metodo sperimentale galileiano)

Probabilità, preliminari

- Prima di discutere ulteriormente la misura di una grandezza fisica e la precisione di misura, si premette la nozione di probabilità ed il relativo calcolo
- Probabile: dal verbo latino *probare* (provare, verificare) e dal suffisso –*ilis* (che può essere) $\rightarrow$ “che può essere verificato”, dove la verifica è empirica

Probabilità, preliminari/2

- perchè?
- si lancia una moneta (*evento, esperimento*) e si potrebbe scomodare Newton (e un PC)
- oppure si può dire che non sappiamo esattamente cosa accadrà in un dato *caso*, ma che mediamente si avrà P(T) = P(C) = ½ = 50% dove P è la *probabilità* – nel 50%(50%) dei *casi* esce T(C)



Un lancio di moneta potrebbe essere seguito in modo deterministico usando le equazioni di Newton ...

Definizioni di probabilità

Formalizziamo il concetto, associando a ogni evento x un numero P(x), probabilità, tale che:

- **P(evento certo) = 1**
- **P(evento impossibile) = 0**
- Per ogni evento x: **$0 \leq P(x) \leq 1$**
- Se x_1 e x_2 sono due eventi **mutuamente escludentesi**

$$P(x_1+x_2) = P(x_1) + P(x_2)$$

- Se $\{x_i, i=1,N\}$ è un **gruppo completo di eventi mutuamente escludentesi**

$$\Sigma_i \, P(x_i) = 1$$

Esistono diverse definizioni possibili di probabilità che soddisfano questi assiomi

Relazione fra eventi

L'evento A è **dipendente** dall'evento B se la probabilità che A accada dipende dal fatto che accada B.

Esempio: A = “La Virtus vince lo scudetto del basket”,
B = “I più forti giocatori della Virtus si infortunano durante i play-off”

L'evento A è **indipendente** dall'evento B se la probabilità che A accada non dipende da B

Esempio: A = “La Virtus vince lo scudetto del basket”
B = “Il Bologna vince il campionato di serie A”

Due eventi A e B sono **mutuamente escludentesi** (o **incompatibili**) se non possono verificarsi contemporaneamente.

Esempio: A = “La Virtus vince lo scudetto del basket”
B = “La Scavolini Pesaro vince lo scudetto del basket”

Altre definizioni

Eventi casuali formano un **gruppo completo di eventi** se **almeno uno** di essi deve **necessariamente** accadere.
(Esempio: A_1 … A_{16} = "L'i-esima squadra del campionato vince lo scudetto")

Eventi contrari sono due eventi mutuamente escludentesi che formano un gruppo completo.
Esempio: A = "Nel lancio di una moneta esce Testa"
B = "Nel lancio di una moneta esce Croce" A = non B

Due o più eventi casuali si dicono **equiprobabili** se la **simmetria** dell'esperimento permette di supporre che essi abbiano tutti la **stessa probabilità** di accadere.
(Esempio: A_1 … A_6 = "Nel lancio di un dado non truccato esce la faccia *i*")

- In un gruppo completo di N eventi equiprobabili e mutualmente escludentisi la probabilità di ciascuno di essi è 1/N (Lotto: 1/90, monete: ½, dado/cubo: 1/6)

Somma e prodotto di eventi

Somma di due eventi A e B è l'evento C che consiste nel **verificarsi di A o di B o di entrambi** (varie notazioni $\cup$, +, o)

$$\mathbf{P(C) = P(A \cup B) = P(A+B) = P(A\ o\ B)}$$

Somma di un numero qualsiasi di eventi : l'evento che consiste nel verificarsi di <u>almeno uno</u> di essi.

Prodotto di due eventi A e B è l'evento C che consiste nel **verificarsi di A e di B "contemporaneamente"** ($\cap$, $\cdot$, e)

$$\mathbf{P(C) = P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A\ e\ B)}$$

Prodotto di un numero qualsiasi di eventi : l'evento che consiste nel verificarsi di <u>tutti</u> loro "contemporaneamente".

Probabilità condizionata

- Probabilità che accada A *dopo che* è accaduto l'evento B, si indica con

  $P(A|B)$
- es. A = superare lo scritto di Fisica, B_j = risolvere correttamente j esercizi, chiaramente

  $P(A|B_3) > P(A|B_2)$

  (la prima è 1, la seconda è 0)
- può succedere che P(A) sia piccola mentre P(A|B) è grande: A = la squadra ultima in classifica vince il campionato, B = le altre squadre sono tutte squalificate per illecito sportivo

Variabili aleatorie, distribuzioni di probabilità

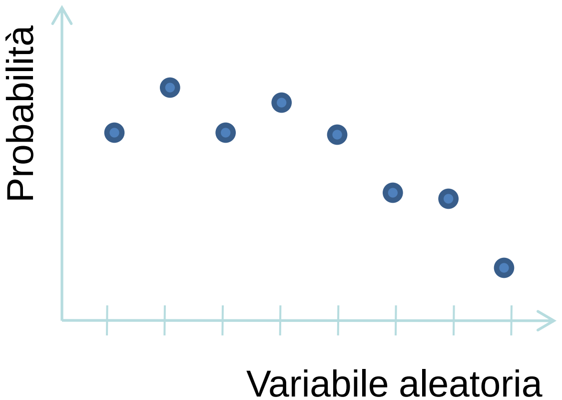
Variabili aleatorie : grandezze che, nel corso di una prova, possono assumere un valore sconosciuto a priori.

Si distinguono in:

discrete : se possono assumere solo un insieme di valori numerabile
es: il numero estratto da un urna del lotto

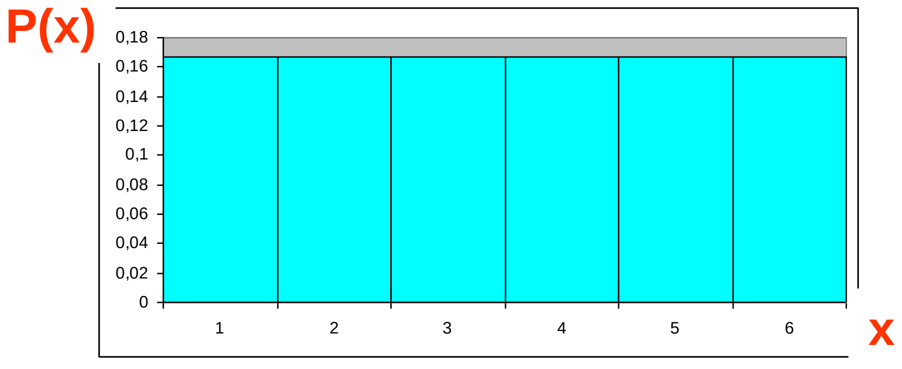
continue : se possono assumere un insieme di valori continuo
es: il punto in cui una freccetta colpisce un bersaglio

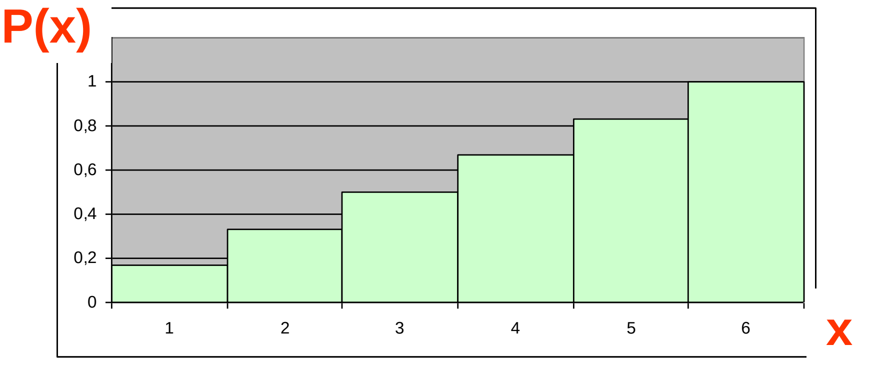
Distribuzione di probabilità :
<u>funzione</u> che associa a ciascun possibile valore assunto dalla variabile aleatoria la corrispondente probabilità.



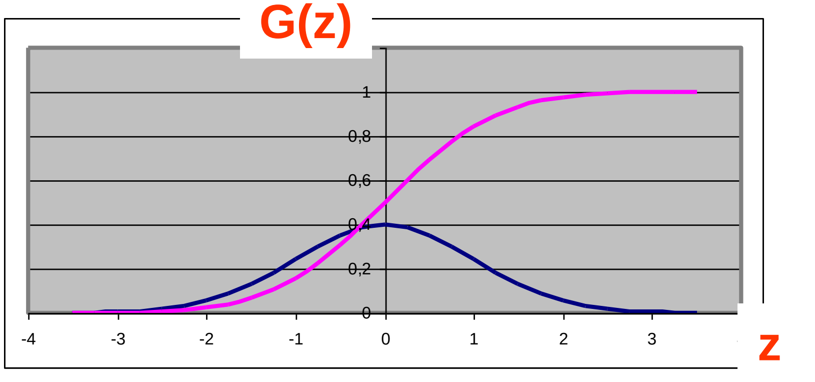
Distribuzioni di probabilità cumulative(*)

- sia $P(x_i)$ con i=1,N una distribuzione di probabilità di una variabile aleatoria discreta x_i, si dice cumulativa la distribuzione $\Sigma_{i=1,j}\, P(x_i)$, tale che $\Sigma_{i=1,N}\, P(x_i) = 1$ (la certezza, per es. una qualsiasi faccia del dado deve per forza uscire)





- per una variabile aleatoria continua basta sostituire la Σ con un ∫ (per es. per la funzione di Gauss, vedi più avanti, $G(z) = 1/\sqrt{2\pi}\, \exp(-z^2/2)$, l'integrale fra -∞ e 0 vale 0.5, cioè c'è una probabilità del 50% che z capiti in quell'intervallo: curva fucsia = area sotto la curva blu)



- l'area fra z = -1 e z = +1 vale 0.683 (da ricordare)

(*) facoltativo, ma utile

Valore atteso

Valore atteso (o **speranza matematica**) di una variabile aleatoria : somma (o integrale) di tutti i possibili valori della variabile aleatoria moltiplicati per la loro probabilità.

Variabile aleatoria discreta (distribuzione di probabilità discreta):

$$\langle x \rangle = \Sigma_{i=1,N} \; x_i \cdot P(x_i)$$

Variabile aleatoria continua (distribuzione di probabilità continua):

$$\langle x \rangle = \int_{\text{tutti gli } x} x \cdot P(x) \cdot dx$$

Si dimostra che **il <u>valor medio</u>** $\boxed{x_{medio} = (\Sigma_{i=1,N} x_i)/N}$ **dei valori misurati di una variabile aleatoria in un numero molto grande di "esperimenti" <u>tende al valore atteso</u> della variabile aleatoria**.

Esercizio

Si effettuano diverse misure del raggio di base (R) e dell'altezza (H) di **uno stesso cilindro**, ottenendo le seguenti coppie di valori:

R_1 = 23.92 cm, H_1 = 17.59 cm
R_2 = 0.2428 m, H_2 = 0.1719 m
R_3 = 233.9 mm, H_3 = 172.4 mm

Trovare il **valor medio** del volume del cilindro.

Formula risolutiva: $V_{medio} = (V_1+V_2+V_3)/3$
con $V_i = \pi \cdot R_i \cdot R_i \cdot H_i$, dove R_i = raggio base, H_i = altezza

Nel Sistema Internazionale una lunghezza si esprime in m:

R_1 = 0.2392 m, H_1 = 0.1759 m → $V_1 = 0.3162\ 10^{-1}\ m^3$ [0.0031618]
R_2 = 0.2428 m, H_2 = 0.1719 m → $V_2 = 0.3184\ 10^{-1}\ m^3$ [0.0031836]
R_3 = 0.2339 m, H_3 = 0.1724 m → $V_3 = 0.2963\ 10^{-1}\ m^3$ [0.0029631]

Valor medio del volume = $0.310 \cdot 10^{-1}\ m^3$ (= $3.10 \cdot 10^{-2}\ m^3$ = 0.310E-01 m^3)

Probabilità classica

La probabilità, P(x), di un evento x è il rapporto tra il numero M di casi "favorevoli" (cioè il manifestarsi di x) e il numero totale N di risultati ugualmente possibili e mutuamente escludentesi.

Detta anche **probabilità oggettiva** o **probabilità a priori**: stima della probabilità di un evento dalla simmetria del problema.

Esempio: lancio di un dado non truccato – la probabilità, di avere un numero qualsiasi compreso fra 1 e 6, è 1/6:

$$P(x) = \frac{\text{Numero di volte in cui può uscire x}}{\text{Numero di risultati possibili}} = \frac{1}{6}$$

Probabilità empirica

Definizione **sperimentale** di probabilità come **limite della frequenza** misurabile in una serie di esperimenti.

La probabilità di un evento è il limite cui tende la frequenza relativa di successo all'aumentare del numero di prove.

Nota : rispetto alla definizione classica sostituiamo il rapporto

$$\frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

con

$$\frac{\text{numero di esperimenti con esito favorevole}}{\text{numero complessivo di esperimenti effettuati}} = \frac{M}{N}$$

Probabilità empirica/2

In pratica, se abbiamo un esperimento ripetuto N volte ed un certo risultato x che accade M volte, la probabilità di x è data dal limite della **frequenza** (M/N) quando N tende all'infinito

$$P(x) = \lim_{N\to\infty} M/N$$

Vantaggio: possiamo applicare la definizione anche a

- casi in cui la distribuzione di probabilità non è uniforme

- casi in cui la distribuzione di probabilità non è ricavabile a priori dalla simmetria dell‘esperimento.

Probabilità empirica/3

N1: la probabilità empirica …non è una proprietà solo dell'esperimento ma... **dipende del particolare gruppo su cui viene calcolata**.

Es: la probabilità di sopravvivenza ad una certa età, calcolata su diversi campioni di popolazione a cui una stessa persona appartiene (maschi, femmine, fumatori, non fumatori, deltaplanisti, ecc.), risulta diversa.

N2: … **si può rigorosamente applicare soltanto agli esperimenti ripetibili** per i quali il limite per N che tende all'infinito ha senso.

Es: Il risultato di una partita di calcio, il tempo atmosferico di domani e molte altre situazioni della vita quotidiana **non** sono soggette all'uso di questa definizione di probabilità.

N3: necessità di "operatività":
(quasi) tutti sono concordi nel definirla come
il valore della frequenza relativa di successo su un numero di prove sufficientemente grande

non necessariamente tendente all'infinito!!!!

Come si usa la probabilità - predizione

- al di là della particolare definizione di probabilità, se conosco la probabilità P(x) di un evento x, posso inferire che cosa succederà, cioè quante volte (M) uscirà il risultato x, in una serie di N esperimenti/prove – cioè si inverte la definizione di probabilità

  $M = P(x)N$

  è il valore più probabile (intero, se la variabile aleatoria x è intera)

- es. dado, 100 lanci, $M = P(5)N = 100/6 = 17$

  NB 16.66... sarebbe il valor medio su un gran numero di serie di 100 lanci ciascuna

Probabilità soggettiva(*)

La probabilità di un evento x è la misura del grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce, secondo le sue informazioni e opinioni, all'avverarsi di x.

Definizione meno rigorosa, ma più spesso usata per formulare giudizi:

Es: "credo che domenica la mia squadra riuscirà a vincere",
"è facile che mi capiti una domanda sulla probabilità all'esame di fisica",

Nota:
Talvolta siamo forzati a assegnare un determinato grado di fiducia all'avverarsi di un evento.

Esempio:
il grado di fiducia che diamo al fatto che il gruppo su cui abbiamo calcolato la frequenza di un evento sia effettivamente rappresentativo del campione totale.

(*) facoltativo

Es. su prob. composta e prob. condizionata(*)(^)

Nel gioco del lotto, cinque numeri fra 1 e 90 vengono estratti casualmente da un'urna. La probabilità che un numero N esca da un'estrazione è

$$P(N) = 5/90 = 1/18 = 0.055555... = 5.56\%$$

La probabilità che N non sia estratto è pertanto

$$P(\text{non } N) = 1 - P(N) = 0.944444\ldots = 94.44\%$$

1) Qual è la probabilità che N non venga mai estratto nel corso di 99 estrazioni?

Probabilità composta: l'evento "non N" deve apparire 99 volte:

$$P(99 \text{ volte non } N) = P(\text{non } N) \cdot P(\text{non } N) \cdot \ldots \cdot P(\text{non } N) \qquad \{99 \text{ volte}\}$$
$$= P(\text{non } N)^{99} = 0.94444^{99} = 0.003487 = 0.35\ \%$$

2) Qual è la probabilità che N non venga mai estratto nel corso di 100 estrazioni?

$$P(100 \text{ volte non } N) = P(\text{non } N) \cdot P(\text{non } N) \cdot \ldots \cdot P(\text{non } N) \qquad \{100 \text{ volte}\}$$
$$= P(\text{non } N)^{100} = 0.94444^{100} = 0.003293 = 0.33\ \%$$

(^) Si assume di reinserire ogni volta il numero estratto

(*) facoltativo

Lotto/2(*)

3) Qual è la probabilità che N non venga estratto per 100 estrazioni, se già non è stato estratto per 99 estrazioni?

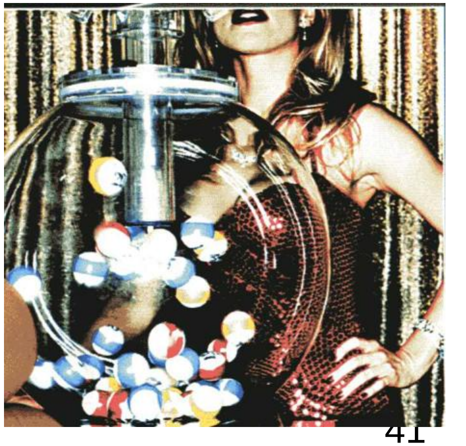
E' la probabilità che nella centesima estrazione non esca il numero N, se tale numero non è stato estratto nelle estrazioni precedenti. Ci sono 90 numeri nell'urna, cinque dei quali vengono estratti. La probabilità di non estrarre N è P(non N) = 85/90 = 94.44%

Pertanto, la probabilità che nella centesima estrazione il numero N continui a non essere estratto, se non è stato estratto nelle 99 estrazioni precedenti è (probabilità condizionale):

P(100 volte non N | 99 volte non N) = P(non N) = 94.44%

Osservazione (ovvia…):

La probabilità che un numero venga estratto in un gioco casuale come il lotto, in cui le condizioni (urna e palline numerate) vengono restaurate dopo ogni giocata, non dipende dal fatto che tale numero sia stato estratto o meno in una giornata precedente.



(*) facoltativo

Teoremi sulla probabilità

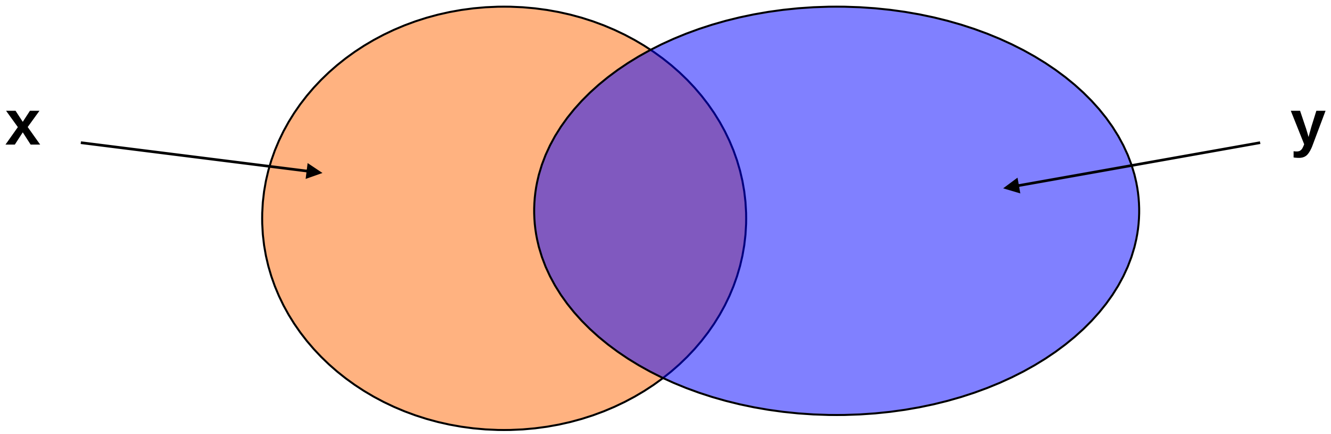
- Teorema della somma
- Teorema del prodotto
- Teorema della probabilità composta
- Teorema della probabilità totale
- Teorema di Bayes

Teorema della somma

Per due eventi qualsiasi x e y, non necessariamente mutuamente escludentesi, vale

$$P(x \cup y) = P(x) + P(y) - P(x \cap y)$$

(ovvero $\boxed{P(x+y) = P(x) + P(y) - P(x \cdot y)}$)

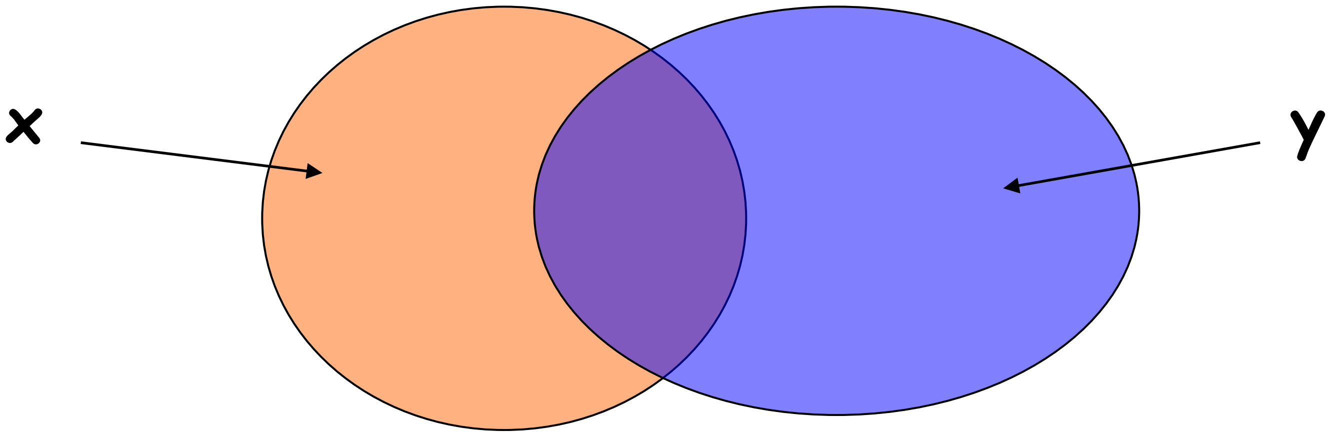


Teorema del prodotto(*)

Per due eventi qualsiasi x e y, non necessariamente mutuamente escludentesi, vale

$$P(x \cap y) = P(x) + P(y) - P(x \cup y)$$

$$(\text{ ovvero } P(x \cdot y) = P(x) + P(y) - P(x+y) \quad)$$



(*) facoltativo

Teorema della probabilità composta

Altro modo per esprimere il teorema del prodotto :

la probabilità del prodotto di due eventi è uguale al prodotto della probabilità di uno degli eventi per la probabilità condizionata dell'altro calcolata a condizione che il primo abbia luogo:

$$\mathbf{P(x \cap y) = P(x) \cdot P(y|x)\ [= P(y) \cdot P(x|y)]}$$

Si noti che:

- se x e y sono mutuamente escludentesi $P(y|x)=0$ e $P(x \cap y) = 0$;
- se x e y sono indipendenti, $P(y|x) = P(y)$ e $\boxed{P(x \cap y) = P(x) \cdot P(y)}$.

Esercizi

Un tiratore ha una probabilità uguale a 0.178 di fare centro ad un qualsiasi colpo. Se prende un autobus per recarsi al poligono di tiro qual è la probabilità che riceva un biglietto dell'autobus con un numero dispari **e al tempo stesso** (**oppure**) di fare centro al secondo colpo?

P_1 (biglietto dell'autobus con numero dispari) = ½ = 0.5 *(Ad es., per un numero di 7 cifre, ci sono tanti numeri pari, quanti dispari)*

P_2 (fare centro al secondo colpo) = 0.178 (*Al secondo colpo P_2 è la stessa che ad ogni altro colpo)*

NB Eventi indipendenti!

1) P = Probabilità che avvengano contemporaneamente (**prodotto**)

$P = P_1 \cdot P_2 = 0.0890$ ($= 8.90 \cdot 10^{-2}$ = 0.890E-01)

2) P' = Probabilità che avvenga l'uno o l'altro (**somma**)

$P' = P_1 + P_2 - P_1 \cdot P_2 = 0.589$ ($= 5.89 \cdot 10^{-1}$ = 0.589E+00)

Esercizio - predizione

Un bambino lancia sassi contro una parete circolare di raggio 0.514 m in cui sono stati praticati N_f = 26 fori circolari del diametro di 5.70 cm. Se il bambino non mira e i sassi sono piccoli rispetto alle dimensioni dei fori, qual è il numero più probabile di sassi che passerà oltre la parete ogni N_l = 3670 lanci? Qual è la probabilità che un sasso rimbalzi ?

Soluzione:

Simmetria del problema → ogni cm^2 ha la stessa probabilità di essere colpito → probabilità *p* di passare dall'altra parte è data dall'area favorevole (dei fori) *s* diviso l'area totale *S*:

$p = s/S = N_f \cdot r^2/R^2$

con s = superficie totale dei fori $= N_f \cdot \pi \cdot r^2$

S = superficie della parete $= \pi \cdot R^2$

r = raggio dei fori = d/2 = 0.285E-01 m

R = raggio della parete = 0.514E+00 m

N. più probabile sassi $= N_l \cdot p = N_l \cdot s/S = N_l \cdot N_f \cdot (r/R)^2 = 293$ (NB: intero!!!)

La probabilità che rimbalzi $q = 1 - p = 1 - s/S = 0.920$

Teorema della probabilità totale(*)

Dato un gruppo completo di N eventi mutuamente escludentesi $\{A_1, A_2, \ldots, A_N\}$ (**insieme delle ipotesi**)

la probabilità di un evento x che può avvenire contemporaneamente a esse:

$$\mathbf{P(x) = \Sigma_{i=1,N} P(x|A_i) \cdot P(A_i)}$$

cioè

probabilità dell'evento x = la somma dei prodotti delle probabilità di ciascuna delle ipotesi per la probabilità condizionata dell'evento con tali ipotesi

(*) facoltativo

Es. di applicazione del teor. della pr. totale(*)

Estrazione di un pallina da un'urna che contiene due palline.
Possibile insieme delle ipotesi è:

A_1 = Entrambe le palline nell'urna sono rosse;

A_2 = Entrambe le palline nell'urna non sono rosse;

A_3 = Una pallina è rossa e l'altra no.

Qual è la probabilità dell'evento **x** = "estrarre una pallina rossa"?

$$P(x|A_1) = 1$$
$$P(x|A_2) = 0$$
$$P(x|A_3) = 1/2 = 0.5$$

$$P(x) = 1 \cdot P(A_1) + 0.5 \cdot P(A_3) = ?$$

<u>Ci manca un dato</u>: le probabilità delle varie ipotesi a priori.
Se però estraggo una pallina rossa, so che almeno una pallina rossa c'era nell'urna, cioe' che $P(A_2)=0$!

In genere: dal risultato di un esperimento (l'osservazione dell'evento **x**) si cerca di capire la causa che l'ha generato (cioè con quale probabilità l'ipotesi A_i può essere considerata l'origine dell'evento osservato). Ci serve cioè il teorema di Bayes…

(*) facoltativo

Teorema di Bayes(*)

Osserviamo un evento x. Esiste un insieme delle ipotesi $\{A_i\}$. Come viene modificata la probabilità che assegnamo all'ipotesi A_i dopo l'osservazione x? (In altre parole: qual è la probabilità condizionata dell'ipotesi A_i data l'osservazione x?)

Per il teorema della moltiplicazione:

$$\mathbf{P(x \cdot A_i) = P(x) \cdot P(A_i|x) = P(A_i) \cdot P(x|A_i)}$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{P(A_i|x) = P(A_i) \cdot P(x|A_i) \,/\, P(x)}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{P(A_i|x) = \frac{P(A_i) \cdot P(x|A_i)}{\Sigma_{i=1,N} P(A_i) \cdot P(x|A_i)}}$$

(*) facoltativo

Continua l'es. dell'urna con due palline(*)

A priori non sappiamo se nell'urna ci sono palline rosse o di altri colori. Possiamo assegnare alle tre ipotesi la stessa <u>probabilità a priori</u> (a questo punto è una probabilità soggettiva!):

$$\mathbf{P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3}$$

Come viene modificata la probabilità che assegniamo a ciascuna ipotesi dopo l'osservazione dell'evento x?

$$\Sigma_{i=1,3}\, P(A_i) \cdot P(x|A_i) = P(A_1) \cdot P(x|A_1) + P(A_2) \cdot P(x|A_2) + P(A_3) \cdot P(x|A_3) =$$

$$1/3 \cdot 1 + 1/3 \cdot 0 + 1/3 \cdot 0.5 = 0.5$$

e

$$\mathbf{P(A_1|x) = 1/3 \cdot 1 / 0.5 = 2/3 = 66.7\ \%}$$

$$\mathbf{P(A_2|x) = 1/3 \cdot 0 / 0.5 = 0}$$

$$\mathbf{P(A_3|x) = 1/3 \cdot 0.5 / 0.5 = 1/3 = 33.3\ \%}$$

Partendo da una conoscenza limitata (in questo caso, una stima soggettiva della probabilità delle varie ipotesi) l'osservazione dell'evento x ci ha permesso di modificare, migliorandola, la conoscenza delle ipotesi.

(*) facoltativo

Continua/2(*)

Cosa succede però alle nostre conclusioni se utilizziamo delle ipotesi differenti?

Provare a calcolare, ad esempio, qual è la probabilità che nell'urna ci siano due palline rosse in caso di osservazione dell'evento x="estrazione di una pallina rossa" e se l'insieme delle ipotesi è il seguente

A_1 = nell'urna ci sono due palline rosse
A_2 = nell'urna ci sono due palline gialle
A_3 = nell'urna ci sono due palline blu
A_4 = nell'urna ci sono una pallina rossa e una gialla
A_5 = nell'urna ci sono una pallina rossa e una blu
A_6 = nell'urna ci sono una pallina gialla e una blu

e a ciascuna di esse associamo la stessa probabilità a priori, 1/6.

R:
$P(A1|x) = 1/6 \cdot 1 / 0.333 = 1/2 = 50\%$
$P(A2|x) = 1/6 \cdot 0 / 0.333 = 0$
$P(A3|x) = 1/6 \cdot 0 / 0.333 = 0$
$P(A4|x) = 1/6 \cdot 0.5 / 0.333 = 1/4 = 25\%$
$P(A5|x) = 1/6 \cdot 0.5 / 0.333 = 1/4 = 25\%$
$P(A6|x) = 1/6 \cdot 0 / 0.333 = 0$

(*) facoltativo

Note(*)

N1: il teorema di Bayes è un teorema matematico rigoroso che ci permette di ricavare conclusioni sulla probabilità di determinati eventi (vedi esercizio successivo, in cui calcoleremo la probabilità che una persona positiva a un test clinico sia effettivamente malata).

N2: Può anche essere usato per migliorare la conoscenza che si ha su determinate ipotesi, come nell'esempio precedente delle due palline nell'urna. Il risultato di un esperimento modifica la stima che abbiamo sulla probabilità delle ipotesi, aiutandoci a scegliere quella più probabile.

N3: Partendo da priori diversi si può arrivare a conclusioni diverse (la scelta dei priori deve essere oculata, anche se soggettiva). In ogni caso, l'utilizzo del risultato di un esperimento con il teorema di Bayes migliora la conoscenza che abbiamo delle ipotesi. L'applicazione ripetuta del teorema di Bayes (tanti esperimenti) converge verso una "stima oggettiva" della probabilità delle ipotesi, indipendente dalla scelta iniziale dei priori.

(*) facoltativo

Esercizio sul teorema di Bayes(*)

Per facilitare un'identificazione precoce dei tumori al seno, le donne da una certa età in poi sono incoraggiate a sottoporsi a mammografia, anche se non presentano sintomi. Per donne senza sintomi fra i 40 e i 50 anni valgano le seguenti informazioni: la probabilità di avere un tumore al seno è dell'1% (incidenza della malattia); se sono effettivamente malate, la probabilità che il tumore sia visto dalla mammografia è dell'80% (efficienza del test); se non sono malate, la probabilità di una mammografia positiva è comunque del 10% (falsi positivi).

Supponiamo che una donna di questo gruppo risulti positiva a una mammografia: qual'è la probabilità che essa sia effettivamente malata?

(*) facoltativo

Soluzione(*)

Probabilità di essere malati: **P(M) = 1% = 0.01**

Probabilità di essere sani: **P(S) = 1 – 1% = 99% = 0.99**

Probabilità di avere il test positivo se malati (prob. condizionata):

P(+|M) = 80% = 0.80

Probabilità di avere il test positivo se sani (prob. condizionata):

P(+|S) = 10% = 0.10

Per il teorema di Bayes:

$$
\begin{aligned}
P(M|+) &= P(+|M) \cdot P(M) \;/\; [\, P(+|M) \cdot P(M) + P(+|S) \cdot P(S) \,] \\
&= 0.8 \cdot 0.01 \,/\, [\, 0.80 \cdot 0.01 + 0.10 \cdot 0.99 \,] \\
&= 0.0748 = 7.5\%
\end{aligned}
$$

Cioè la frazione di donne effettivamente malate fra quelle che risultano positive alla mammografia è del 7.5%

(*) facoltativo

Trattamento in termini di frequenza(*)

A qualcuno potrebbe risultare più semplice pensare in termini di frequenza (numero di casi possibili) invece che in termini di probabilità. Il procedimento non è concettualmente diverso.

Supponiamo un campione di 1000 donne che si sottopone al test. Avremo:

Numero medio di malati: **$N(M) = 1000 \cdot P(M) = 1000 \cdot 0.01 = 10$**

Numero medio di sani: **$N(S) = 1000 - 10 = 990$**

Numero di individui malati che (in media) risulteranno positivi al test:

$$N(+|M) = N(M) \cdot P(+|M) = 10 \cdot 0.80 = 8$$

Numero di individui sani che (in media) risulteranno positivi al test:

$$N(+|S) = N(S) \cdot P(+|S) = 990 \cdot 0.10 = 99$$

Pertanto, 8+99=107 persone su 1000 risulteranno, in media, positive al test. La frazione di queste che è effettivamente malata è:

$$N(+|M) / [\, N(+|M) + N(+|S) \,] = 8/107 = 0.0748 = 7.5\%$$

Cioè la **frazione** di persone effettivamente malate fra quelle che risultano positive al test in oggetto è del 7.5% (come si è trovato col teorema di Bayes).

(*) facoltativo

Ulteriori esercizi (suggeriti)(*)

1) Supponendo che due mammografie successive sulla stessa persona diano risultati indipendenti (irreale, ma semplifica i calcoli…) valutare la probabilità di essere malati nel caso che, dopo un primo risultato positivo del test si decide di ripetere il test e si ha di nuovo un risultato positivo.

R1: $P(M|++) = 0.393 = 39.3\%$

2) Se la probabilità di indurre un tumore con la mammografia (che è un esame radiologico) è dell'1‰, valutare qual'è la frazione minima di individui malati nel campione sottoposto a screening (P(M)) per cui sia maggiore il numero di persone malate riconosciute positive dal test (pertanto potenzialmente curate) rispetto al numero di persone sane che si ammalano a causa del test stesso.

R2: $P(I) = 1‰ = 0.1\% = 0.001$

Supponiamo di effettuare $n = 5$ test nel corso del tempo, allora deve essere

$n\,P(I) < P(M)\,P(+|M)$ ossia perchè il beneficio superi il rischio

$P(M) > n\,P(I)/P(+|M) = 0.00625 = 0.625\%$

(*) facoltativo

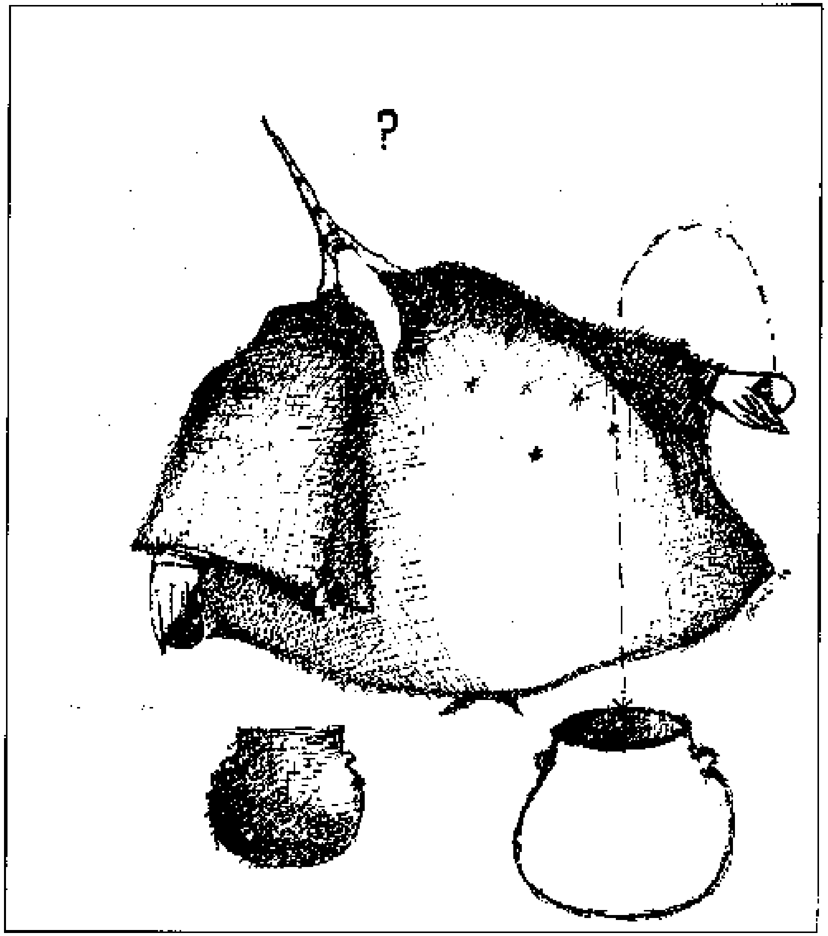
Il problema dell'astrologo(*)

Ultimo esercizio sulla probabilità.

Un astrologo, dopo aver sbagliato una profezia, è condannato a pagare una multa molto salata. Il Sultano gli offre una possibilità di condono:

Eccoti 4 palline, due bianche e due nere che metterai in due urne come vorrai. Poi sceglierò un'urna e da essa estrarrò una pallina. Se la pallina è bianca la multa è condonata altrimenti, se la pallina è nera o se non troverò nulla, la pagherai.

Qual è la disposizione più favorevole all'astrologo?



Qual è la disposizione più favorevole all'astrologo?

Sarà più felice con n>4 palline?

(*) facoltativo, ma divertente

Soluzione(*)

○ = estrazione di una pallina Bianca = ○ · urnaA + ○ · urnaB

P(○) = P(○ · urnaA + ○ · urnaB)

poiché $P(x_1+x_2) = P(x_1) + P(x_2)$ per eventi incompatibili

= P(○·urnaA) + P(○ · urnaB)

poiché P(x·y) = P(x) · P(y|x)

= **P(urnaA) · P(○| urnaA) + P(urnaB) · P(○| urnaB)**

= 0,5 · _______ + 0,5 · _______

Urna A	Urna B	
●	○○●	0,5 · 0 + 0,5 · 2/3 = 0,333
○○	●●	0,5 · 1 + 0,5 · 0 = 0,500
○●	○●	0,5 · ½ + 0,5 · ½ = 0,500
○●●	○	***0,5 · 1/3 + 0,5 · 1 = 0,667***
○○●●		0,5 · 2/4 + 0,5 · 0 = 0,250

(*) facoltativo

Misura di grandezze fisiche

La misura di una grandezza fisica è descrivibile tramite tre elementi:

- **valore più probabile**; **(tendenza del campione)**
- **incertezza** (o "**errore**") ossia la precisione con cui il valore più probabile approssima il valore vero; **(dispersione del camp.)**
- **unità di misura**. **[la misura è confronto]**

Solo scrivendo **valore più probabile, errore, e unità di misura** forniamo una descrizione sufficientemente completa e accurata della grandezza misurata.

L'errore sulla misura determina il **numero di cifre significative** con cui riportare il valore più probabile.

Non ha senso scrivere la quarta cifra significativa se già c'è una indeterminazione sulla terza cifra!

Misure dirette e indirette

Misura diretta quando si confronta direttamente la grandezza misurata con un campione di misura nota.

Esempio: misura di lunghezza con un regolo graduato.

Misura indiretta se ciò che si misura non è la grandezza che interessa, ma altre che siano legate a essa da relazioni funzionali.

Esempio: misura della *distanza* di un oggetto con un sonar.

ovvero

misura del *tempo* percorso dall'onda sonora per andare e tornare dall'oggetto; conoscendo la velocità di propagazione dell'onda posso ricavare la distanza dell'oggetto che l'ha riflessa.

Misure ed errori di misura (incertezze)

La **misura** è la stima del **valore vero** di una **grandezza**.

Limiti alla precisione di questa stima:

- **Sensibilità dello strumento di misura**
  l'ultima cifra che può essere letta
  oppure
  la frazione di divisione che può essere apprezzata;

- **Fluttuazioni casuali del valore misurato**

- Possibilità di **errori** nella **procedura** e/o nello **strumento** (errori sistematici: i più difficili da trattare).

$$X_{mis} = X_{vero} + \varepsilon$$

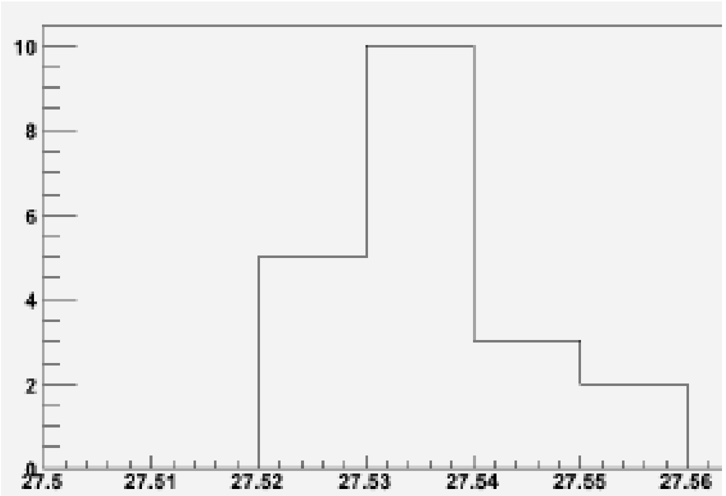
Istogrammi di frequenza

Il risultato della misura di una grandezza fisica è una *variabile aleatoria*.

Possiamo **ripetere la misura** molte volte per studiare le variazioni del risultato (se ce ne sono) dovute agli errori (cioè ottenere la *distribuzione di probabilità* della variabile aleatoria).

Queste distribuzioni possono essere riassunte in Tabelle o in Istogrammi o ulteriormente condensate in un numero minore di parametri.

n.prova	risultato
0	27.525
1	27.531
2	27.539
3	27.529
4	….



Errori di misura (1)

- Supponiamo di fare una misura (serie di N misure), ad es. del tempo di caduta di sferette uguali in un liquido con cronometro al 100esimo di secondo: non si otterranno in genere valori identici.
- In genere, x, se le fluttuazioni (casuali) sono maggiori della sensibilità dello strumento, ho

$x_i = x_{vero} + \varepsilon_i \quad i = 1,2 \ldots N$

e $\langle\varepsilon_i\rangle \rightarrow 0$ per $N \rightarrow$ grande

(*valor medio* = $\langle\ \rangle$ *o* linea sopra *o* <u>sottolineatura</u> *o* indice m; NB gli scarti, $\varepsilon_i = x_i - x_{vero}$, casuali, sono +vi e -vi)

t (s)	scarto (s) $t - t_m$	scarto^2 (s^2) $(t - t_m)^2$
10.78	0.16	0.0256
10.58	-0.04	0.0016
10.62	0.00	0.0000
10.50	-0.12	0.0144

- Se le misure sono ugualmente attendibili, la migliore stima di x_{vero} sarà la media aritmetica

$$\boxed{x_m = (\Sigma_{i=1,N}\, x_i)/N}$$

con un errore r.m.s. sulla misura

$$\sigma = \sqrt{[\Sigma_{i=1,N}(x_i - x_m)^2]/(N-1)}$$

e $\Delta x = \sigma/\sqrt{N}$ sulla media

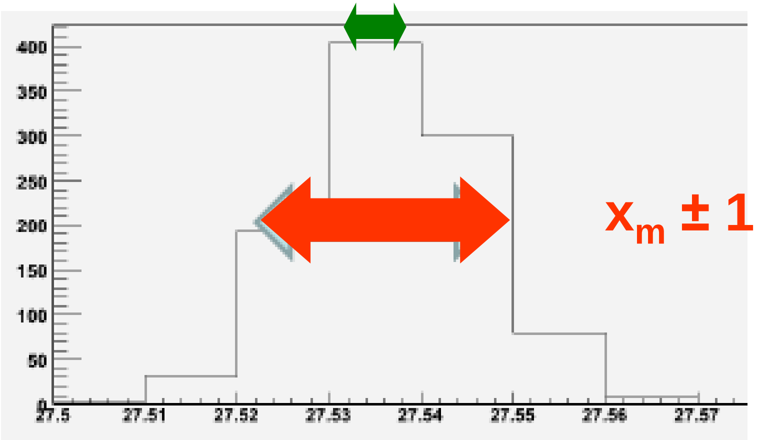
Deviazione standard

consideriamo la radice quadrata dello scarto quadratico medio (**deviazione standard**):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - X_m)^2}{(N-1)}}$$

sulla media:
$\Delta x = \sigma/\sqrt{N}$

La deviazione standard è un indicatore della larghezza della distribuzione delle misure.



$x_m \pm 1\ \sigma$

Se abbiamo delle misure distribuite in maniera casuale e centrate attorno al loro valor medio, *la deviazione standard è la stima migliore dell'errore con cui si può conoscere il valore vero della grandezza misurata partendo* ***da una singola misura .***

Errori di misura (2)

- Nell'es. (adesso indico il v.m. con la sottolineatura)
  $\underline{t} = (\Sigma_{i=1,N}\ t_i)/N = (\Sigma_{i=1,4}\ t_i)/4 = (t_1+t_2+t_3+t_4)/4 = 10.62$ s
  $\sigma = \sqrt{[\Sigma_{i=1,N}(t_i-\underline{t})^2]/(N-1)} = \sqrt{[\Sigma_{i=1,4}(t_i-\underline{t})^2]/3} = 0.12$ s
  $\Delta t = \sigma/\sqrt{N} = \sigma/\sqrt{4} = 0.06$ s
- Sinteticamente, valor medio ed errore q.m. sulla media
  $t_{caduta} = \underline{t} \pm \Delta t = (10.62 \pm 0.06)$ s
  (r.m.s. = root mean square ≈ q.m. = quadratico medio)
- N.B. l'errore è dato con una sola *cifra significativa;* l'*errore assoluto* Δt è una grandezza dimensionata con unità di misura s, che fissa il n. di cifre del risultato; l'*errore relativo*
  $\delta = \Delta t/\underline{t} = 0.006 = 0.6/100 = 0.6\%$
  è invece un numero puro (ci indica la precisione della misura: più piccolo = misura più precisa)

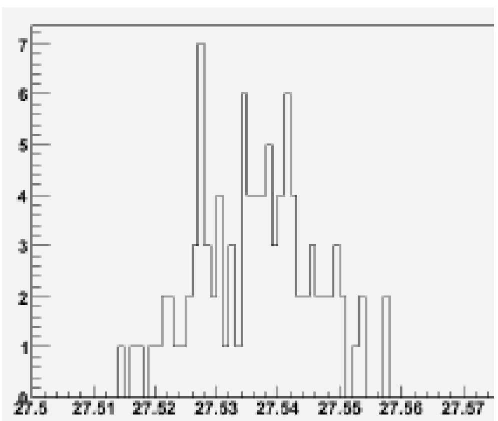
Verso un'interpretazione probabilistica

Qual è la probabilità che il valore vero si trovi nell'intervallo **valore più probabile ± errore ?**

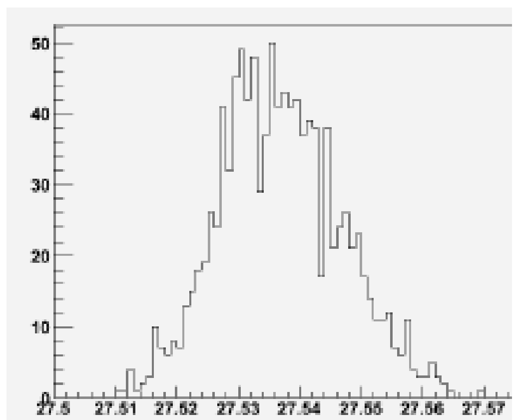
Osservazione:

Se le **misure** sono **casuali** e **indipendenti fra loro**

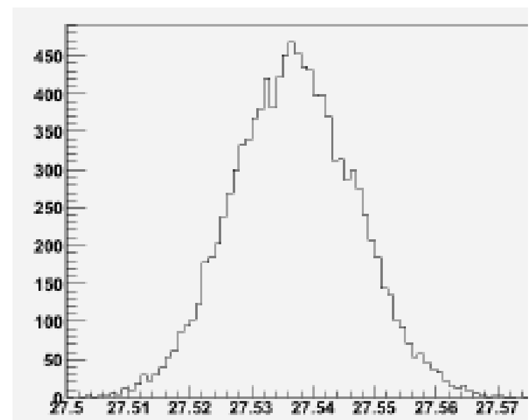
⇨ l'**istogramma di frequenza** tende ad assumere forma a campana...



100 misure



1000 misure



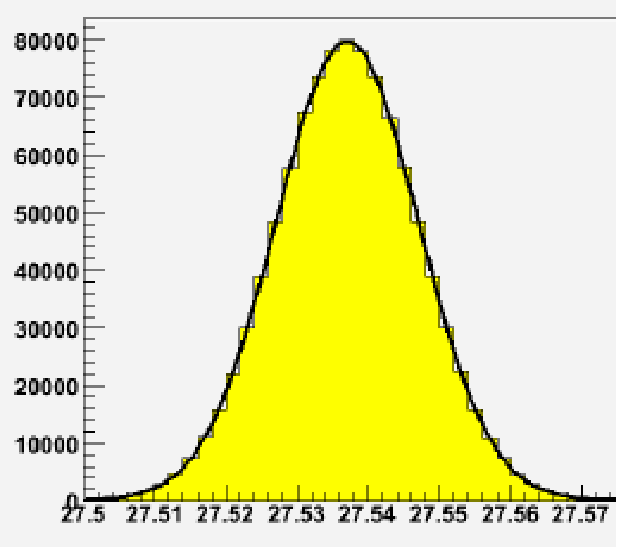
10000 misure

…centrata sul valor medio

…con larghezza dell'ordine della deviazione standard

Funzione di Gauss

…cioè secondo la **distribuzione normale** (o **di Gauss** o **gaussiana**)



$$G(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

con:

N = numero di misure

μ = valor medio

σ = deviazione standard

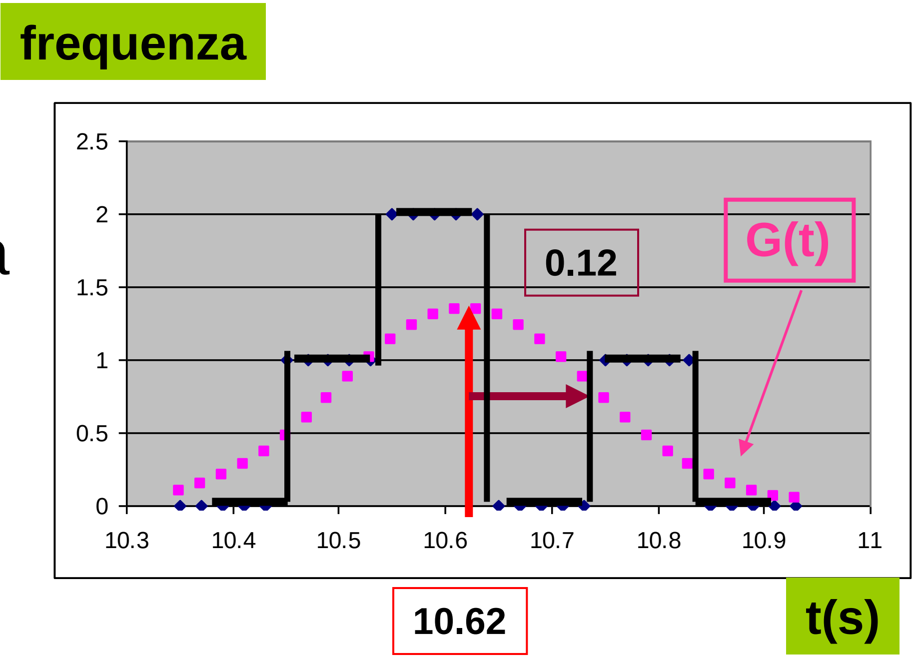
<u>Teorema del limite centrale :</u>

La distribuzione della *somma* di un numero elevato di variabili casuali indipendenti tende a distribuirsi *normalmente*, cioè una **distribuzione normale** avente come **μ** la somma dei valori medi delle misure e come $\boldsymbol{\sigma}^2$ la somma delle varianze delle misure.

Errori di misura (3)

- La distribuzione delle misure (per N → grande) può essere approssimata dalla gaussiana

$$G(t) = \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(t-\underline{t})^2}{2\sigma^2}\right]$$



Interpretazione probabilistica: nell'intervallo $\underline{t}$-σ(2σ) e $\underline{t}$+σ(2σ) è compreso il 68.3% (95.4%) dell'area della gaussiana → la probabilità di trovare un valore di una successiva misura nell'intervallo $\underline{t}$-σ(2σ) e $\underline{t}$+σ(2σ) è 68.3% (95.4%) etc.

- Per la media l'intervallo è $\underline{t}$-nΔt e $\underline{t}$+nΔt con lo stesso significato

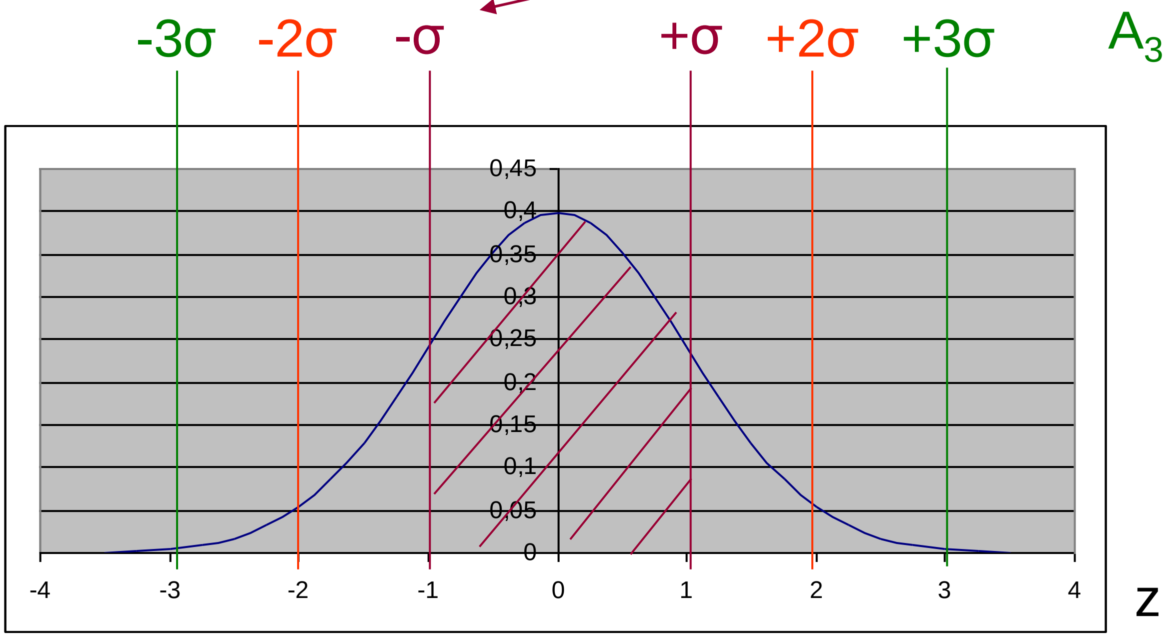
$\underline{t}$±Δt	P = 68.3%
$\underline{t}$±2Δt	P = 95.4%
$\underline{t}$±3Δt	P = 99.7%

La distribuzione normale standardizzata(*)

- se poniamo $(x-\mu)/\sigma = z$, la distribuzione di Gauss si potrà scrivere in forma standardizzata come

$$G(z) = (1/\sqrt{2\pi})\,\exp(-z^2/2)$$

A_1 = 68.3% di area tot.
A_2 = 95.4%
A_3 = 99.7%



$$A_n = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-n}^{n} \exp(-z^2/2)\, dz \qquad A_\infty = 1 = 100\%$$

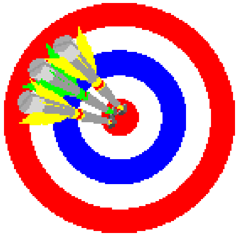
(*) facoltativo, ma utile

Errori di misura (4)

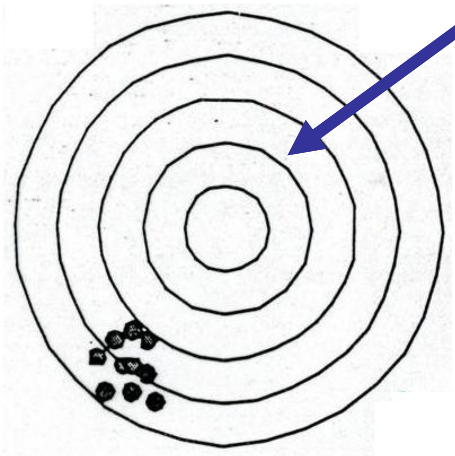
- Oltre agli errori casuali o statistici vi sono gli errori sistematici, ad es. errori di calibrazione, errori di parallasse etc. – in questo caso si può parlare di accuratezza, si può fare un tiro al bersaglio ben raggruppato ma non al centro del bersaglio: serie precisa ma non accurata etc. le cose non migliorano aumentando il numero di tentativi
- Se gli errori casuali sono piccoli rispetto alla sensibilità dello strumento di misura, la lettura sarà sempre la stessa, anche in questo caso non serve aumentare il numero di misure, l'errore è dato dalla sensibilità dello strumento (per es. metà della cifra meno significativa leggibile)

Precisione e accuratezza

Es.: tiro al bersaglio

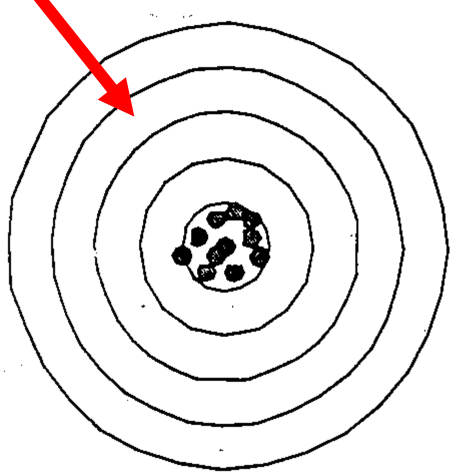


mira: precisa, non accurata
errore casuale piccolo
" sistematico grande

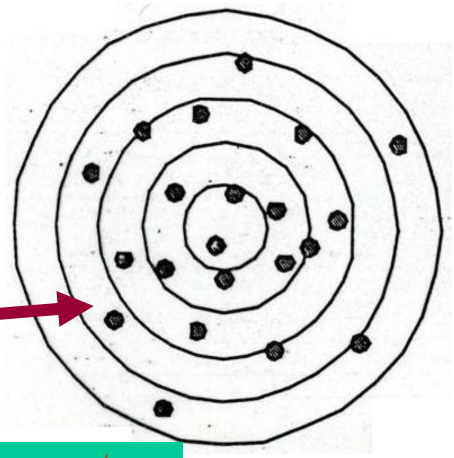


l'err. sistem. può essere corretto

mira: precisa, accurata
errore casuale piccolo
" sistematico piccolo



mira: non precisa, accurata
errore casuale grande
" sistematico piccolo



basta insistere (~1/√n)

IV possibilità ?

Notazione scientifica e cifre significative

- In seguito alla scelta dell'unità di misura potremo avere grandezze con valori molto più grandi (piccoli) di 1 ad es. sono scomode da scrivere

  $\lambda_D = 0.000000589$ m (riga del Na, giallo)

  $d_{TS} = 149600000000$ m (<d> terra-sole)

- Si usa la notazione scientifica separando le cifre significative dalla potenza di 10 (ordine di grandezza), si scrive la cifra più significativa ≠ 0 (quella che corrisponde alla potenza di 10 più elevata) prima del **.** (punto) e le altre cifre significative dopo il **.**

  $\lambda_D = 5.89 \times 10^{-7}$ m (3 cifre significative)

  $d_{TS} = 1.4960 \times 10^{11}$ m (5 cifre significative)

NB lo 0 indicato a dx è significativo

Notazione scientifica e cifre significative (2)

- contare gli zeri è perverso (specie quando sono molti) e produce errori di ordini di grandezza (specie quando sono molti), molto più gravi degli errori sulla 3a cifra significativa – assumendo uno stipendio mensile di 4 cifre, è preferibile subire una riduzione di 10 E o di un fattore 10?
- usate la notazione scientifica quando serve – è inutile scrivere $2.36 \cdot 10^0$ visto che $n^0 = 1 \ \forall n$
- ricordate che però somme/sottrazioni si fanno in colonna $3.45 + 8.32 \cdot 10^{-1} = 34.5 \cdot 10^{-1} + 8.32 \cdot 10^{-1} = 42.82 \cdot 10^{-1} = 4.282$

Cifre significative (3)

- Ad es. il valore del numero di Avogadro è misurato con grande precisione

  $N_A = (6.0221415 \pm 0.00000010) \times 10^{23}$ moli^{-1}

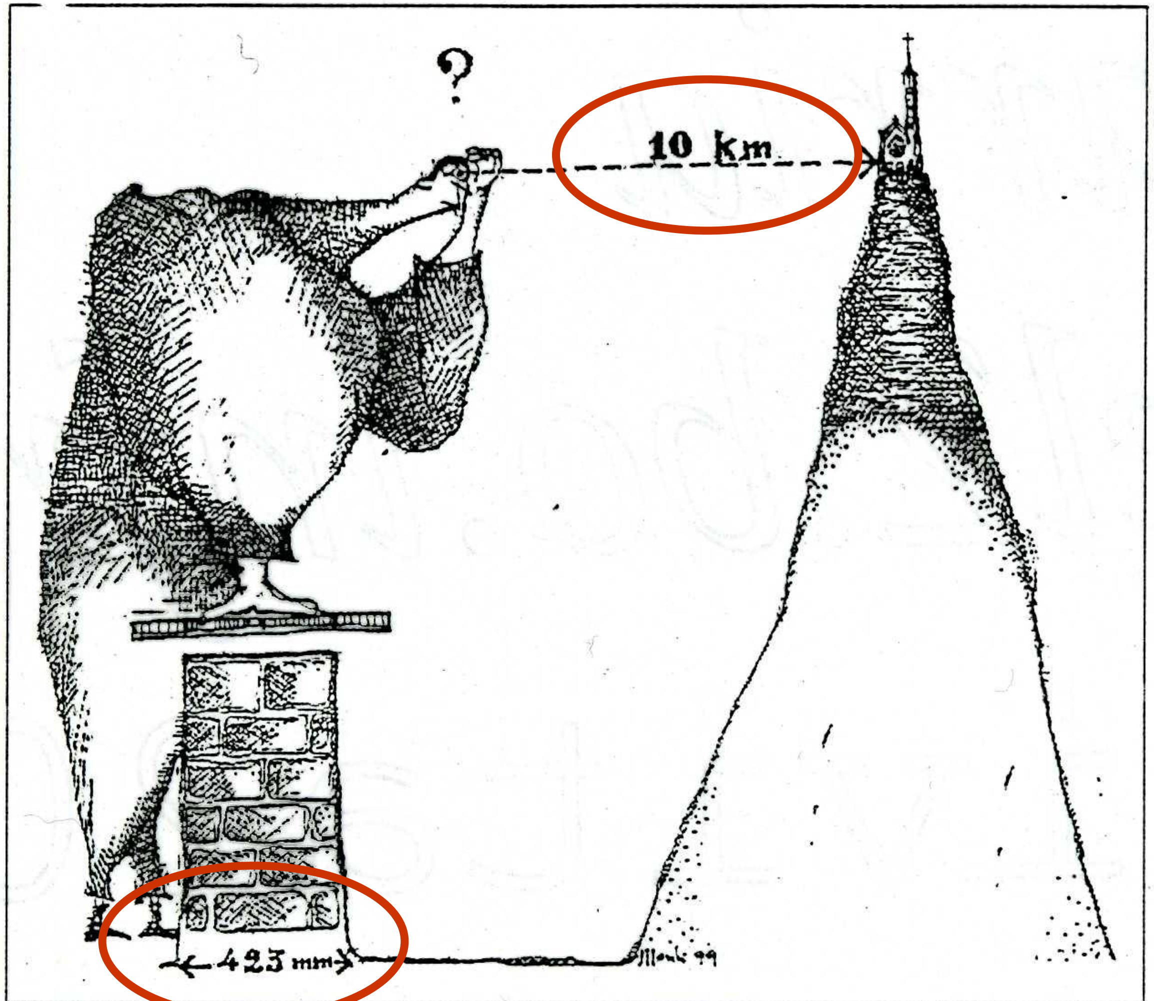
  cioè è noto/misurato con 7 cifre significative (con un errore relativo di 0.17 parti per milione o ppm) quindi scriverlo con 10 o più cifre non ha senso fisico – posso sempre però arrotondarlo per es. a sole 4 cifre, scelgo le prime 4 a sx: 6.022×10^{23} etc. – una scrittura equivalente è 0.6022×10^{24}

- Negli esercizi di fisica normalmente i dati sono forniti con 3 o 4 cifre significative, quindi non è sensato dedurne risultati con un numero di cifre maggiore – NB inoltre, in generale, combinando vari numeri noti con una certa precisione il risultato ha una precisione peggiore
- => nella soluzione degli esercizi si chiedono i risultati (se numeri reali) con 3 cifre significative

Cifre significative (4)

NB se si sommano grandezze di precisione diversa, ***la meno precisa domina l'errore*** (e tutte le cifre della grandezza più precisa risultano illusorie/inutili)

(10±1)km+(423±1) mm = (10±1) km



.. (10 ± 1) km + (423 ± 1) mm = (10.000423 ± 1) km:

... le cifre successive a quella su cui cade l'errore non hanno alcun significato!

Appendice sull'uso della calcolatrice (*)

Supponiamo di fare una divisione con la calcolatrice tascabile:

$$\frac{1.03}{1.01} = 1.019801980....?$$

(con la calcolatrice del PC ottenete ancora più cifre, ad es. 29). Sarebbe sensato partendo da numeri conosciuti con 3 cifre fabbricarne uno di 10 (o più) cifre? In realtà dei due numeri non conosciamo la 4a cifra, possiamo solo dare un intervallo

$$\frac{1.025 \div 1.035}{1.005 \div 1.015} = 1.0098.... \div 1.0298.... = 1.01 \div 1.03$$

quindi il risultato deve essere arrotondato al massimo a 3 cifre, 1.02 corentemente con la precisione iniziale, $1/1.03 \sim 10^{-2}$

– la calcolatrice non può essere una fabbrica di cifre: una operazione aritmetica non aumenta in genere la precisione

(*) facoltativo

Grandezze fondamentali e derivate

- Una volta definite operativamente alcune grandezze relative ai fenomeni di interesse, le altre grandezze possono essere definite in funzione delle prime – ad es. $v = s/t$
- Si distingue quindi fra grandezze fondamentali (nel minor numero possibile/conveniente) e grandezze derivate
- Le definizioni fanno sì che la scelta di quali siano le grandezze fondamentali è arbitraria
- In meccanica bastano 3 grandezze fondamentali (ad es. lunghezza [L], tempo [T], massa [M])

Le grandezze fondamentali della meccanica: L, T, M

- lunghezza – non località, non coincidenza: distanza fra due punti; si misura ad es. con una riga graduata etc.; unità: metro (m), cm, ...
- tempo – non simultaneità: si misura ad es. con un fenomeno periodico, orologio etc.; unità: secondo (s), minuto, ore (h), ...
- massa – quantità di materia di un corpo, inerzia del corpo rispetto alle cause del moto; si misura ad es. con una bilancia etc.; unità: grammo (g), chilogrammo (kg), tonnellata (t), ...

Unità di misura delle grandezze fondamentali (*)

- metro, unità di misura delle distanze – a partire dal 1983, 1 m = distanza percorsa dalle luce nel vuoto in 1/299792458 s
- secondo, unità di misura dei tempi – 1 s = tempo necessario per 9.192631770 x 10^9 vibrazioni di una particolare riga dell'atomo del ^{133}Cs [1 giorno solare medio = 86400 s]
- chilogrammo, unità di misura della massa – 1 kg = 5.0188 x 10^{25} atomi di ^{12}C [1 mole = 12 g ^{12}C, contiene N_{Av} atomi] → in futuro, Si

(*) facoltativo

Sistemi di unità di misura

- Scelte le grandezze fondamentali si devono scegliere le loro unità di misura: quelle delle grandezze derivate sono determinate in conseguenza → sistemi di unità di misura
- In meccanica si usa MKS (m, kg, s), ma si usa anche CGS (cm, g, s) e sistema degli ingegneri
- Nella CE dal 1978 è in vigore il Sistema Internazionale (SI) ossia 7 grandezze e relative unità (m, kg, s, A, K, cd, mole)
- a queste unità vanno aggiunti i radianti (rad) per gli angoli piani e gli steradianti (srad) per quelli solidi
- NB esistono poi numerose grandezze usate dalle nostre parti comunemente che non fanno parte di alcun sistema precedente (senza poi andare negli US)

Sistemi di unità di misura (2)

- Riassumendo:

  Grandezze fondamentali => Scelta delle unità di misura fondamentali => Sistemi di unità di misura

- Ad es. per la meccanica

	spazio:	m	$= 10^2$ cm
MKS	tempo:	s	
	massa:	kg	$= 10^3$ g
	spazio	cm	$= 10^{-2}$ m
CGS	tempo	s	
	massa	g	$= 10^{-3}$ kg

$l = 5.1\ \text{m} = 5.1 \cdot 10^2\ \text{cm}$

$s^{-1} = 2\ \text{m}^{-1} = 0.02\ \text{cm}^{-1}$

etc.

conversione di unità :
si moltiplica per

1 = 100 cm/1 m
(numeratore)
per convertire m → cm

1 = 1 m/100 cm
per $\text{m}^{-1} \rightarrow \text{cm}^{-1}$
(denominatore, 1/m)

Quello che la fisica non è (*)

- non tenta di dare risposte a domande di tipo ontologico:
  - cos'è il tempo, lo spazio, la massa, la carica elettrica ...?

  => le questioni di tipo filosofico esulano dal campo della fisica
- non è un catalogo di casi:
  - tutte le mele che cascano, tutte le stelle di una certa magnitudo, tutte le molecole in un volume di gas ...

  => (poche) leggi generali che inglobano moltissimi/tutti i casi conosciuti
- non è una descrizione storica delle scoperte in fisica

  => le scoperte sono stimolate dalla tecnologia/scoperte precedenti
- non è affatto un puro esercizio matematico

  => usa il linguaggio matematico per esprimere sinteticamente misure, relazioni, leggi

(*) facoltativo

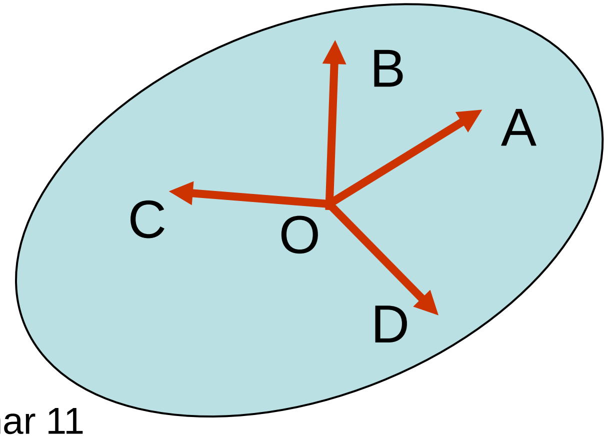
Grandezze scalari e vettoriali

- grandezze quali temperatura, volume, massa, pressione etc. sono **scalari**: completamente specificate da un numero ±vo – per esse valgono le regole dell’aritmetica ordinaria, ±: solo se hanno le stesse dimensioni, x e /: liberamente
- grandezze quali forza, quantità di moto, spostamento etc. sono **vettoriali**: occorre specificare la direzione (e il verso) oltre al modulo o intensità – per esse valgono regole speciali
- ad es., per fornire informazioni stradali non basta la distanza (quantità scalare)

A,B,C,D sono a distanza uguale da O, ma gli spostamenti sono diversi

OA ≠ OB ≠ OC etc.

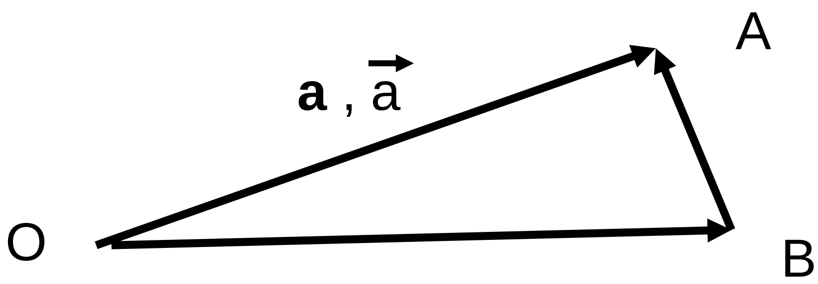
|OA| = |OB| = |OC| etc.

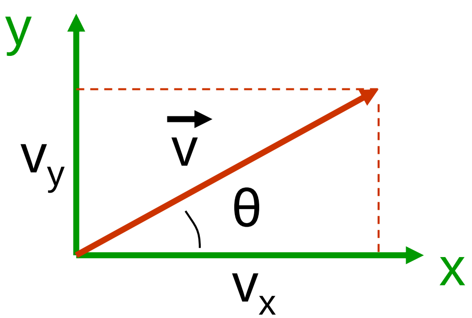


Dalla stazione a Via Angherà: spostamenti (→) per arrivarci

Vettori (in **grassetto** o con la → sopra)

- vettori nel piano: 2 componenti (2 numeri, ±vi)
- [vettori nello spazio: 3 componenti (3 numeri, ±vi)]
- v. in una dimensione: 1 componente (1 numero, ±vo)





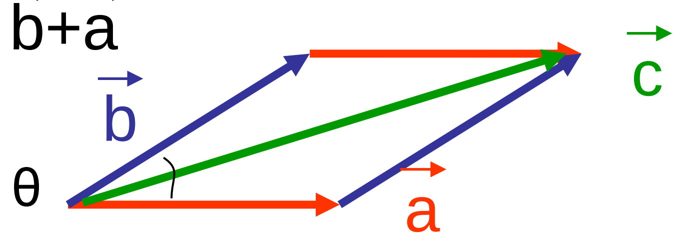
- vettori (in alternativa)
  - modulo (o valore assoluto): |**a**| , $|\vec{a}|$, a
  - direzione e verso: nel piano cartesiano θ

NB le componenti sono ±ve; *il modulo è sempre +vo*

Operazioni con i vettori

1. somma/differenza di vettori omogenei

- $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

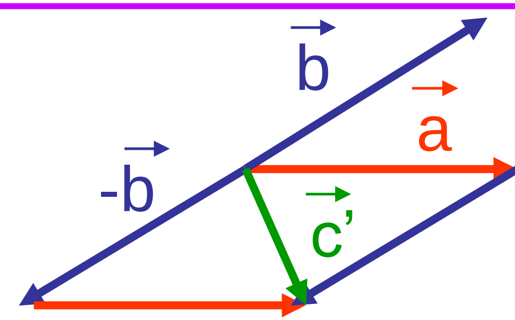


Regola del parallelogramma

- il vettore $\vec{c}$ è equivalente ad $\vec{a}$ seguito da $\vec{b}$ o viceversa (evidente nel caso di uno spostamento)
- modulo quadro del risultante (Teorema di Carnot)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180°-\theta) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$$

- $\vec{c}' = \vec{a} - \vec{b}$

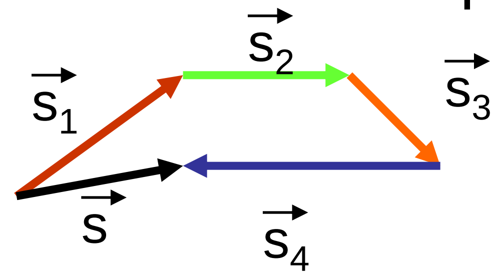


Operazioni coi vettori (2)

– in generale il <u>risultante</u> di più vettori chiude la poligonale

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3 + \vec{s}_4$$

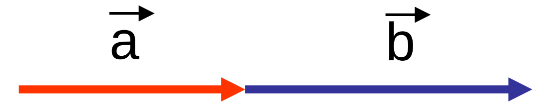
etc.



– casi particolari

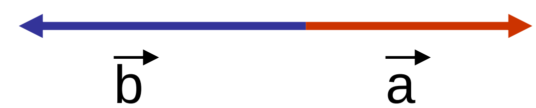
- vettori collineari paralleli

  $c = a + b$; $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$



- vettori collineari antiparalleli

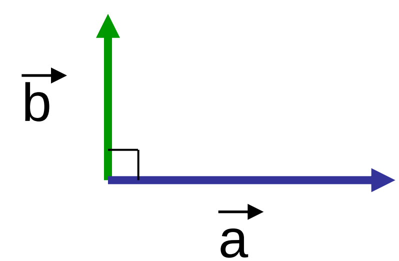
  $c = |a – b|$; $c^2 = a^2 + b^2 – 2ab$



- vettori ortogonali

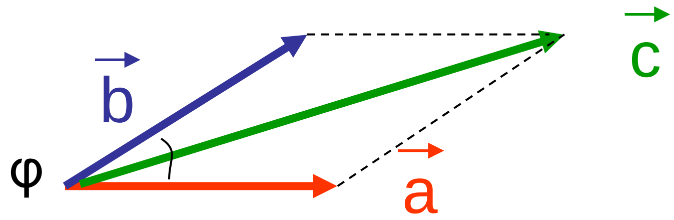
  $c^2 = a^2 + b^2$; $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$

  (Teorema di Pitagora)



Operazioni coi vettori (3)

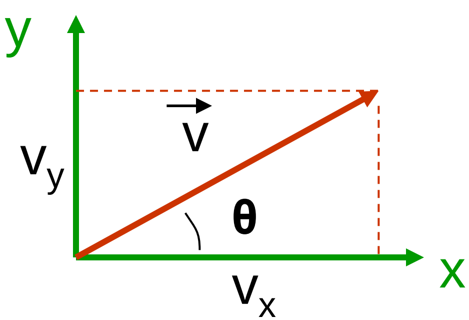
- 2. <u>decomposizione di vettori</u>
  - $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono le componenti di $\vec{c}$ secondo le relative direzioni



  - componenti cartesiane

    $v_x = v \cos\theta$

    $v_y = v \sin\theta$



  - componenti polari

    $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

    $tg\theta = v_y/v_x$

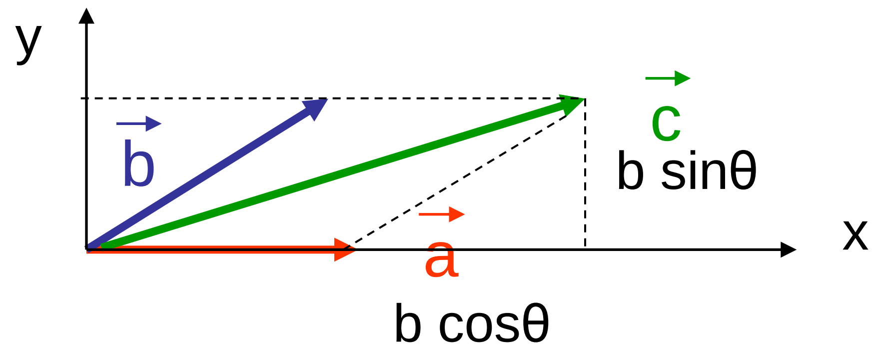
Operazioni coi vettori (4) (*)

– es.: somma in componenti di $\vec{a}$ e $\vec{b}$, scelgo $\vec{a}$ secondo x per semplicità

$a_x = a$; $a_y = 0$

$b_x = b \cos\theta$;

$b_y = b \sin\theta$



=> $c_x = a_x + b_x = a + b \cos\theta$

$c_y = a_y + b_y = b \sin\theta$

=> $c^2 = c_x^2 + c_y^2 = a^2 + b^2\cos^2\theta + 2ab\cos\theta + b^2\sin^2\theta$

$= a^2 + b^2 + 2ab \cos\theta$

(come già trovato, NB $\forall\theta$, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$)

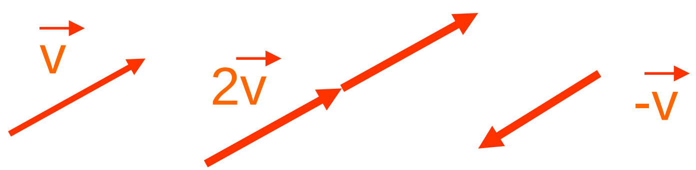
(*) facoltativo

Operazioni coi vettori (5)

- 3. <u>prodotto di un vettore per uno scalare</u>

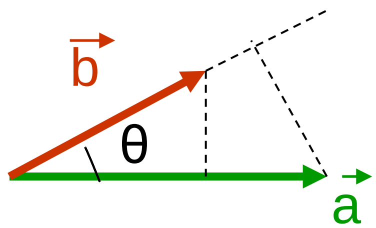
  $\vec{q} = m\vec{v}$; $q = |m\vec{v}| = |m||\vec{v}| = |m|v$

  stessa direzione, il verso dipende dal fatto che lo scalare sia +vo o –vo

  es. 

- 4. <u>prodotti fra vettori</u>

  – **prodotto scalare** o interno

  $\boxed{c = \vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

  $= (a\cos\theta)b = a_b b = a(b\cos\theta) = ab_a$

  componente di a nella direzione b moltiplicata per b e viceversa

  nullo per
  θ = 90º, 270º

Operazioni coi vettori (6)

- **prodotto vettoriale** o esterno

  $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = - \vec{b} \wedge \vec{a}$

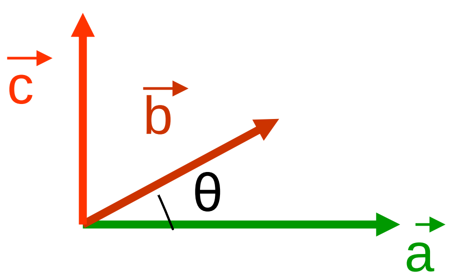
  $\boxed{c = | \vec{a} \wedge \vec{b} | = ab \sin\theta}$

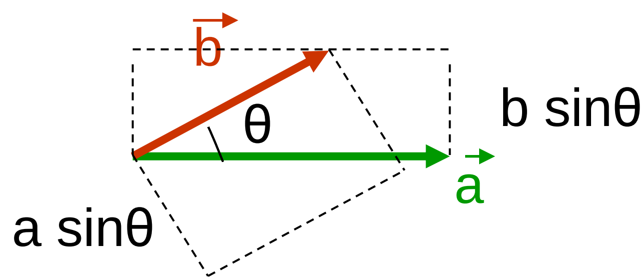
  misura l’area del parallelogramma di lati a,b

  $c = (a \sin\theta)b = a(b \sin\theta)$

  $\vec{c}$ è perpendicolare al piano formato da $\vec{a}$ e $\vec{b}$

nullo per
$\theta = 0^{\circ}, 180^{\circ}$





($\vec{c}$ vede $\vec{a}$ ruotare su $\vec{b}$ in senso antiorario)

Fine dell’introduzione

ἀγεωμὲρητος
μηδεὶς
εἰσίτω

Non entri chi è
digiuno di geometria