



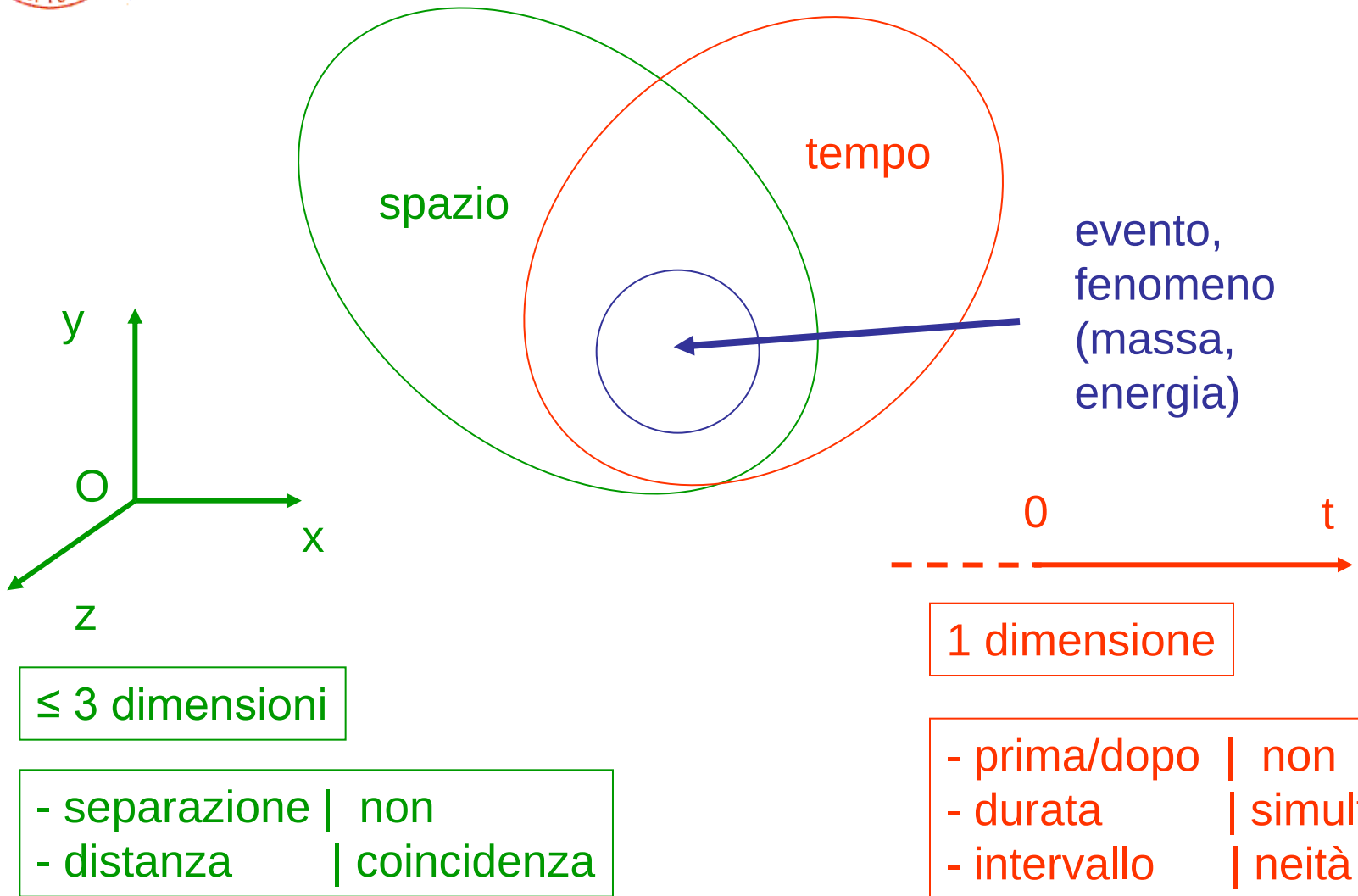
Meccanica



Corso di Fisica per Farmacia Rimini
AA2010/11



Preliminari: spazio & tempo





Tempo (2)



- tempo, t , trascorso a partire da un'origine dei tempi (arbitraria, comoda), +vo o -vo, futuro o passato – noi andiamo solo verso il futuro



(non esiste il tempo assoluto, il big bang, la nascita dell'universo, ha avuto luogo $\approx 13.7 \times 10^9$ anni fà, Edwin Hubble, 1929)

- intervallo di tempo, $\Delta t = t_2 - t_1$, fra due eventi, del tutto svincolato dall'origine dei tempi (matematicamente è quasi lo stesso se si pone $t_1 = 0$ e $t_2 = t$)



Punto materiale (P)

- estensione piccola rispetto al laboratorio
- struttura influente ai fini del movimento
- es.
 - stella, pianeti rispetto al sistema solare
 - sasso rispetto alla terra/Aula Clodia 5
 - molecola in un volume di gas (ad es. 1 litro)
 - etc.
- NB1 il p.m. è differente da (non è identico a) un punto geometrico
- NB2 il fatto che sia materiale (m) sarà rilevante poi nella dinamica

Meccanica 1a parte

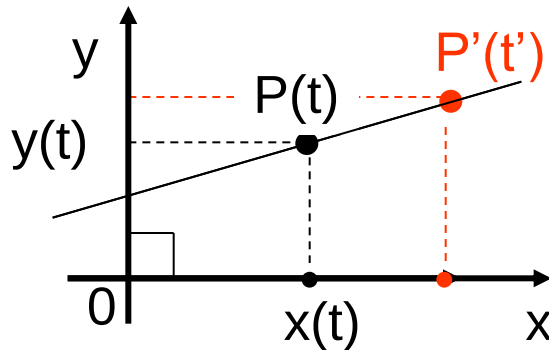


Cinematica



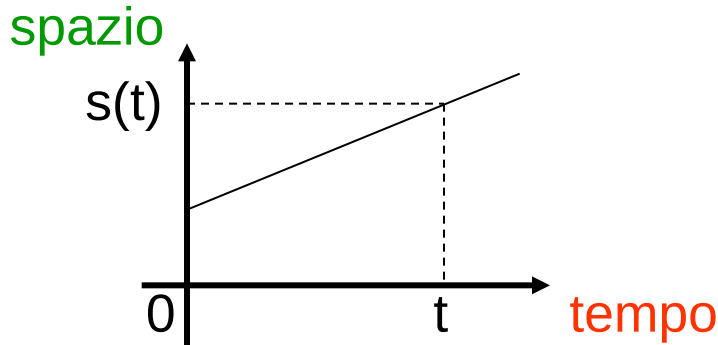
Sistemi di riferimento, eq. oraria

- il moto è relativo => sistema di riferimento



(P occupa varie posizioni nel piano cartesiano al passare di t ;
1 dimensione: x occupa varie posizioni lungo l'asse x al passare di $t \Rightarrow x = x(t)$)

- spazio percorso nel tempo, eq. oraria

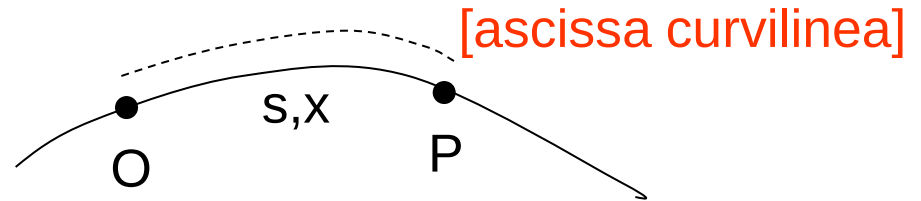
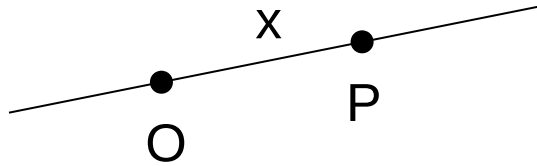


se ci interessa la distanza percorsa in un certo tempo indipendentemente dalla direzione



Moto in 1 dimensione

- in questo caso conta solo il verso +vo o -vo dello spostamento nel tempo => possiamo usare quantità scalari (non cambia la direzione)
- due possibilità: **moto lungo una retta, x**, o **moto lungo una traiettoria (curva) fissata, s o x**



- si definisce
velocità media = $\frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato a percorrerlo}}$

$$\boxed{v_m = \frac{s}{t}} \quad \text{o} \quad \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{o} \quad \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$



Velocità

- la velocità istantanea è ($\Delta t \rightarrow 0$, uguale a $t_2 \rightarrow t_1$)

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{dx}{dt}$$

in generale

$x = x(t)$

$v = v(t)$

- le dimensioni di v sono

$$[v] = [s/t] = [st^{-1}] = [LT^{-1}]$$

- le unità di misura nel SI sono m/s e nel CGS cm/s – altra unità usata è km/h

6 m/s = ? cm/s; si moltiplica per $1 = 10^2$ cm/m

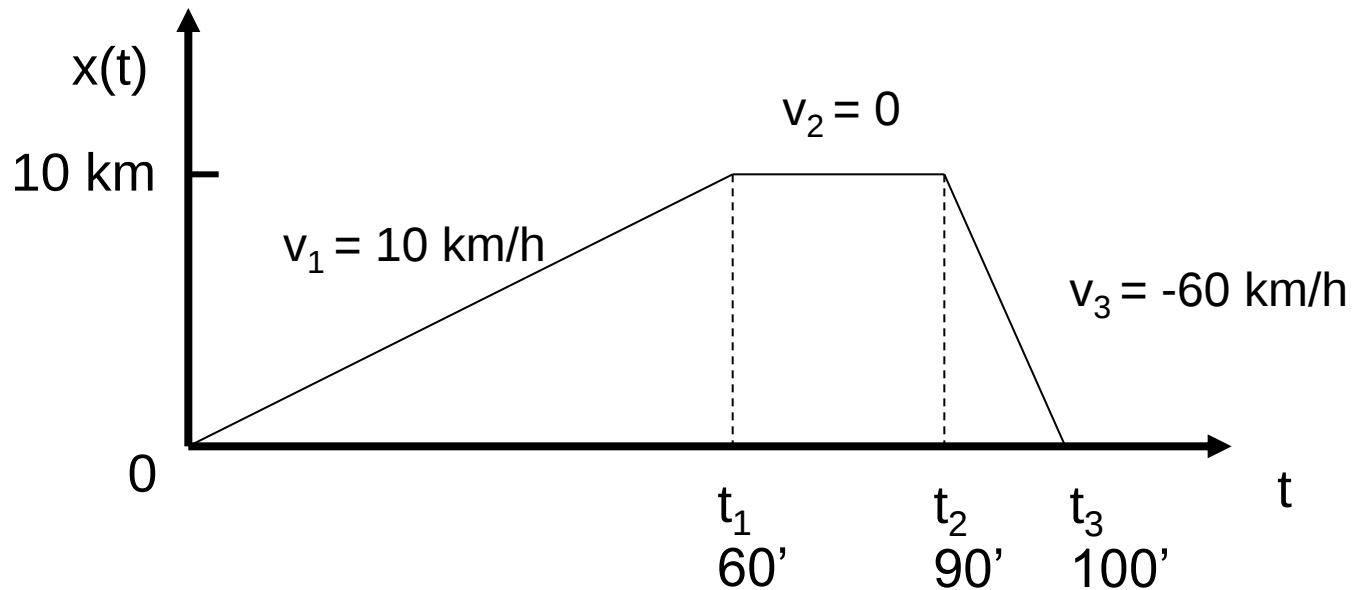
$$6(\cancel{\text{m/s}}) \cdot 10^2 \text{ cm}/\cancel{\text{m}} = 6 \cdot 10^2 \text{ cm/s}$$

se devo convertire un'unità
a numeratore la metto a
denominatore nel rapporto
unitario etc.; NB $s^{-1} \rightarrow s^{-1}$



Velocità (2)

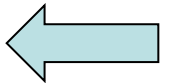
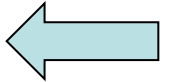
- $2.5 \text{ m/s} = ? \text{ km/h}$: $\mathbf{1} = 1 \text{ km}/10^3 \text{ m}$ $\mathbf{1} = 3.6 \cdot 10^3 \text{ s/h}$
 $2.5 \cancel{\text{m/s}} \cdot 3.6 \cdot 10^3 \cancel{\text{s/h}} \cdot 1/10^3 \cancel{\text{km/m}} = 2.5 \cdot 3.6 \text{ km/h} = 9.0 \text{ km/h}$
- **NB in generale: v . media $\neq$ media delle velocità**
(se i Δt sono diversi), ad es.





Velocità (3)

- $v_m = [x(t_3) - x(0)] / (t_3 - 0) = (0 - 0) / 100' = 0$
- $\underline{v} = (\sum_{i=1,3} v_i) / 3 = (10 + 0 - 60) / 3 \text{ km/h} = -17 \text{ km/h}$
- in formule (*)

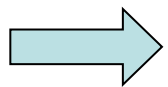


$$v_m = (\sum_{i=1,n} \Delta x_i) / (\sum_{i=1,n} \Delta t_i) = (\sum_{i=1,n} v_i \Delta t_i) / (\sum_{i=1,n} \Delta t_i)$$

quindi solo se i Δt_i sono tutti $= \Delta t$, si ha

$$\sum_{i=1,n} \Delta t_i = \sum_{i=1,n} \Delta t = n \Delta t \quad \text{e}$$

$$\sum_{i=1,n} v_i \Delta t = \Delta t \cdot \sum_{i=1,n} v_i$$



$$v_m = \Delta t \cdot (\sum_{i=1,n} v_i) / (n \Delta t) = (\sum_{i=1,n} v_i) / n = \underline{v}$$

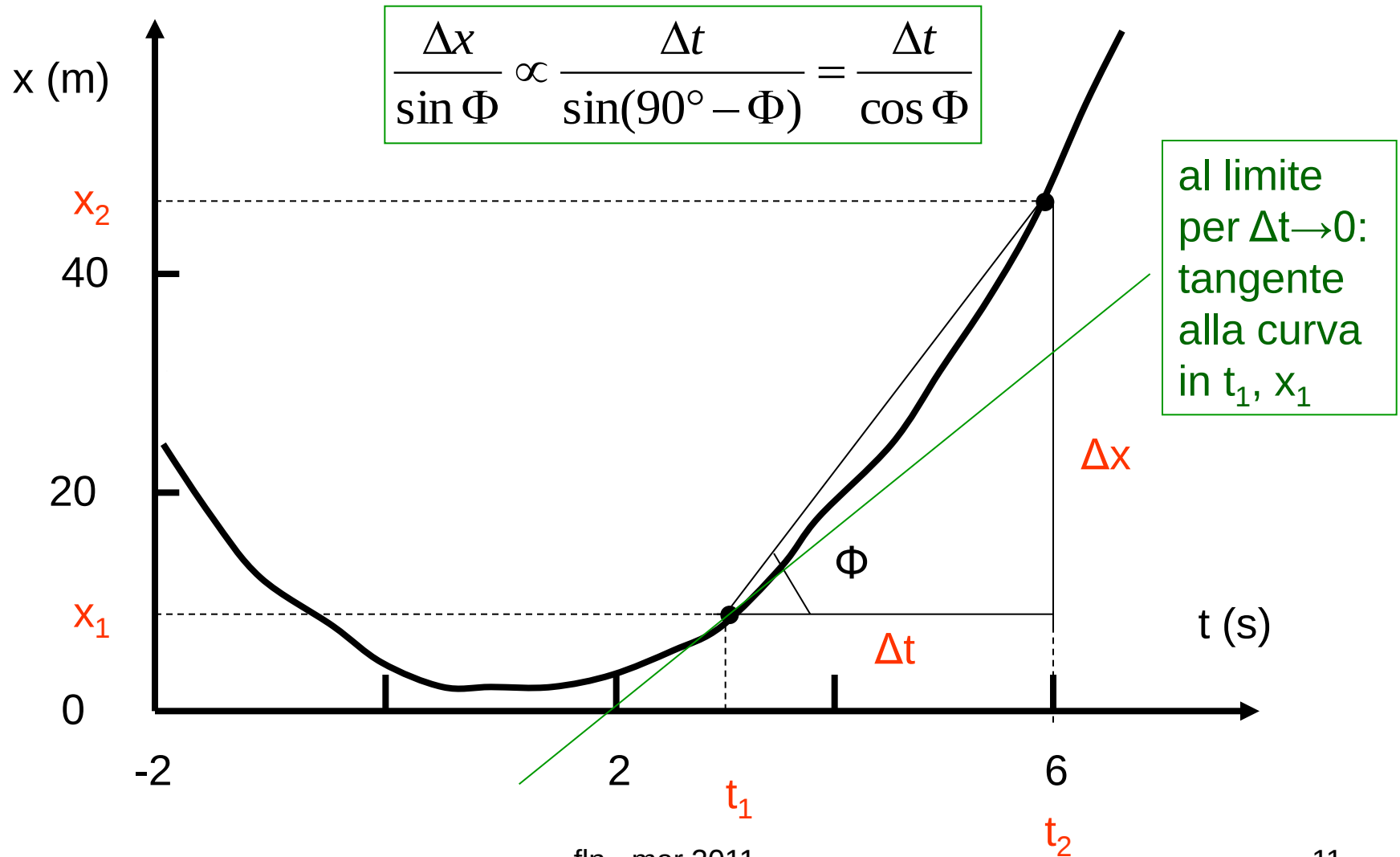
- se si conoscono Δx_i , $v_i \Rightarrow \Delta t_i = \Delta x_i / v_i$ e si ha

$$v_m = (\sum_{i=1,n} \Delta x_i) / (\sum_{i=1,n} \Delta x_i / v_i)$$

(formula utile per gli esercizi)



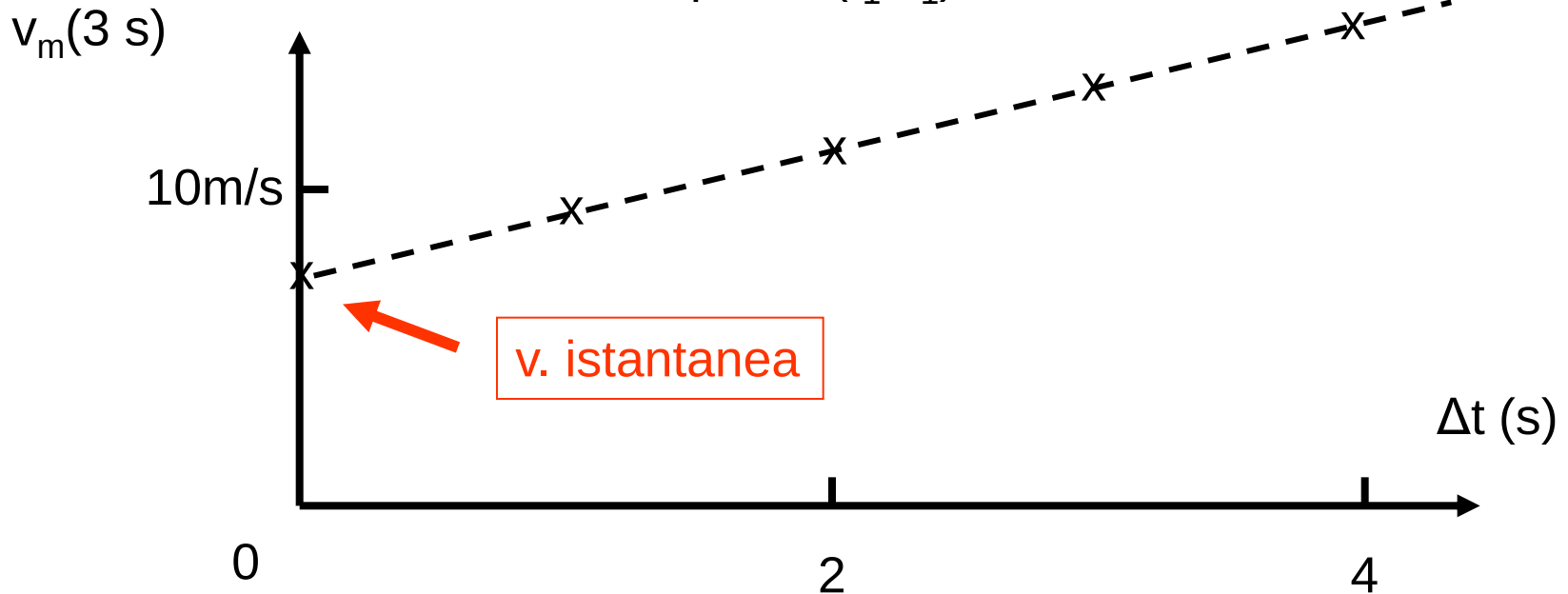
Significato geometrico di v_m e di v istantanea





Significato geometrico di v_m e di v istantanea (2)

- data la curva $x = x(t)$ (lucido precedente)
 - $v_m = \Delta x / \Delta t \sim \text{tg } \Phi$ dà la direzione della corda tirata fra i punti (t_1, x_1) e (t_2, x_2)
 - $v(t_1) = dx/dt|_{t_1}$ dà la direzione della tangente alla curva nel punto (t_1, x_1)





Accelerazione media e istantanea

- in generale $v = v(t)$, si definisce accelerazione media

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

- e accelerazione istantanea

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

- $[a_m] = [a] = [v/t] = [st^{-1}t^{-1}] = [LT^{-2}]$
- unità SI: m/s^2 CGS: $cm/s^2 = 10^{-2} m/s^2$
- g (accelerazione di gravità) $\approx 9.81 m/s^2 = 981 cm/s^2$



Moto uniforme e uniformemente accelerato

Casi particolari

- moto uniforme (rettilineo o su traiettoria fissa, potrei usare anche x)

$$v_m = v_0 = \text{cost} = \Delta s / \Delta t = (s - s_0) / (t - 0) \quad \text{indipendente da } t$$

$$\Rightarrow \boxed{s = v_0 t + s_0} \quad (*) \quad s = s(t)$$

$$a = 0 \quad \text{infatti } a_m = (v_2 - v_1) / (t_2 - t_1) = (v_0 - v_0) / (t_2 - t_1) = 0$$

- moto uniformemente accelerato

$$a_m = a_0 = \text{cost} = \Delta v / \Delta t = (v - v_0) / (t - 0) \quad \text{indipendente da } t$$

$$\Rightarrow \boxed{v = a_0 t + v_0} \quad (*) \quad v = v(t)$$

capita spesso!
per es. $a_0 = g$

(*) le cost. s_0, v_0 dipendono
dalla scelta dell'origine dei t



Moto uniformemente accelerato (2) (*)

$$\begin{aligned} 1. \quad v_m &= \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \quad \longrightarrow \quad s_2 = s_1 + v_m(t_2 - t_1) \\ 2. \quad a_m &= \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \quad \longrightarrow \quad v_2 = v_1 + a_0(t_2 - t_1) \end{aligned}$$

v varia linearmente $\rightarrow$ prendo $v_m = (v_1 + v_2)/2$ (centro dell'intervallo)

$$s_2 = s_1 + \frac{1}{2}(v_1 + v_2)(t_2 - t_1) = s_1 + \frac{1}{2}(v_1 + v_1 + a_0(t_2 - t_1))(t_2 - t_1)$$

$$s_2 = s_1 + v_1(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}a_0(t_2 - t_1)^2 \quad \text{ora pongo } t_1 = 0 \text{ e } t_2 = t$$

$$s_1 = s(0) = s_0; \quad s_2 = s(t); \quad v_1 = v(0) = v_0; \quad v_2 = v(t)$$

(NB t_1 e t_2 sono qualsiasi)



Moto uniformemente accelerato (3)

➡ $s(t) = s_0 + v_0(t-0) + \frac{1}{2}a_0(t-0)^2$

$$\left\{ \begin{array}{l} s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2 \\ v(t) = v_0 + a_0 t \\ a(t) = a_0 \end{array} \right.$$

dove s_0, v_0 sono spazio percorso e velocità a $t = 0$

Se considero un moto rettilineo unif. acc., userò x (anche come ascissa curvilinea) e senza rifare i passaggi (!)

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2 \\ v(t) = v_0 + a_0 t \\ a(t) = a_0 \end{array} \right.$$



Moto uniformemente accelerato (4)

Se considero la caduta di un grave che parte da fermo **in assenza di attrito**, chiamando $h(t)$ l'altezza rispetto al suolo, ponendo cioè $h(0) = h_0$, poichè $a_0 = -g$ accelerazione di gravità in questo sistema di riferimento, ho

$$\begin{cases} h(t) = h_0 - \frac{1}{2} g t^2 \\ v(t) = -gt \\ a(t) = -g \end{cases}$$

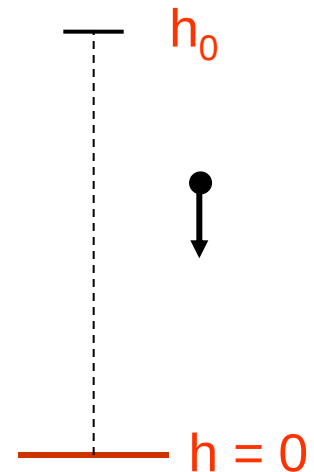
e il grave raggiunge il suolo, $h = 0$, dopo un tempo

$$t = \sqrt{2h_0/g} \quad (\text{da } 0 = h_0 - \frac{1}{2} g t^2)$$

$$h_0 = 55.86 \text{ m}, \theta = 3^\circ 59.4' \rightarrow t = ? \quad \Delta x \text{ alla base} = ?$$

$$t = 3.38 \text{ s} \quad \Delta x = 3.90 \text{ m}$$

fln - mar 2011





Moti in una dimensione

- vario $a = a(t)$ (il più generale)
se $av > 0$ accelerato ($av < 0$ decelerato)
- uniforme $a = 0; v = \text{cost}$
- uniformemente accel. $a = \text{cost} = a_0; v = v(t)$

dalle 2 eq. per $x(t)$ e $v(t)$ si può eliminare il parametro t , per es. dalla 2^a,

$$t = (v(t) - v_0) / a_0$$

e sostituendo nella 1^a

$$x(t) = x_0 + \underbrace{v_0(v(t) - v_0) / a_0}_t + \frac{1}{2} a_0 \underbrace{[(v(t) - v_0) / a_0]^2}_{t^2}$$



Una relazione importante per il moto unif. acc.

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 + \cancel{v_0 v/a_0} - v_0^2/a_0 + \frac{1}{2}(v^2 - \cancel{2v v_0} + v_0^2)/a_0 \\&= x_0 - \frac{1}{2} v_0^2/a_0 + \frac{1}{2} v^2(t)/a_0 = x_0 + \frac{1}{2}(v^2(t) - v_0^2)/a_0\end{aligned}$$

che può essere riscritta

$$2a_0(x(t) - x_0) = v^2(t) - v_0^2$$

valida per **qualsiasi moto uniformemente accel.** –
intervengono esplicitamente solo **lo spazio, la
velocità e l'accelerazione**, per es. si ha

$$\text{→ } v(t) = \sqrt{v_0^2 + 2a_0(x(t) - x_0)} \quad \text{etc.}$$



Derivazione e integrazione

- se conosco $x(t)$ $\longrightarrow$ $v(t) = dx(t)/dt$; $a(t) = dv(t)/dt$
- però nei problemi di meccanica (e non solo) si conosce l'accelerazione $a = F/m$ (vedi 2^a legge della dinamica, $\vec{F} = m\vec{a}$, più avanti)

$\longrightarrow$ bisogna seguire il cammino inverso ed integrare

$$v(t) = \int_0^t a(t)dt; \quad s(t) = \int_0^t v(t)dt$$

(questa operazione è stata fatta “di nascosto” nel ricavare le formule del moto uniformemente accelerato)



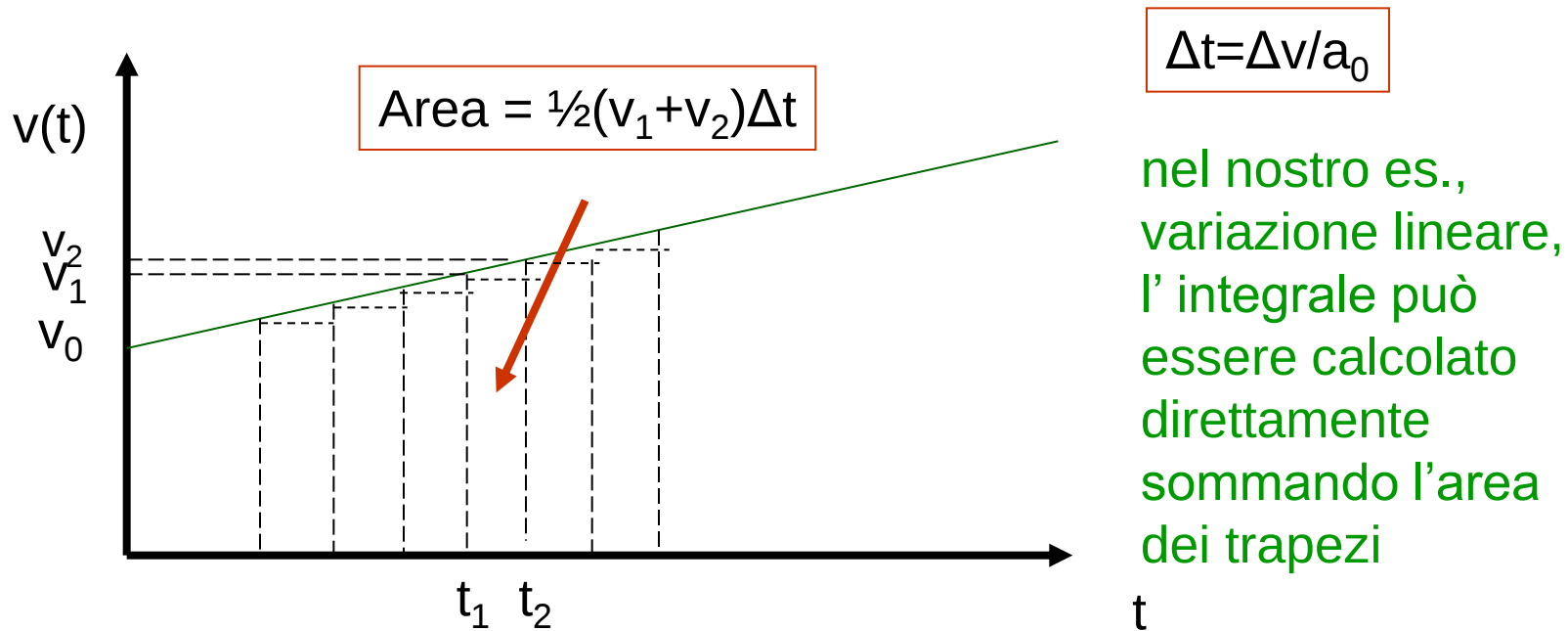
Qualche semplice regola

- la derivata di una costante è zero $(d/dt)\text{cost} = 0$
(**ma anche $\Delta(\text{cost}) = \text{cost} - \text{cost} = 0$!**)
ad es. $dv_0/dt = 0$, $ds_0/dt = 0$ etc.
- una costante può essere portata fuori dal segno di derivazione (e di integrazione)
ad es. $d/dt(\frac{1}{2}a_0t^2) = \frac{1}{2}a_0(d/dt)t^2 = a_0t$ etc.
- la derivata di t^1 è $(d/dt)t = 1t^0 = 1$
ad es. $d(v_0 + a_0t)/dt = 0 + a_0$ etc.
- l'integrale di una costante è una retta di pendenza costante
ad es. $v(t) = \int_0^t a_0 dt = a_0 \int_0^t dt = a_0[t]_0^t = a_0(t-0) = a_0t$
- l'integrale di t^1 è $t^2/2$ etc.



L'interpretazione geometrica dell'integrazione.

- l'integrazione corrisponde al calcolo dell'area sotto la curva descritta dalla funzione – a rigore è la somma delle aree dei rettangoli $v_1(t_1)(t_2-t_1)$ quando $t_2 \rightarrow t_1$ o $\Delta t \rightarrow 0$





Sommario cinematica ad 1 dimensione

- $x(t) \xrightarrow{\text{derivazione}} v(t) \xrightarrow{\text{derivazione}} a(t)$ procedimento diretto
- $a(t) \xrightarrow{\text{integrazione}} v(t) \xrightarrow{\text{integrazione}} x(t)$ procedimento inverso
- NB in dinamica si parte da $\vec{a}(t) = \vec{F}(t)/m$



Moto in 2 (3) dimensioni





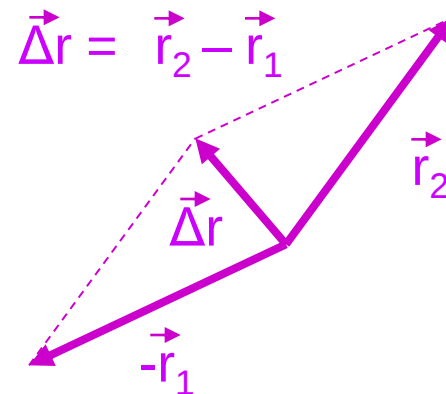
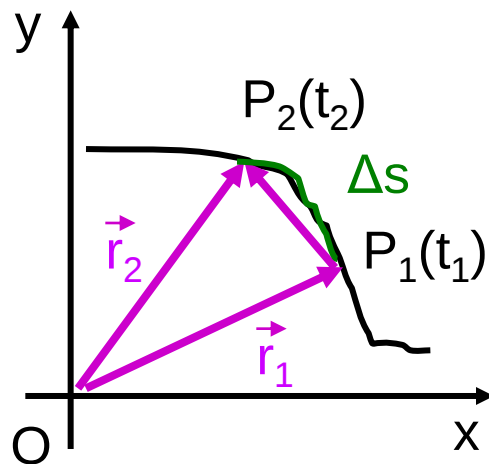
Velocità nel piano

(spostamento)

$\vec{r}$ – raggio vettore

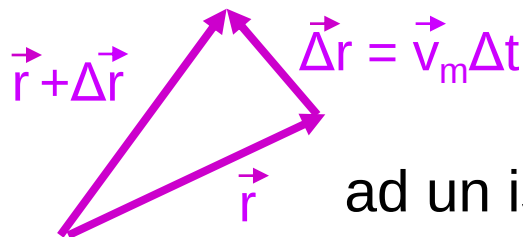
vettore velocità media:

$$\vec{V}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$



vettore velocità istantanea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



ad un istante generico t

il vettore velocità al limite per $\Delta t \rightarrow 0$ (ossia per $t_2 \rightarrow t_1$) risulta *sempre* tangente alla traiettoria (nell'es. in P_1)



Accelerazione nel piano

- $\vec{a}$ nel piano è in generale sia tangenziale che centripeta ($\vec{v}$ in generale varia sia in modulo che in direzione e verso)

- accelerazione media

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

- accelerazione istantanea

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- NB nel moto rettilineo $\vec{v}$ varia solo in modulo e verso (v) $\Rightarrow \vec{a}$ risulta esclusivamente tangenziale (a)



Moti piani - composizione dei movimenti

- $v_0 = 6 \text{ m/s}$; $h = 20 \text{ m}$; $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

$$y_{\text{caduta}} = 0 \text{ m}; \quad x_{\text{caduta}} = ?$$

$$x = v_0 t; \quad y = h_0 - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\rightarrow t_c = \sqrt{2h_0/g} = 2.02 \text{ s} \quad (\text{lo stesso che cadendo da fermo})$$

$$\rightarrow x_c = v_0 \sqrt{2h_0/g} = 6 \cdot 2.02 = 12.1 \text{ m}$$

- barca (nuotatore) vs corrente

o vespa (mosca) vs abitacolo

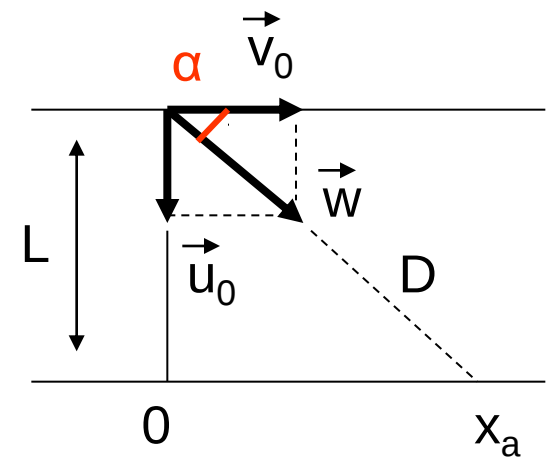
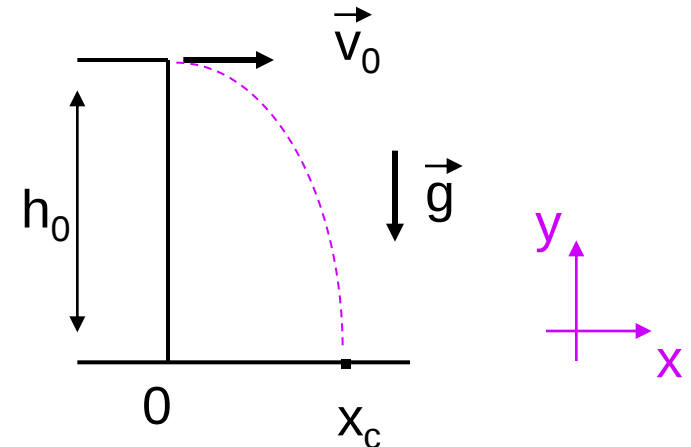
$$\text{attraversam.: } t_a = L/u_0 = D/w = x_a/v_0$$

(lo stesso che senza corrente ($v_0 = 0$))

$$w = \sqrt{v_0^2 + u_0^2} \quad (\text{velocità vista dalla riva (o ciglio della strada)})$$

$$x_a = v_0 t_a = v_0 L/u_0; \quad y_a = 0$$

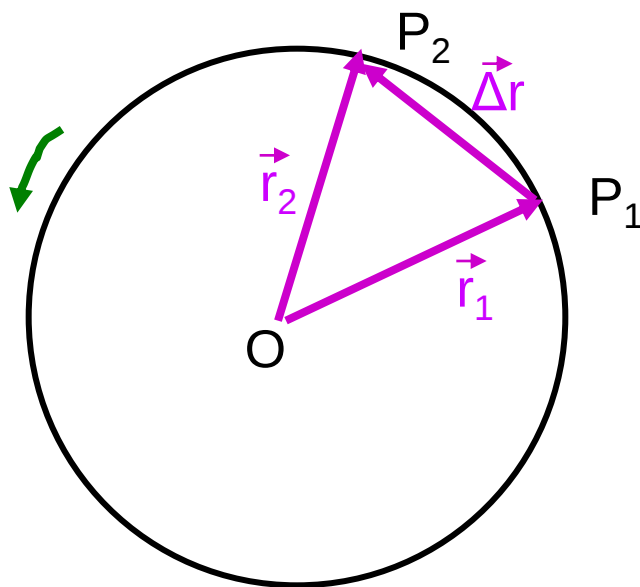
$$= \arctg(u_0/v_0)$$



Moto circolare uniforme

un altro es. di moto piano

- moto circolare: $r = |r| = \text{cost}$
- uniforme/periodico: solo se $v = |v| = \text{cost}$



Il periodo T è il tempo impiegato a fare un giro completo ($r, v = \text{cost}$)

$$T = 2\pi r/v = 1/\nu$$

(frequenza = periodo⁻¹)

La velocità angolare ω è l'angolo per unità di tempo

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu \quad (=v/r)$$

NB ω si misura in rad/s

ν si misura in s⁻¹ o hertz (Hz)



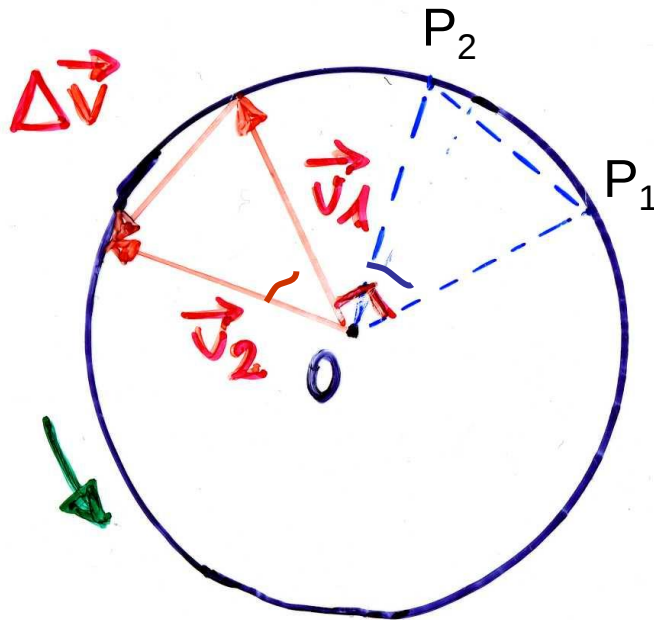
Moto circolare uniforme (2)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

$$\boxed{v = r\omega} = r 2\pi \nu$$

[dalla def. di T: $v = 2\pi r/T = (2\pi/T)r$]
 ω

$$\boxed{\vec{v} \perp \vec{r}}$$



$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{a} \text{ anti } // \vec{r}}$$

($\vec{a}$ è parallela a $\Delta \vec{v}$)



Moto circolare uniforme (3)

triangoli (blu e rosso) simili (angolo fra OP_1 e $OP_2 =$
= angolo fra $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$)

$$\Rightarrow \frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

siccome $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = r$
 $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$

(isosceli e con
un angolo uguale)

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{1}{v} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\text{ " }) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\text{ " })$$

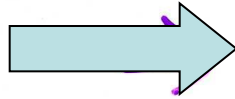
(dividendo per Δt ,
prima di passare
al limite)



Accelerazione centripeta

passando al limite si ha il modulo di a , l'indice c implica una a centripeta

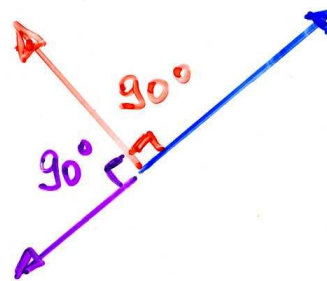
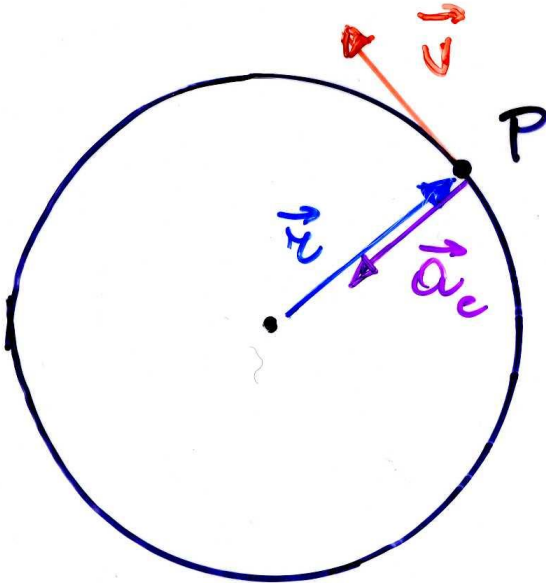
$$\frac{v}{r} = \frac{a}{v}$$



$$a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

$\vec{a}_c$: direzione di $\vec{r}$, verso opposto

$$\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r}$$



$$a_c = \omega v$$

(l'acc. centripeta, $\vec{a}_c$, è diretta verso il centro della circonferenza; in generale, se la traiettoria non è circolare, verso il centro di curvatura della traiettoria)



L'accelerazione nel moto circolare uniforme (*)

- nel piano abbiamo 2 eq. differenziali
 - $\vec{r}(t)$ ha componenti $x(t)$ e $y(t)$; $\vec{v}(t)$ ha componenti $v_x(t)$ e $v_y(t)$; $\vec{a}(t)$ ha componenti $a_x(t)$ e $a_y(t)$

$$a_x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x(t)$$

$$a_y(t) = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y(t)$$

- soluzione: $\forall$ funzione $f(t)$ che derivata 2 volte dia $-\omega^2 f$ [ad es. $f(t) = x_0 \cos(\omega t)$, $df/dt = -\omega x_0 \sin(\omega t)$, $d^2f/dt^2 = d(df/dt)/dt = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t)$ con $x_0 = |\mathbf{r}|$ etc.]
 - ciascuna componente è armonica (v. dopo)



Funzioni elementari periodiche(*)

ad es.

$\sin \alpha$

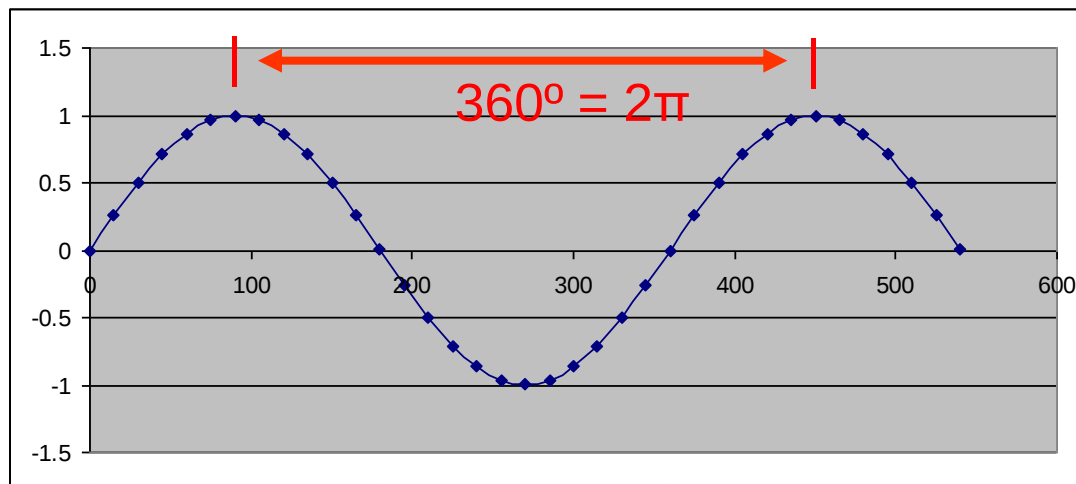
periodo (distanza
fra massimi o fra
minimi successivi)
 $= 360^\circ = 2\pi$

$\sin \alpha$, la sua
derivata 1^a,
 $\cos \alpha$, e la
derivata 2^a,
 $-\sin \alpha$, hanno
tutte uguale
periodo

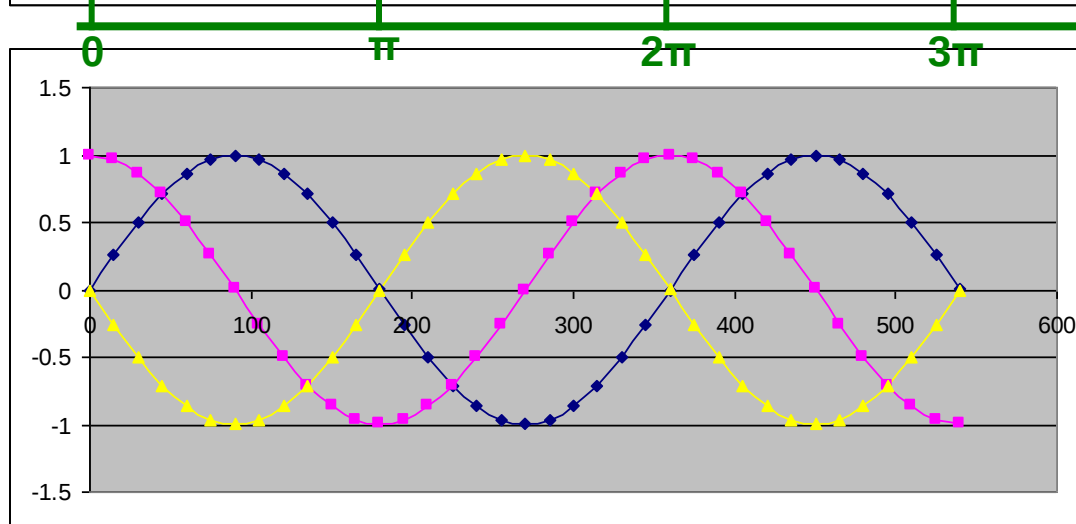
$\sin \alpha$

$\cos \alpha$

$-\sin \alpha$



$\alpha (^\circ)$



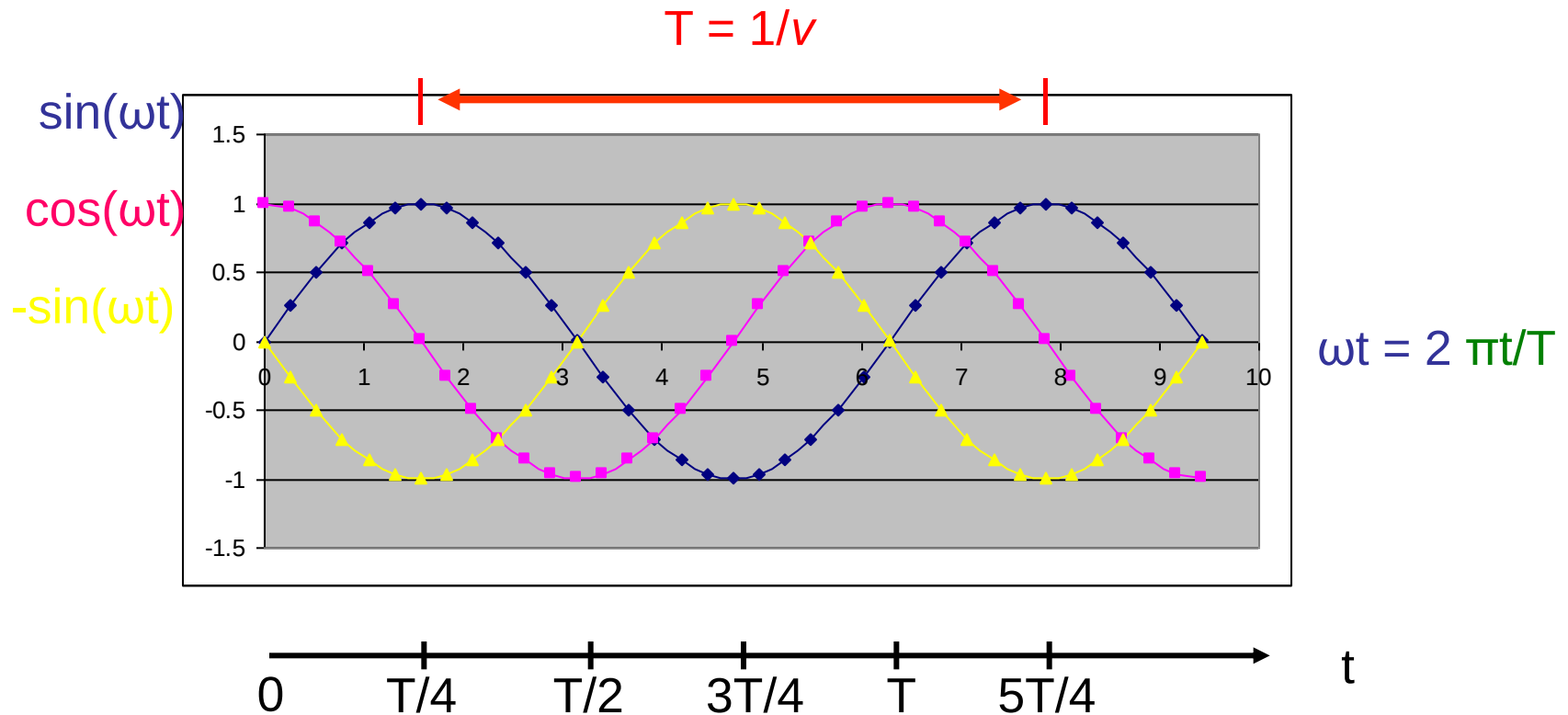
$\alpha (^\circ)$

0 π 2π 3π α (rad)



Funzioni elementari periodiche (2)(*)

$$f(t) = \sin(\omega t) = \sin(2\pi t/T); \quad df(t)/dt = \omega \cos(2\pi t/T); \quad d^2f(t)/dt^2 = -\omega^2 \sin(2\pi t/T)$$



NB ω in rad/s, t in s, ωt in rad

(*) facoltativo



Meccanica 2a parte

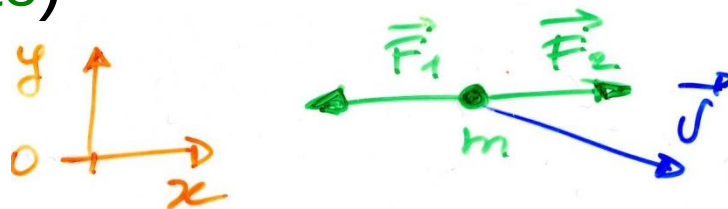


Dinamica



Enunciati dei 3 principi della dinamica, p.m. (Newton)

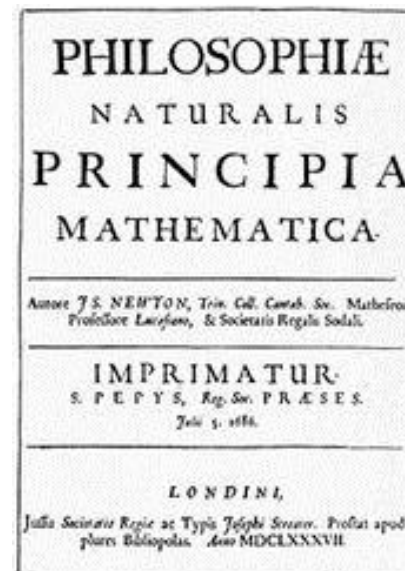
1. Inerzia: se $\Sigma_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow \vec{q} = m\vec{v} = \text{cost.}$
 ($\Sigma_i \vec{F}_i = \text{risultante}$)



2. Se $\Sigma_i \vec{F}_i \neq 0 \Rightarrow \vec{a} = \Sigma_i \vec{F}_i / m$ ($\vec{F} = m\vec{a}$)



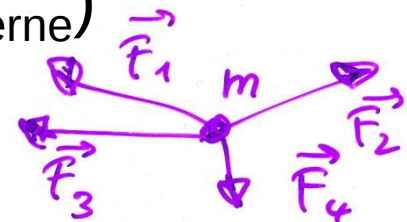
3. Simmetria delle azioni: $\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}$





Cause del moto: le forze

- per la modifica dello stato di quiete/moto di un corpo: occorre un'interazione con altri corpi (a contatto o a distanza) - l'interazione è necessaria per variare la $\vec{v}$ o la quantità di moto, $\vec{q} = m\vec{v}$, del corpo (**II principio**)
- in assenza d'interazione (forza) lo stato di quiete/moto (rettilineo uniforme) permane: principio d'inerzia (**I principio**)
- sistema inerziale (in cui vale il principio d'inerzia): per es. terna centrata sul sole, fissa rispetto alle stelle lontane – la terra è solo approx inerziale (rotazione)
- la risultante $\Sigma_i \vec{F}_i$ determina il moto del punto materiale (per oggetti estesi saranno solo le $\vec{F}_{\text{esterne}}$)



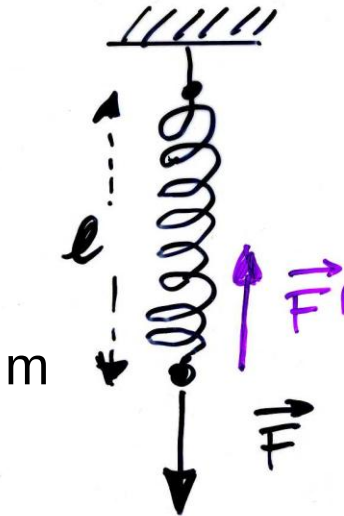
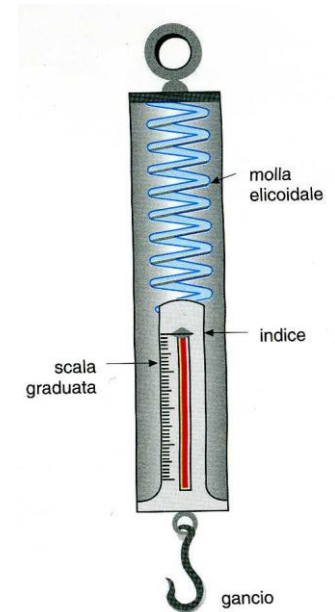
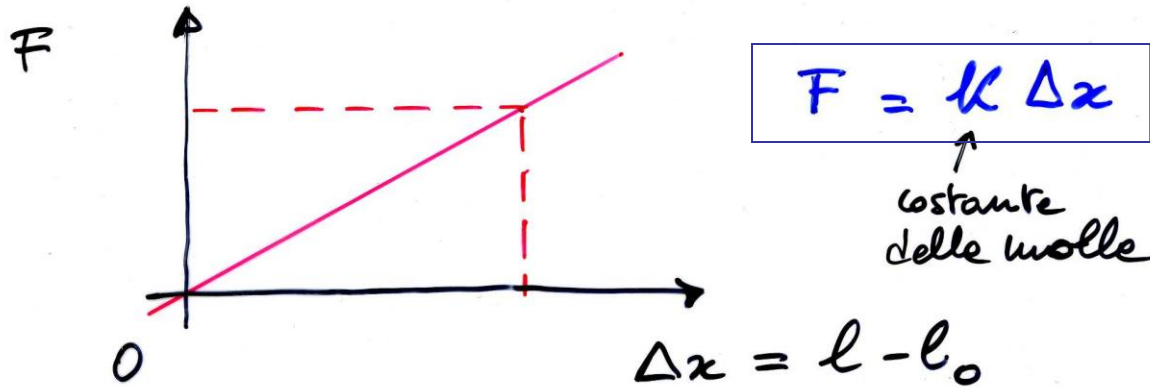


Forze: effetto dinamico ed effetto statico

- occorre una definizione operativa di forza, ossia dare il metodo di misura
- **constatazione**: tutti i gravi, se sono liberi di cadere, si sentono attratti dalla terra e cadono lungo la verticale verso il basso: sentono la forza peso o di gravità (effetto dinamico)
- **altra constatazione**: se lo stesso grave è vincolato ad una molla elicoidale non cade ma la deforma, la allunga (effetto statico)
- in generale, $\forall$ forza vincolata produce una qualche deformazione
- la molla (il dinamometro) può essere usata per misurare le forze previa calibrazione ed entro il limite di elasticità (limite dato dalla validità della legge di Hooke): una volta calibrata, la molla può essere usata per $\forall$ tipo di forze (elett., magn., etc.)
- la direzione del vettore forza è quella dell'asse della molla ed il verso è quello in cui si produce l'allungamento



Dinamometro (molla) e misura statica delle forze



Legge di Hooke:
forza $\propto$ allungamento

ad es. il cilindretto di Fe portato a lezione
($m = 44.83 \text{ g}$) produce una $l = 26 \text{ cm}$ sulla
molla ($l_0 = 19 \text{ cm}$): $\Delta x = l - l_0 = 7 \text{ cm}$

$\Rightarrow k \propto m/\Delta x$

(si può vedere usando altre coppie m' , $\Delta x'$...)



Massa e Il principio della dinamica

- avendo fissato una scala di forza, possiamo constatare che una forza produce un'accelerazione (effetto dinamico)
- in via di principio, posso applicare $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3 \dots$ etc. note e registrare le accelerazioni $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3 \dots$ etc. sul corpo o p.m.:
i rapporti $F_1/a_1 = F_2/a_2 = F_3/a_3 = \dots = \text{cost.} = m$
 $\Rightarrow F/a = m$ ossia $F = ma$
 $\Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}$ (Il principio)
con m massa (inerziale) del corpo
- $\vec{F}$ e $\vec{a}$ sono vettori e si combinano con la regola del parallelogramma – m non dipende dall'orientazione, **scalare**, nè dal tipo di forza (gravit., elast., elett., magn. ...), **proprietà intrinseca del corpo o p.m.**



Il principio, dimensioni e unità della forza

- dal II principio

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

scalare (inerzia)

{molla (f. elastica), peso, f. elettrica, f. magnetica}

il I principio si ottiene
per $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{a} = 0$

- dimensioni della f.:

$$[F] = [ma] = [MLT^{-2}]$$

- unità

- SI: $1N = 1kg \cdot 1ms^{-2}$ (newton)
- CGS: $1dyne$ (o dina) $= 1g \cdot 1cms^{-2} =$
 $= 10^{-3}kg \cdot 10^{-2}ms^{-2} = 10^{-5}N$
- sist. ingegneri $1kgp = 1kg \cdot g = 1kg \cdot 9.81ms^{-2} = 9.81 N$
- $1N \approx$ forza peso esercitata da una mela (piccola, $m \approx 100g$)



Forza e massa, def. dinamica (1)(*)

alternativamente:

1) Fissare un corpo campione (1Kg),
definizione: una forza di n N
produce una a (misurabile) di $n \frac{m}{s^2}$

2) Le F possono essere misurate con
dinamometri (*molle*) misurando
allungamenti/accorciamenti

$$\Delta x \propto F$$

$\Rightarrow$ taratura, campione di forza

3) Le $\vec{F}$ sono vettori



(*) facoltativo



Forza e massa, def. dinamica (2)(*)

- 4) Le diverse F (peso, elettriche, magnetiche etc.) sono misurabili con dinamometri

$$\vec{P} = \vec{F}_g = m \vec{g} \quad (1\text{kg peso } 9.81\text{N})$$



- 5) Fissata F , applicandola a corpi di m diverse e misurando le a

$\Rightarrow$ campione di massa

$$m = m_u \frac{a_u}{a}$$

(equivalentemente la m può essere misurata partendo dalla conservazione delle quantità di moto, $m\vec{v}$)



q.d.m. e Il principio

• def.: $\mathbf{q} = m\mathbf{v}$

quantità di moto

$$[q] = [mv] = [MLT^{-1}];$$

unità SI: $kg \ m \ s^{-1}$

$$\frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \vec{v} + m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

variazione della qdm

$$\text{se } m = \text{cost} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = m \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m\vec{a}$$

(se $m = \text{cost}$; $\Delta m = 0$; m può essere portata fuori dal limite)

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t} = m\vec{a} = \vec{F}$$

• $\mathbf{F} = \Delta \mathbf{q} / \Delta t$; $\rightarrow \mathbf{F} \Delta t = \Delta \mathbf{q}$

Il principio, alternativamente

l'impulso di una forza uguaglia la variazione della qdm del corpo su cui agisce (teorema dell'impulso)

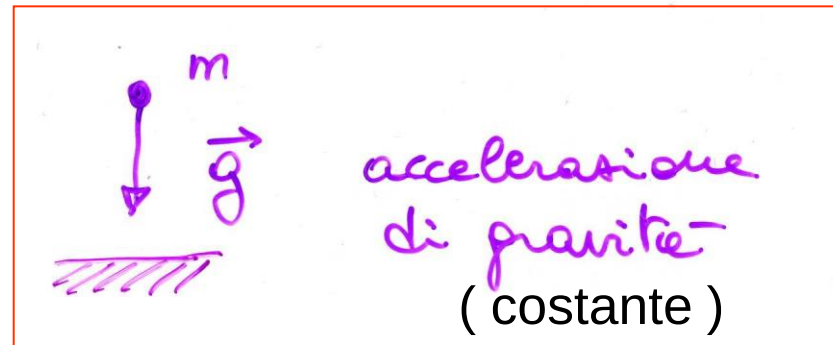
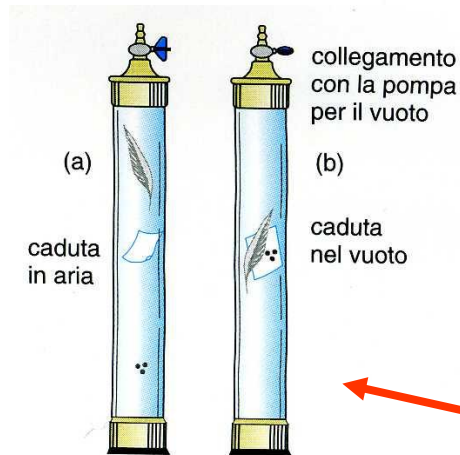


Forza peso

(anche)

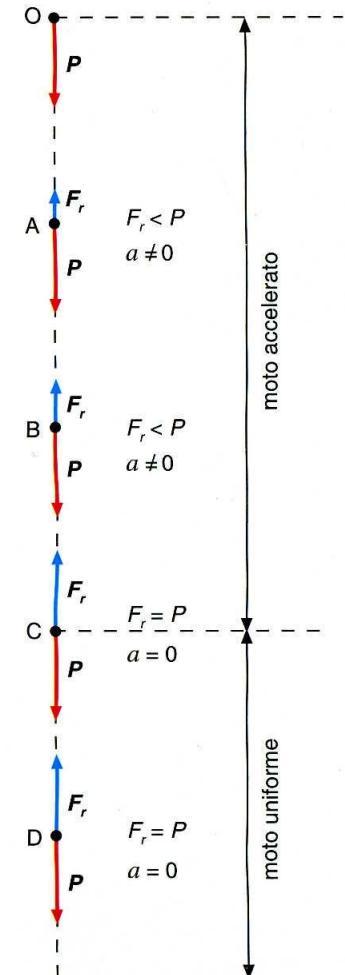
$$m \vec{g} = \vec{P} = \vec{F}_g$$

diretta in basso lungo la verticale



assenza di attrito (dell'aria): tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione g

attrito dell'aria



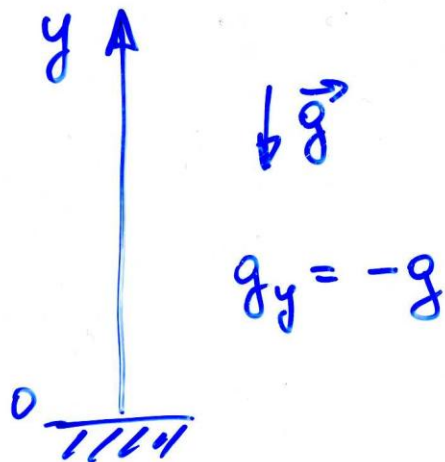


g e scelta del sistema di riferimento (*)

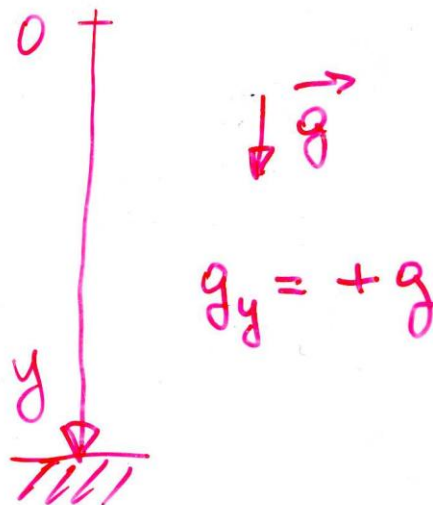
$$(9.81) \\ g = 9.80665 \text{ m/s}^2 = 980.665 \text{ cm/s}^2$$

0 m slm
45° latitudine

se scelgo



se scelgo



g_y indica la componente di $\vec{g}$ secondo la verticale, dipende dal riferimento

se lancio un corpo verso l'alto il moto sarà ritardato, se lo lascio cadere sarà accelerato

(*) facoltativa



variabilità di g (*)

45° latitudine
0 m s.l.m.

$$g = 9.80665 \text{ m s}^{-2}$$

"esatta"

equatore	0m	9.780
poli	0m	9.832
45°	10km	9.776

la terra ruota intorno al proprio asse; non è esattamente sferica

negli esercizi si ^{può} prendere 9.81 m s^{-2}
 $= 981 \text{ cm s}^{-2}$

"errore"

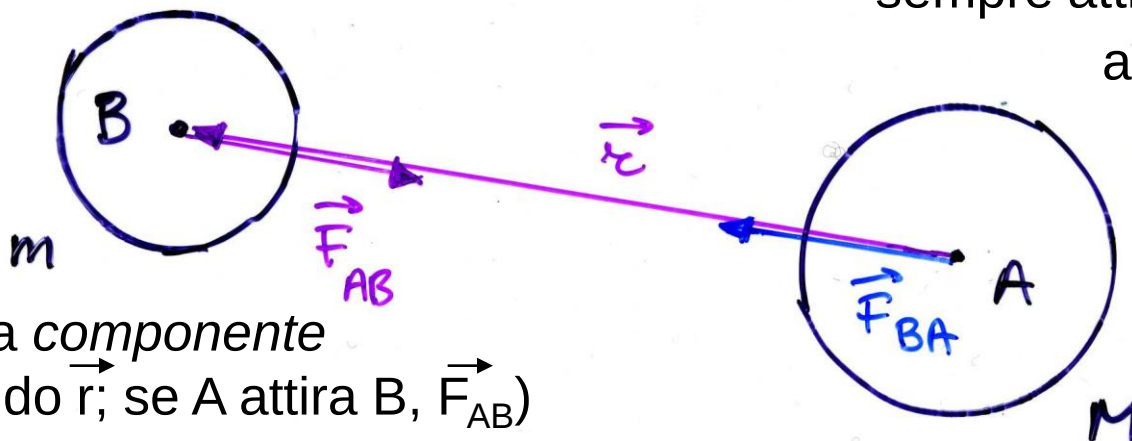
$$\Delta g = g - g' = -0.00335 \text{ m s}^{-2}$$
$$\Delta g / g = -0.335 \%$$

(*) facoltativa



Forza di attrazione gravitazionale (Newton)

corpi puntiformi (o sferici)



(F_g indica la *componente* di $\vec{F}_g$ secondo $\vec{r}$; se A attira B, $\vec{F}_{AB}$)

$$F_g = -G \frac{Mm}{r^2}$$

$$\vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^3} \vec{r} \quad (*)$$

la forza gravitazionale è sempre attrattiva, cioè è antiparallela a $\vec{r}$,
 $\vec{F}_g \propto$ vettore unitario
 – $\vec{r}/r$ diretto in verso opposto a $\vec{r}$

LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

$$G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ kg}^{-1} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

$$[G] = [MLT^{-2} M^{-2} L^2] = [M^{-1} L^3 T^{-2}]$$

esperienza
di Cavendish

fln - mar 2011

$$(*) \quad (1/r^2) \cdot \vec{r}/r = \vec{r}/r^3 !$$

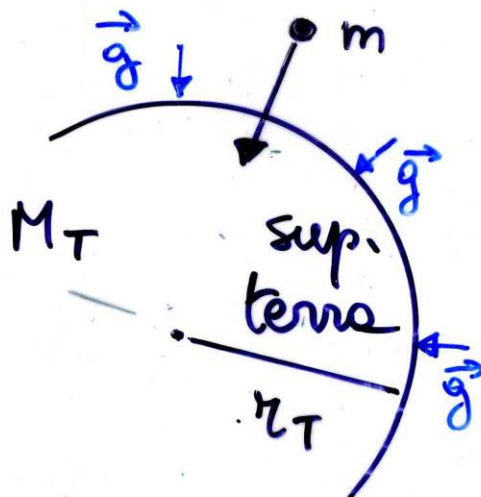


Forza di attrazione gravitazionale (2) e peso

NB: $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

(III principio)

cos'è g?



=>

$$M_T = g r_T^2 / G$$

$$F_g = \left(G \frac{M_T}{r_T^2} \right) m = g m = P$$

esperienza in lab.
(Cavendish)(*)

$$M_T = 5.97 \times 10^{24} \text{ Kg}$$

si ricava

$$r_T = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$$

si misura, astron.

$$g = 9.81 \text{ m/s}^2$$

si misura, caduta

(*) con m, M, r e F,
tutte misurate $\rightarrow G$



Gravitazione universale: applicazioni(*)

- Un satellite TV deve essere fisso rispetto alla parabola a terra. Che **altezza (h)** deve avere?
- $T = 1 \text{ giorno} = 86400 \text{ s}$ (orbita geostazionaria)
 $\omega = 2\pi/T = 7,272 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$
 $a_c = \omega^2 r$ ma è anche $GM_T m/r^2 = ma_c$
 $\Rightarrow GM_T = \omega^2 r^3$ (3^a legge di Keplero)
 $r = \sqrt[3]{GM_T/\omega^2} = 4.223 \cdot 10^7 \text{ m}$
 $h = r - r_T = 35.9 \cdot 10^6 \text{ m}$ all'equatore, che corrisponde alla cintura di Clarke (quello che ha avuto l'idea)
- $T_{\text{Luna}} = ?$ sapendo che $R = 3.8 \cdot 10^8 \text{ m}$ (distanza TL)
 $a_c \text{ della luna} = g(r_T/R)^2 = 2.756 \cdot 10^{-3} \text{ ms}^{-2}$
ma è anche $a_c = (2\pi/T)^2 R$
 $\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{R/a_c} = 27.0 \text{ giorni}$

es. sistema S/Pianeti:

1. orbite dei P ellittiche, con S in un fuoco
2. il raggio vettore r_{SP} spazza Aree uguali in t uguali
3. $GM_S = \omega^2 r^3 \propto r^3/T^2$
 $\rightarrow M_S = \omega^2 r^3/G$
 $\sim 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
($r = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$, $T = 1a$)





Peso ed equazione di moto

vicino alla
superficie
della terra
 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

eq. di moto

$$m \vec{a} = \vec{F}$$

ad es. sotto l'azione
della forza peso

$$\cancel{m} \vec{a} = \cancel{m} \vec{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \\ (\vec{r}_0, \vec{v}_0 \text{ iniz.}) \end{array} \right.$$

asse
+ verso - verso
il basso

$$a = \pm |g|$$

componente di $\vec{a}$ secondo
la verticale



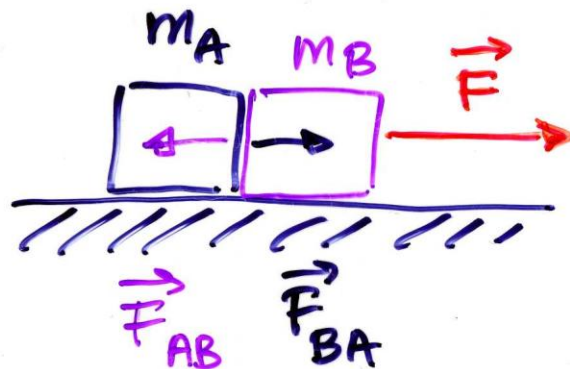
III principio e forze di contatto (*)

dati i corpi A e B che interagiscono,
per il III principio si ha $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$

III principio

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

- ad es. forze di contatto
(oggetti esteri)



$$m = m_A + m_B$$





III principio e forze di contatto (2) (*)

applichiamo separatamente il II principio ad A, B e A+B per trovare la forza di contatto $\vec{F}_{AB}$ ($\vec{F}_{BA}$)

$$A+B : m \vec{a} = \vec{F}$$

$$A : m_A \vec{a} = \vec{F}_{BA}$$

$$B : m_B \vec{a} = \vec{F}_{AB} + \vec{F}$$

$$\Sigma (m_A + m_B) \vec{a} = \vec{F}$$

componente x

$$m a = F$$

$$m_A a = F_{BA}$$

$$m_B a = F - F_{AB}$$

$$(m_A + m_B) a = F$$

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F} + \vec{F} \frac{m_B}{m_A + m_B} = -\vec{F} \frac{m_A}{m_A + m_B}$$

NB F_{AB} cresce con F : un vincolo ideale è quindi in grado di sostenere una $F \forall$, non così un vincolo 'reale' (carico di rottura, vedi più avanti, elasticità)



III principio e forze di contatto (3)

dati i corpi A e B che interagiscono, per il III principio si ha

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$$

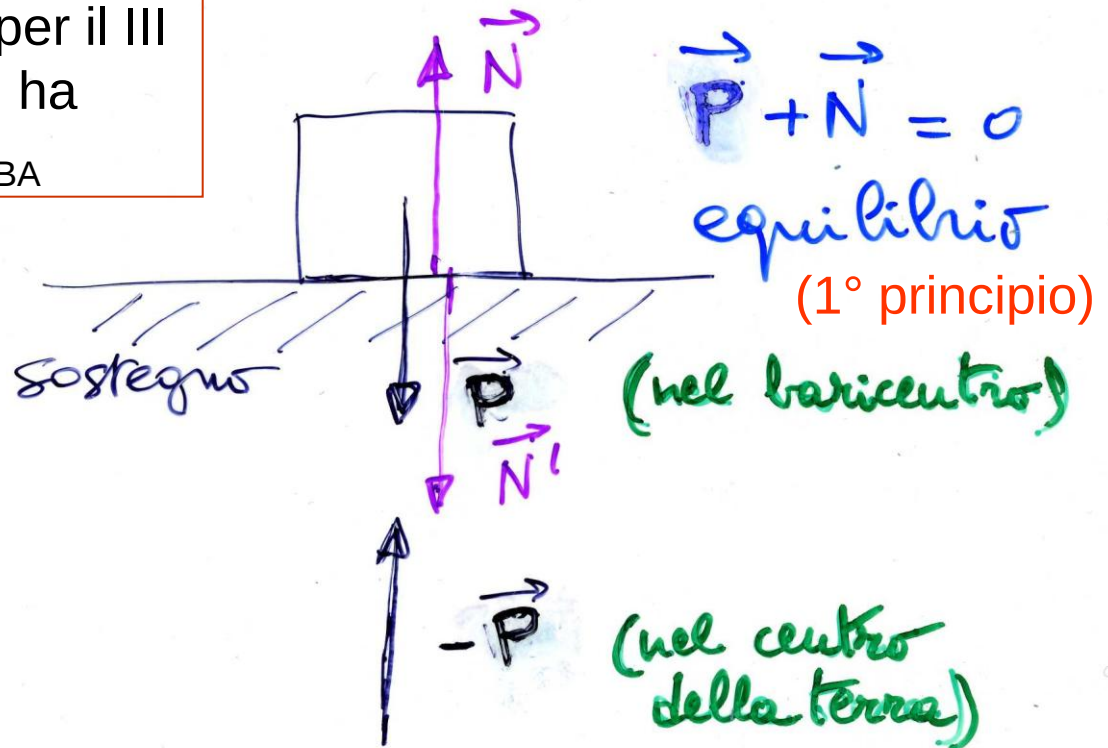
le coppie di forze del III principio sono applicate a corpi diversi

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$

$$\mathbf{N} + \mathbf{N}' = 0$$

la spinta $\mathbf{N}'$ sul sostegno è dovuta a $\mathbf{P}$ e lo uguaglia
 $\Rightarrow \mathbf{P} + \mathbf{N} = 0$

un vincolo ideale può equilibrare
 $\forall \mathbf{P}$, un vincolo reale no



(forza cui è sottoposta la terra!)



III principio e forze di contatto (4)

piano inclinato: scompongo $\mathbf{P}$
// $(P \sin \theta)$ e $\perp (P \cos \theta)$ al p.i.

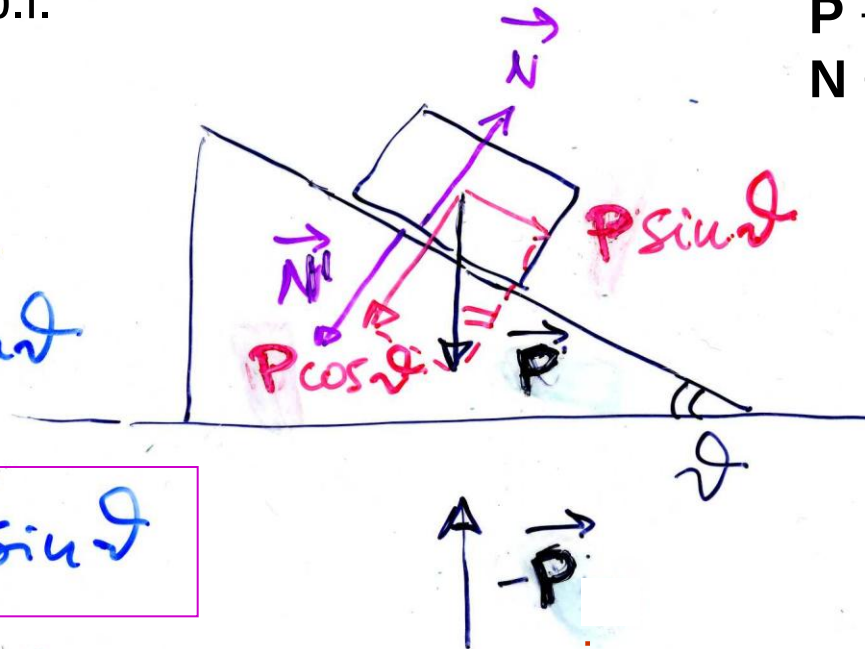
III principio:
 $\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$
 $\mathbf{N} + \mathbf{N}' = 0$

$$P \cos \theta = N$$
$$\cancel{ma = P \sin \theta}$$
$$\cancel{= mg \sin \theta}$$

eq. di moto
in assenza
di attrito $\Rightarrow$

$$a = g \sin \theta$$

la componente $P \cos \theta$
è equilibrata dalla
reazione vincolare N
(non c'è moto $\perp$ al p.i.)



in assenza di attrito *non*
vi può essere equilibrio:
la componente $P \sin \theta$
non è equilibrata

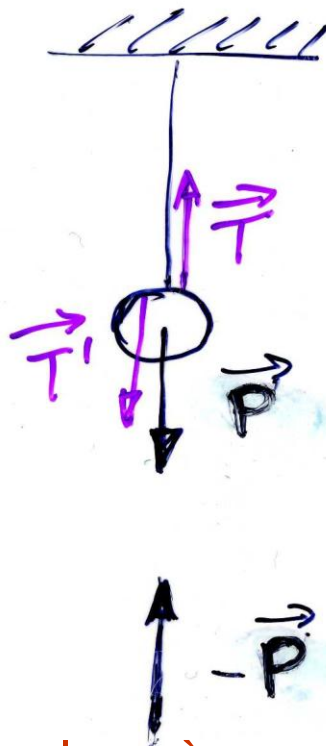


III principio e forze di contatto (5)

III principio:

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$

$$\mathbf{T} + \mathbf{T}' = 0$$



un filo (funne) ideale può sostenere $\forall \mathbf{P}$, un filo (funne) reale sosterrà un carico max, oltre quello si spezza

fune, filo (NB di massa trascurabile)

$\mathbf{T}'$ tensione della fune, del filo
($\mathbf{T}$ agisce sulla sfera di massa m)

$$\vec{\mathbf{P}} + \vec{\mathbf{T}} = 0$$

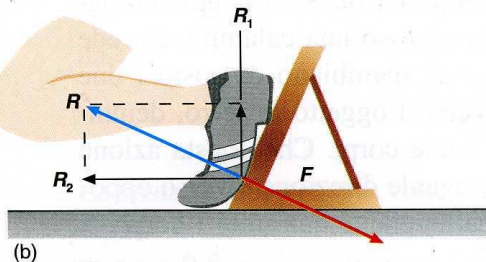
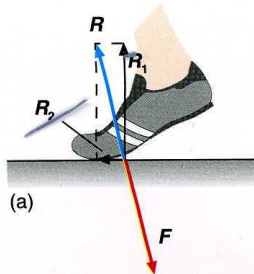
equilibrio (1° principio)

(forza cui è sottoposta la terra!)

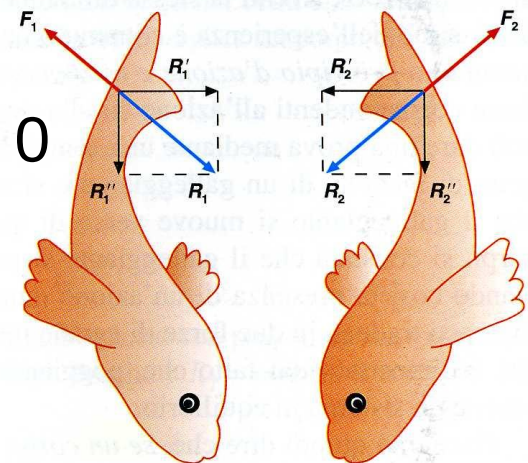
III principio e sistemi propulsori(*)

- dati due corpi A e B che interagiscono: azione e reazione uguale e contraria $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$
- ad es. blocchi di partenza: aumentano la spinta nella direzione del moto
- altro es. locomozione di animali: spinta sul mezzo circostante (suolo, acqua, aria)

$$\mathbf{F} + \mathbf{R} = 0$$



$$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = 0$$



(*) facoltativo

III principio e moti curvilinei(+)

- consideriamo un moto curvilineo (variazione di $\mathbf{v}$ in direzione e verso) **assumendo trascurabile l'attrito**
- la forza centripeta deve(*)

essere **quindi** fornita dalla reazione della curva
 sopraelevata di raggio R
 $F_c = mv^2/R = N'' = N \sin \alpha =$
 $= N' \operatorname{tg} \alpha = P \operatorname{tg} \alpha$

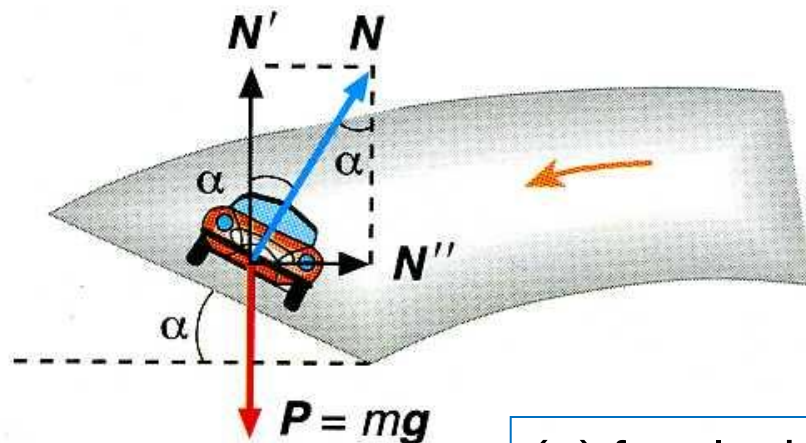
$$\Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = v^2 / (Rg)$$

ad es. $v = 50 \text{ m/s}$

$R = 250 \text{ m}$

$$\operatorname{tg} \alpha \sim 2500 / (250 \cdot 10) \sim 1; \alpha \sim 45^\circ$$

(*) si impone che il vettore
 $\mathbf{F}_c = \mathbf{N} + \mathbf{P}$ sia orizzontale



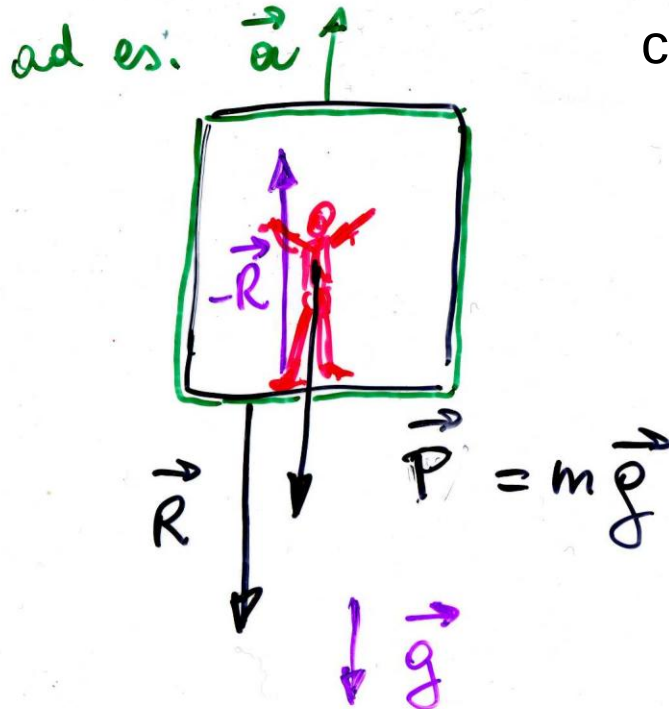
(+) facoltativo

ossia deve essere
 $F_c \cos \alpha = P \sin \alpha$



Peso e peso apparente(*)

il peso di una persona può essere definito come la forza esercitata sul pavimento



Ascensore accelerato
($\vec{a}$) tipico sistema *non*
inerziale se $\vec{a} \neq 0$

$\vec{R}$ - sul pavimento
 $-\vec{R}$ - sulle persone

$$m\vec{a} = \vec{P} - \vec{R} \quad \text{eq. di moto}$$

(*) facoltativo



Peso e peso apparente (2)(*)

$$\Rightarrow \vec{R} = \vec{P} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a})$$

$$\text{se } \vec{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{c} \text{ o } \vec{a} \quad \vec{R} = \vec{P} = m\vec{g}$$

$$\text{" } \vec{a} \text{ verso l'alto} \quad R = m(g + a) > P$$

$$\text{" " verso il basso} \quad R = m(g - a) < P$$

- quindi il peso apparente sarà inferiore (superiore) a quello reale se l'ascensore accelera verso il basso (alto)
- NB si noti che mentre m è costante, P può variare, per es. andando in montagna, in orbita o all'equatore si diminuisce di peso! (al polo si aumenta)

(*) facoltativo



Sistemi isolati e conservazione q.d.m.

- isolati: sistemi di 2 o più corpi che si scambiano forze, interne, che a 2 a 2 si elidono (risultante nulla)
- es. corpi 1 e 2 su piano orizzontale **senza attrito**, al contatto:

su 1 agisce $\mathbf{F}_2$ (dovuta a 2)

su 2 agisce $\mathbf{F}_1$ (dovuta a 1)

$$\mathbf{F}_1 = \Delta \mathbf{q}_2 / \Delta t; \quad \mathbf{F}_2 = \Delta \mathbf{q}_1 / \Delta t$$

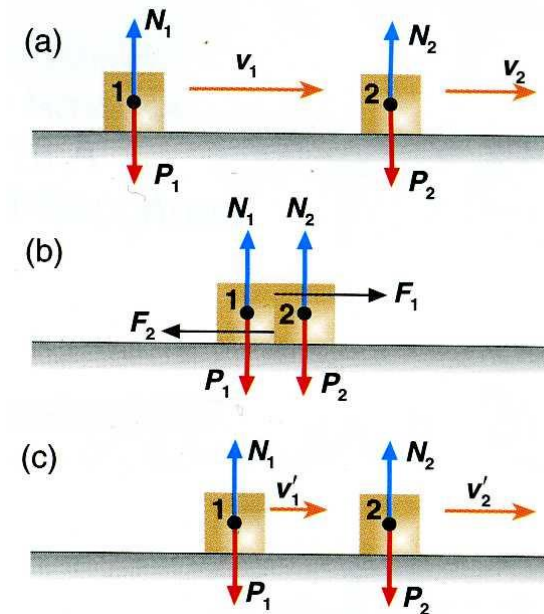
$$\text{ma } \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta \mathbf{q}_1 / \Delta t + \Delta \mathbf{q}_2 / \Delta t = 0$$

$$\text{ossia } \Delta \mathbf{q}_1 + \Delta \mathbf{q}_2 = \Delta (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) = 0$$

la variazione della q.d.m. totale è nulla, da cui ricavo

$$\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \text{cost}$$



urto fra due corpi

Conservazione q.d.m. (2)

- se $\mathbf{q}_i$ e $\mathbf{q}_i'$ indicano le q.d.m. prima e dopo l'urto, avrò

$$\mathbf{q}_1' + \mathbf{q}_2' = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$$

$$m_1 \mathbf{v}_1' + m_2 \mathbf{v}_2' = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2$$

conservazione della q.d.m.: l'interazione fra due corpi non modifica la q.d.m. - oppure – per un sistema isolato (soggetto a risultante nulla) la q.d.m. si conserva

- es. locomozione di celenterati, motori termici a getto, la q.d.m. iniziale è uguale zero

$$\Rightarrow m_a \mathbf{v}_a + m_c \mathbf{v}_c = 0$$

da cui

$$\mathbf{v}_c = - (m_a/m_c) \mathbf{v}_a$$



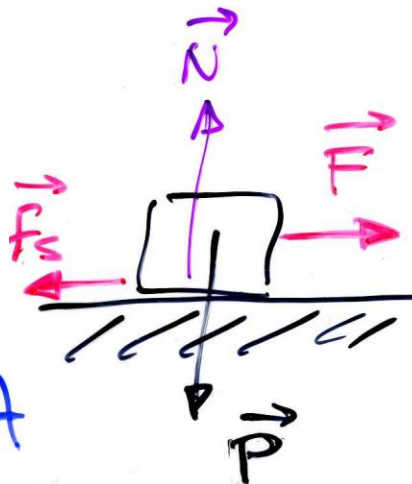


Forza d'attrito, leggi dell'attrito statico

- consideriamo un corpo appoggiato su una superficie reale, se applicassi una forza in assenza di attrito il corpo dovrebbe comunque accelerare, invece non si muove finchè $F \leq \mu_s N$

attrito statico

(impedisce
l'inizio del moto)



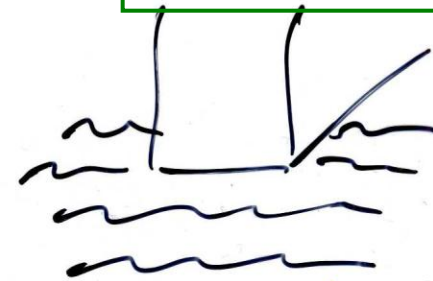
$\forall A$

2) l'a.s. cresce fino
ad un valore max

$$f_{s, \max} = \mu_s N$$

$$(f_s \leq \mu_s N)$$

1) l'a.s. non dipende
dall'area A di contatto



superfici
ruvide

a microscopice
 $\ll A_{\text{contatto}}$



Attrito (2)

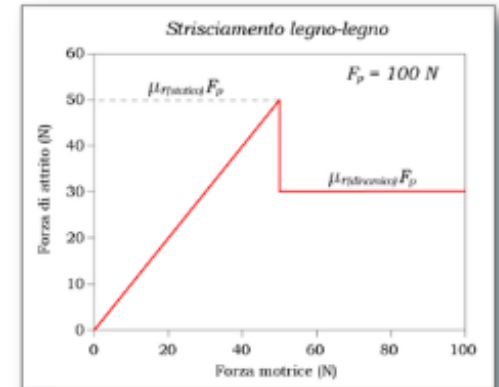
- una volta superata la $f_{s,max}$ il corpo è accelerato da una forza

$$F' = F - f_c \text{ (dove } f_c \text{ è un po' inferiore a } f_{s,max})$$

attrito cinetico o dinamico
(agisce durante il moto)

$$f_c = \mu_c N$$

in prima approssimazione
(per es. negli esercizi) si
può non distinguere fra f_c
e $f_{s,max}$, quindi $\mu_c = \mu_s = \mu$



$$\mu_c < \mu_s$$

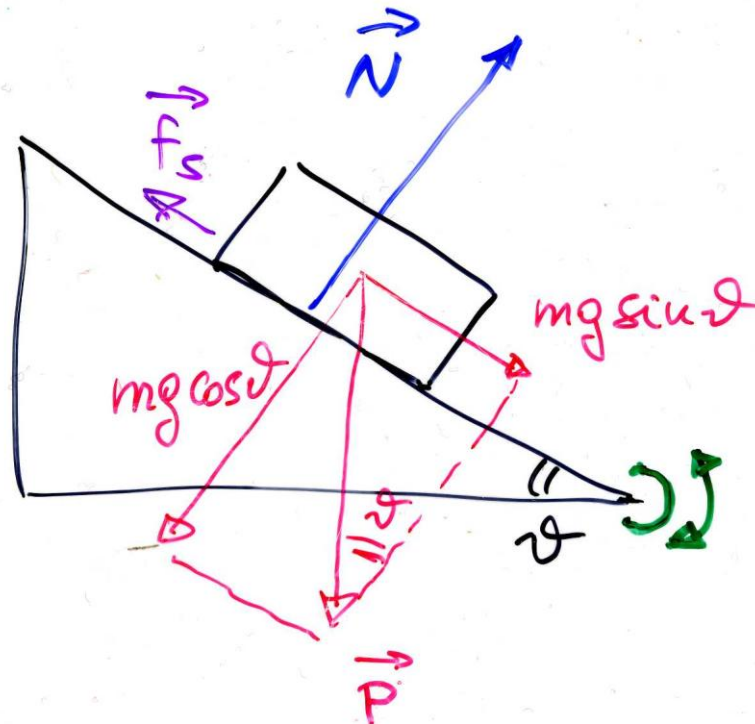
legno-legno ~ 0.3

metallo-metallo ~ 0.4

superfici lubrificate $\mu_c \approx 0.05$

Misura del coefficiente d'attrito

- si può usare un piano inclinato, ad inclinazione variabile: la forza peso è scomponibile parallelamente ($P \sin \theta$) ed ortogonalmente al piano ($P \cos \theta$); solo la componente normale è equilibrata dalla reazione vincolare; basta quindi far crescere l'angolo θ per aumentare la forza motrice e, per un certo angolo critico, θ_c , il blocco comincerà a muoversi, quando $mg \sin \theta$ supera la forza di attrito $f_{s, \max}$





Misura del coefficiente d'attrito (2)

se $\vartheta \nearrow$, $mg \sin \vartheta \nearrow$ (1° quadrante!)
($= f_s$)

$$\cancel{mg} \sin \vartheta_c = f_{s, \max} = \mu_s \cancel{mg} \cos \vartheta_c$$

inizie a scivolare

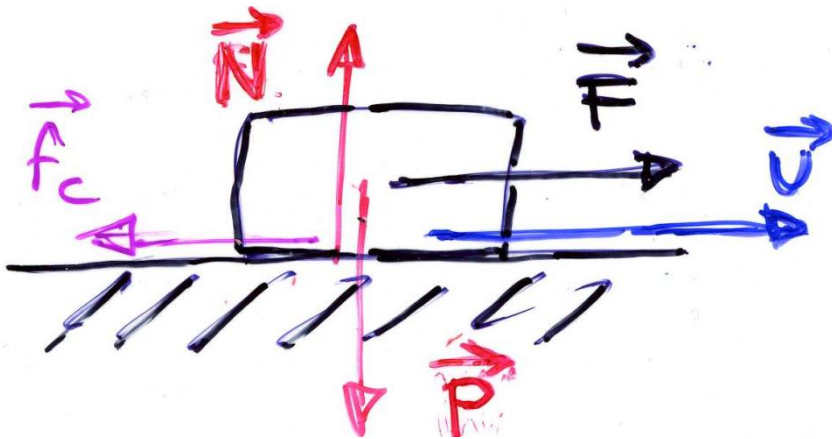
$$\mu_s = \frac{\sin \vartheta_c}{\cos \vartheta_c} = \tan \vartheta_c$$

θ_c indica l'angolo critico, angolo per cui il corpo comincia a scivolare



Eq. di moto in presenza di attrito

- (senza attrito: $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$)
- con attrito: $\mathbf{a} = 0$ per $|\mathbf{F}| < f_{s,\max} = \mu_s N$
 $m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{f}_c$ per $|\mathbf{F}| > f_{s,\max}$; $\mathbf{f}_c = \mu_c N$
 $\mathbf{f}_c = -\mu_c N \mathbf{v}/v$ si oppone al moto



$$\Rightarrow ma = F - \mu_c N$$

$$a = (F - \mu_c N)/m < F/m$$

$$a = F/m - \mu_c g$$

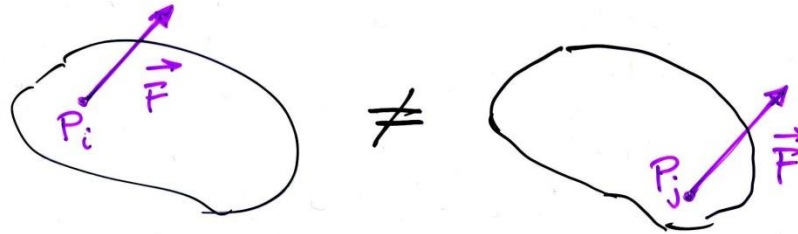
(l'ultima vale su un piano orizzontale,

$$\mathbf{N} = -\mathbf{P}, N = mg)$$

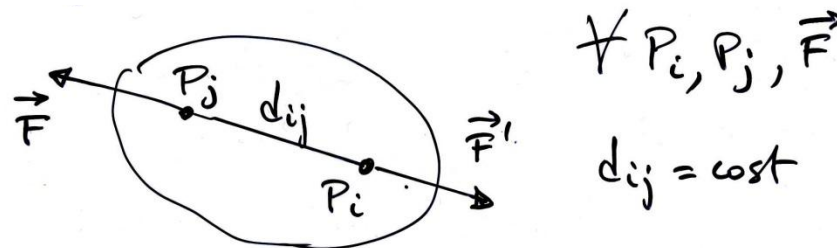


Corpo rigido

– per i corpi estesi, il punto di applicazione delle forze diventa importante



– def. di corpo rigido



– sperimentalmente: 1) due $\vec{F}$ uguali e contrarie lungo la stessa retta di applicazione in punti diversi non alterano lo stato di moto del c.r.;
2) una $\vec{F}$ applicata ad un punto può essere spostata lungo la sua retta di applicazione senza alterarne gli effetti

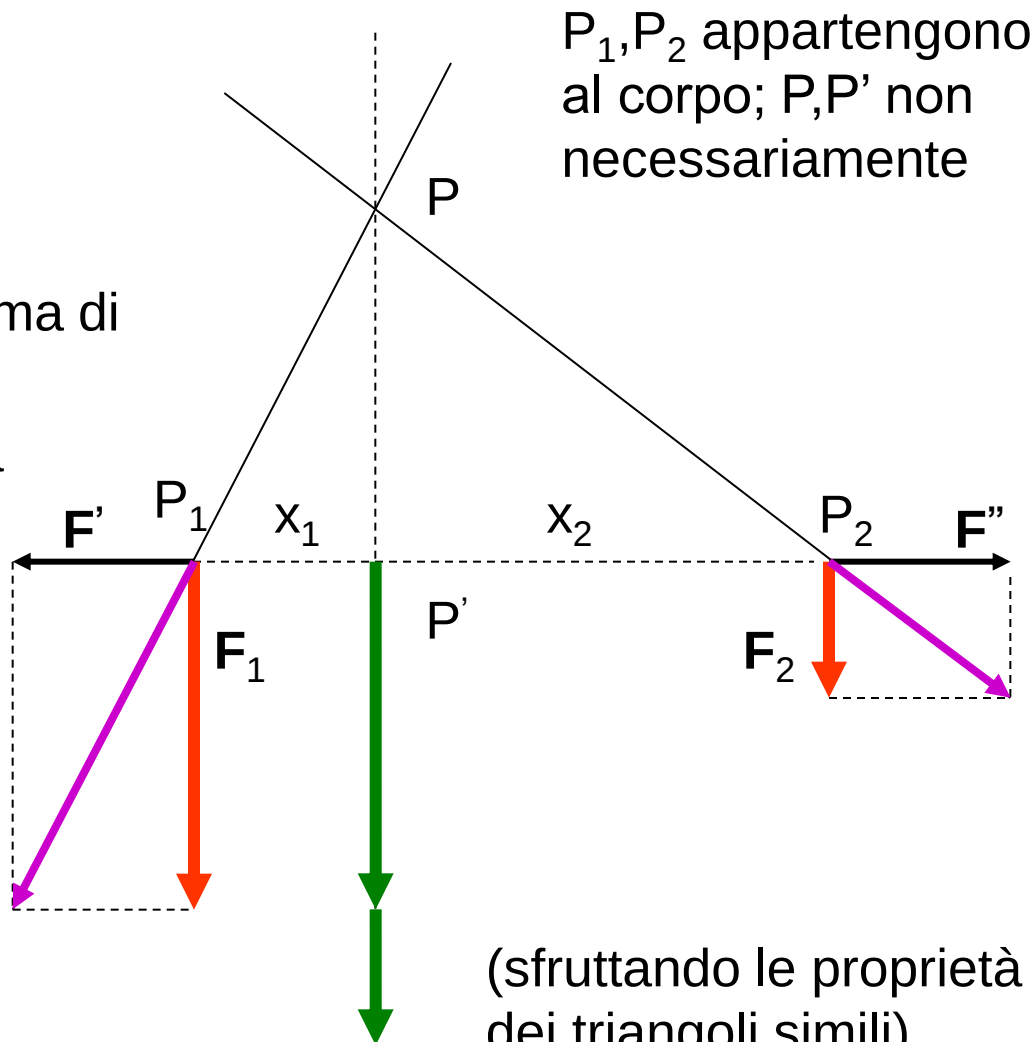


Corpo rigido: risultante di forze parallele

- aggiungo $\mathbf{F}'$ e $\mathbf{F}'' = -\mathbf{F}'$
($\mathbf{F}'$ a piacere, arbitraria)
- traslo le risultanti in P: le componenti orizzontali si annullano, rimane la somma di $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$
- posso ritraslare la somma in P'
- la risultante è la somma di $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ lungo P'P con

$$\frac{P_1P'}{P_2P'} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{F_2}{F_1}$$

$$\left(\frac{P_1P'}{PP'} = \frac{F'}{F_1}; \quad \frac{P_2P'}{PP'} = \frac{F''}{F_2} \right)$$





Risultante di forze parallele (2), baricentro

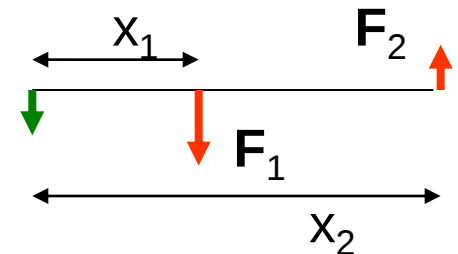
- posso riscrivere la rel. precedente come

$$F_1 x_1 = F_2 x_2$$

- se F_1 e F_2 sono antiparallele, la risultante ha per modulo la differenza dei moduli, verso quello della F più grande, retta di applicazione all'esterno dalla parte della F più grande, con

$$F_1 x_1 = -F_2 x_2$$

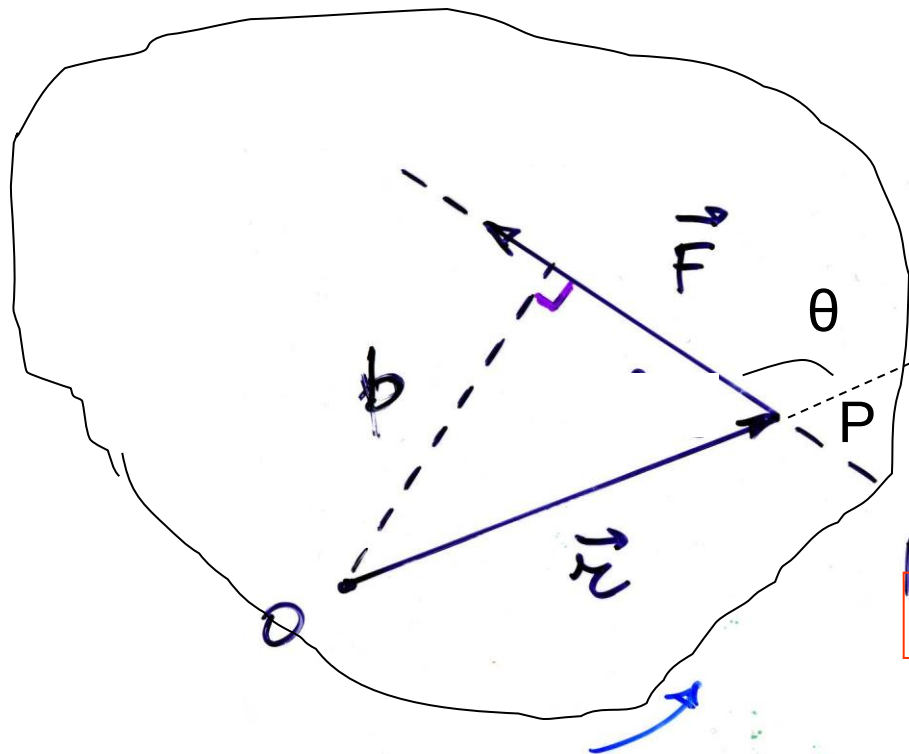
$$|F_1 x_1| = |F_2 x_2|$$



- se si considera un corpo rigido esteso diviso in volumetti di massa m_i e di peso $m_i g$, nel limite in cui g è costante, la risultante di tutte le forze peso è il peso del corpo $P = \sum_i m_i g = g \sum_i m_i = mg$ che sarà applicato nel centro di gravità o baricentro (per un corpo omogeneo è il centro geometrico – in generale il b. può anche trovarsi fuori dal corpo)



Momento di una forza rispetto a un punto



il momento è perpendicolare
al piano individuato da $\mathbf{r}$ e $\mathbf{F}$
NB $\mathbf{M} = 0$ se $\mathbf{r}$ parall. $\mathbf{F}$

momento di $\mathbf{F}$ rispetto ad O (in
evidenza): il prodotto vettoriale

$$\mathbf{M} = \overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{F}$$

ossia

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

b , minima distanza fra O e la retta
di applicazione di $\mathbf{F}$, è il braccio

modulo del vettore $\mathbf{M} = \text{braccio} \cdot F$:

$$M = rF \sin \theta = Fb$$

siccome $\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta$

$$[\text{Momento}] = [LF] = [ML^2T^{-2}]$$

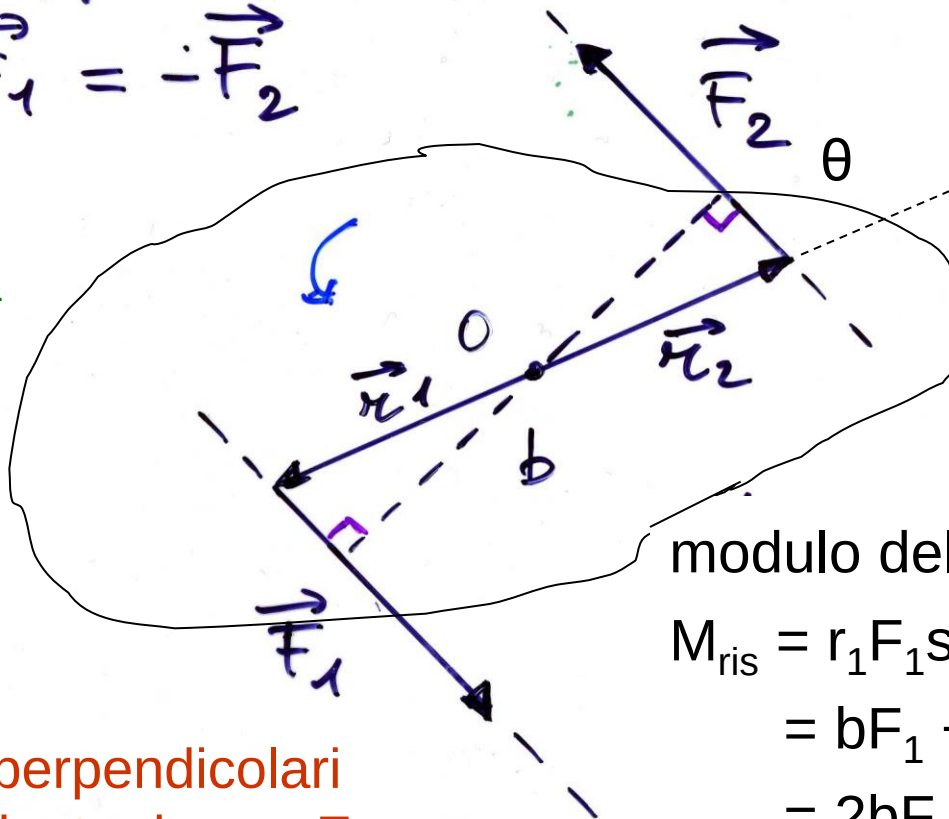
unità SI: $N \cdot m$

$$\begin{aligned} \text{CGS: } 1 \text{ dyne} \cdot \text{cm} &= \\ &= 10^{-5} \text{ N} \cdot 10^{-2} \text{ m} = 10^{-7} \text{ Nm} \end{aligned}$$

Coppia di forze

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

spostando O lungo la linea tratteggiata si ottiene sempre lo stesso M_{ris} etc.



NB nel caso della coppia di forze, il momento della coppia non dipende dalla scelta di O

modulo del momento risultante:

$$\begin{aligned} M_{\text{ris}} &= r_1 F_1 \sin\theta + r_2 F_2 \sin\theta = \\ &= b F_1 + b F_2 = \\ &= 2b F_1 \end{aligned}$$

M_1 e M_2 sono perpendicolari al piano individuato da r_1 e F_1 e sono paralleli (producono una rotazione nello stesso verso)



Condizioni generali di equilibrio di un corpo rigido

perchè il c.r. sia in equilibrio (permanga nel suo stato di moto uniforme precedente):

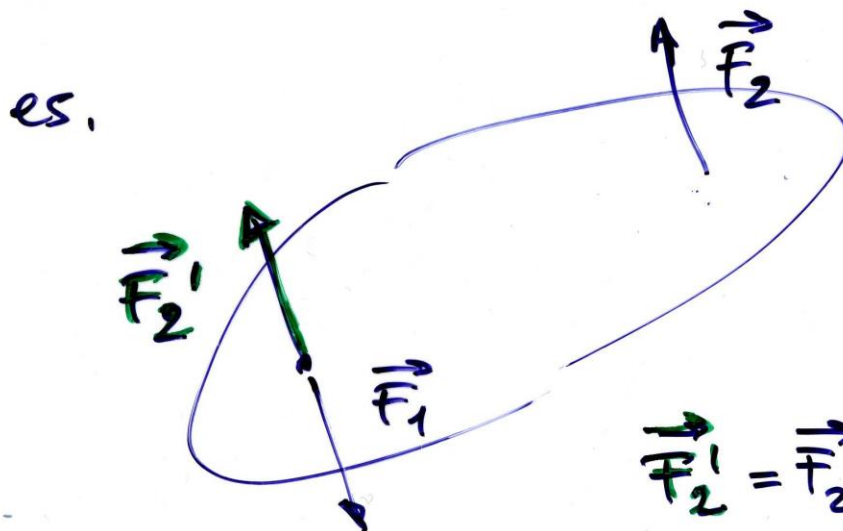
1. la risultante delle forze esterne applicate al c.r. deve essere nulla
2. il momento risultante delle forze esterne applicate al c.r. deve essere nullo

$$\begin{cases} \vec{F}_{ris} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \\ \vec{M}_{ris} = \sum_i \vec{M}_i = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{forze esterne} \\ \text{"} \end{array}$$

una risultante non nulla è causa di una variazione nel moto di **traslazione**; un momento risultante non nullo causa le **rotazioni**



Condizioni di equilibrio (2), esempio



forze uguali e contrarie, con rette d'azione uguali o diverse

$$\vec{F}_2' = \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

rette d'azione uguali

caso 1

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{ris} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2' = 0 \\ \vec{M}_{ris} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2' = 0 \end{array} \right.$$

sta fermo

rette d'azione diverse (coppia)

caso 2

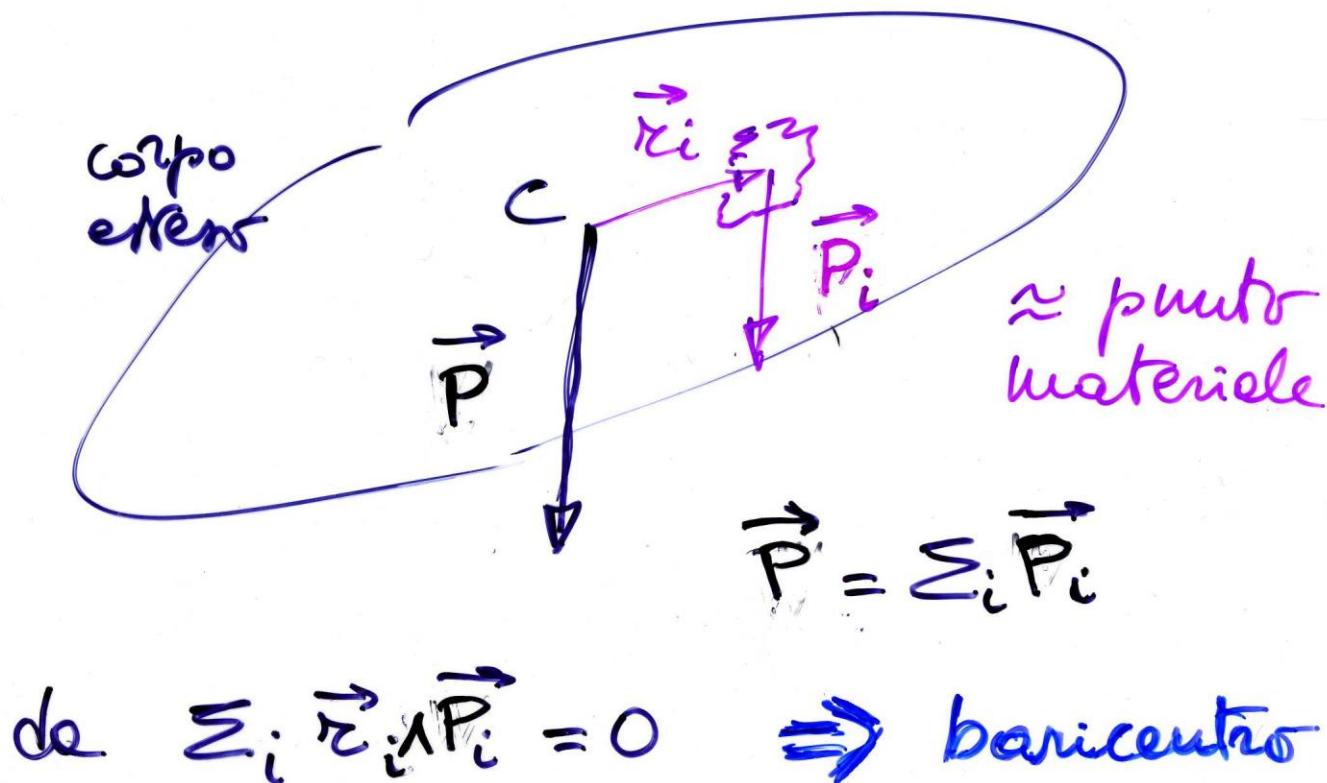
$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{ris} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \\ \vec{M}_{ris} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \neq 0 \end{array} \right.$$

ruota



Centro di gravità o baricentro

in modo del tutto equivalente alla def. precedente, il baricentro è individuabile imponendo che la somma dei momenti delle forze peso (ottenuta scomponendo il c.r. in *piccole* parti) rispetto ad esso sia nulla

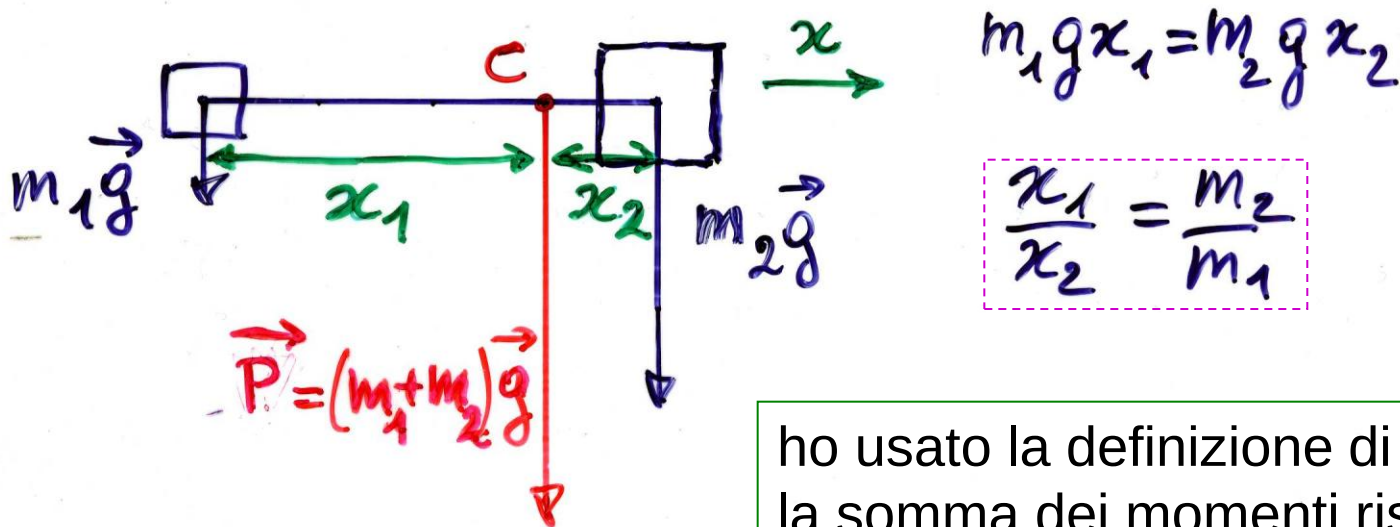




Es. di calcolo del baricentro

es.1 corpo uniforme : centro geometrico
es.2 due masse

(per
simmetria
dei mom.)



uguale al risultato
ottenuto a pag. 70

$$x_1/x_2 = F_2/F_1$$

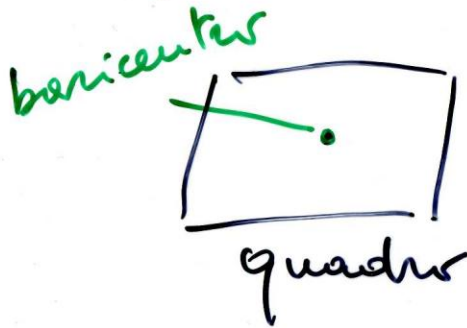
$$x_1 F_1 = x_2 F_2$$

ho usato la definizione di baricentro:
la somma dei momenti rispetto al
baricentro C deve essere nulla:

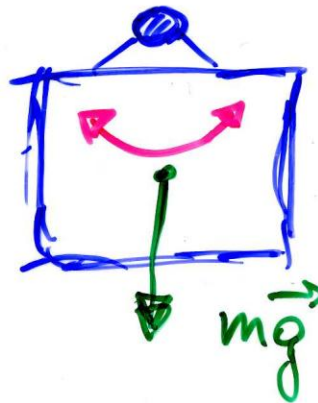
$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = 0 \implies M_1 = M_2$$

(i moduli sono uguali)

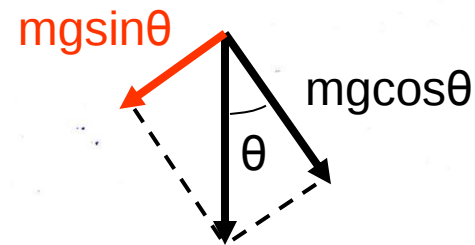
Tipi di equilibrio (asse fisso)



1)



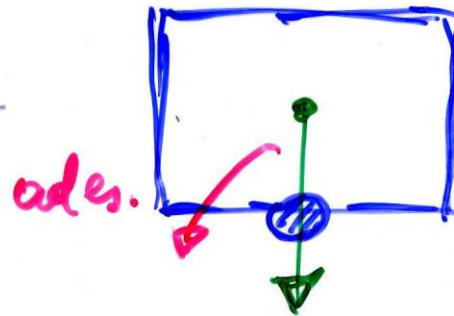
Malile



la componente $mg\cos\theta$ è annullata dalla reazione del vincolo, invece $mg\sin\theta$ rappresenta una f. di richiamo verso la posizione di equilibrio (cf. pendolo)

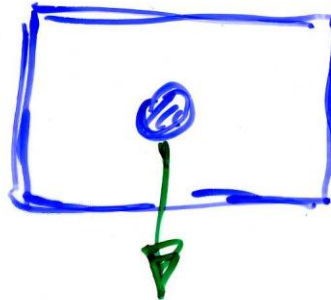
Tipi di equilibrio (2)

2)



instabile

3)



indifferente !
(da non verificare)



Pise?



perché le
piramidi
non hanno
le punte
in ferro?

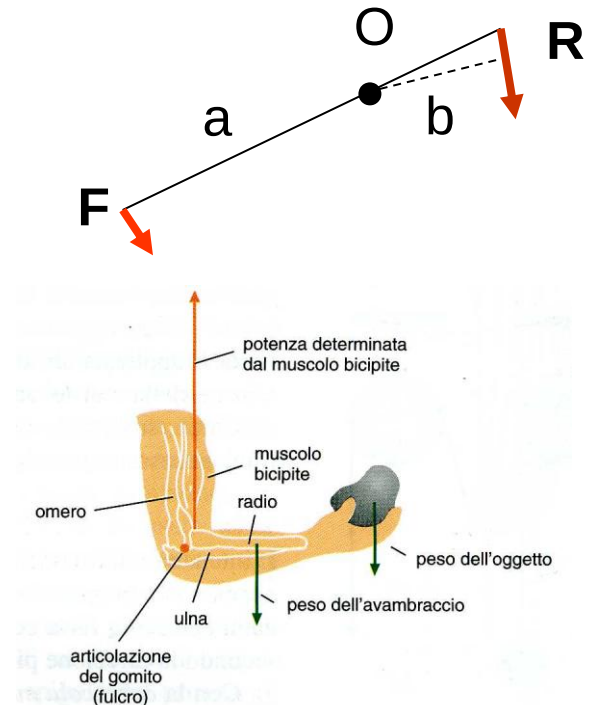
Leve

- leva: c.r. che ruota attorno ad un asse fisso (fulcro) in modo che M_F (potenza) possa bilanciare M_R (resistenza)

$$M_F + M_R = 0 \rightarrow M_F = -M_R$$

$\rightarrow Fa = Rb \rightarrow F/R = b/a$ con a,b rispettivi bracci
(vantaggiosa, se $F < R$)

- leva di 1° tipo: fulcro O fra F e R
(R e F concordi)
- leva di 2° tipo: R fra O e F
(R e F discordi)
- leva di 3° tipo: F fra O e R
(R e F discordi)



Moto in generale

- il moto di un c.r. libero in generale è scomponibile nel moto di traslazione del baricentro e nel moto di rotazione intorno al baricentro – per un c.r. con un asse fisso è possibile solo il moto di rotazione



Caroline Kostner in pura **traslazione** e in **rototraslazione** (Campionati Europei, 2007)



una giostra in pura **rotazione** attorno ad un asse fisso: stessa ω , diversa $v = \omega r$, diversa $a_c = \omega^2 r$



Momento angolare e momento d'inerzia

- p.m., si definisce momento angolare (o della q.d.m.) il vett.

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}$$

$$L = mvr = (mr^2)\omega = I\omega \quad (\text{poichè } \mathbf{r} \text{ e } \mathbf{v} \text{ sono } \perp \text{ nelle rotazioni})$$

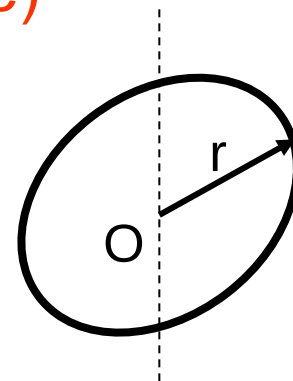
il prodotto $I = mr^2$ si chiama **momento d'inerzia** (scalare) e gioca per le rotazioni il ruolo giocato della massa per le traslazioni

- c.r. esteso scomposto in particelle m_i , r_i , v_i – stesse ω , α

$$L = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \omega (\sum_i m_i r_i^2) = \omega I \quad (\mathbf{r}_i \text{ e } \mathbf{v}_i \text{ perpendicolari})$$

$$I = \sum_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm \quad \text{momento d'inerzia (scalare)}$$

ad es. anello di raggio r cost. $I = r^2 \int dm = mr^2$





Momento angolare e momento d'inerzia (2)

dimensioni e unità del momento angolare

- $[\text{Momento angolare}] = [LQ] = [ML^2T^{-1}]$
- unità SI: $1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}$ [joule (J) unità di energia]
- CGS: $1 \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-1} = 1 \text{ erg} \cdot \text{s} =$ [erg unità di energia]
- $= 10^{-7} \text{ J} \cdot 1 \text{ s} = 10^{-7} \text{ Js}$

dimensioni e unità del momento d'inerzia

- $[I] = [ML^2]$
- unità SI: $\text{kg} \cdot \text{m}^2$
- CGS: $1 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 =$
- $= 10^{-3} \text{ kg} \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 = 10^{-7} \text{ kg m}^2$



Rotazioni: p.m. rispetto ad asse fisso (moto circolare generico)

- circonferenza di raggio r , fisso, costante ($\vec{r}$ varia)
- quando P si muove lungo la circonferenza varia $\theta = \theta(t)$
rad.! – (p.m. oppure disco, cilindro scomposti in particelle)

- $\Delta s = r\Delta\theta$

$$OP = r$$

- $v = \Delta s / \Delta t = r\Delta\theta / \Delta t = r\omega$

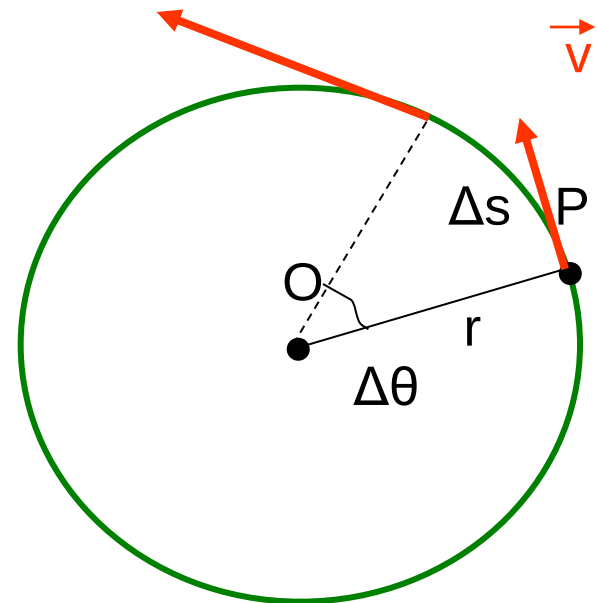
- $a_t = \Delta v / \Delta t = r\Delta\omega / \Delta t = r\alpha$

- $a_c = v^2 / r = \omega^2 r$

- se $\alpha = \text{cost}$ si può ricavare

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$$

$$\text{cf. } v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0) \quad [\text{vedi p. 19}]$$



($\alpha = 0$ nel moto
circolare uniforme)



Il principio per i corpi in rotazione

- p.m., si parte da $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ($F = ma = mr\alpha$) e si moltiplica vettorialmente a dx per $\mathbf{r}$, si ha in modulo

$$M = rF = rma = rmr\alpha = (mr^2)\alpha = I\alpha$$

- c.r. esteso, analogamente avremo, dopo averlo scomposto in particelle,

$$M_{\text{ris}} = \sum_i M_i = (\sum_i m_i r_i^2)\alpha \quad (\text{poichè tutti gli } \mathbf{M}_i \text{ sono paralleli})$$

$$M_{\text{ris}} = I\alpha$$

$$(\text{cf. } \mathbf{F}_{\text{ris}} = m\mathbf{a})$$

- possiamo riscrivere

$$M_{\text{ris}} = I\Delta\omega/\Delta t = \Delta(I\omega)/\Delta t = \Delta L/\Delta t \quad (I \text{ è cost.!!})$$

$$\text{se } M_{\text{ris}} = 0$$

$$\Delta L/\Delta t = 0, \quad L = \text{cost.}$$

si ha

(conservazione del momento angolare)



cons. momento angolare (es.)

- pattinatrice su ghiaccio durante una piroetta: se chiude le braccia, $I [= \sum mr^2]$ diminuisce e ω aumenta e viceversa (L è costante, $M_{\text{peso}} = 0$ rispetto all'asse di rotazione)

$$L = I_0 \omega_0 = I \omega \quad \rightarrow \quad \omega = (I_0/I) \omega_0$$

- (*)collasso stellare – stella con $m = 2M_S$, $r_1 = R_S = 7 \cdot 10^5$ km, $T_{\text{rot}} = 10$ g che collassa gravitazionalmente ad una stella di neutroni molto densa, stessa massa, $r_2 = 10$ km; quale sarà la nuova velocità angolare?

si può calcolare

Assumiamo sfere uniformi: $I_i = \frac{2}{5} m r_i^2$ - il sistema è isolato, niente F_{est} : $I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$

$$\omega_2 = \omega_1 (I_1/I_2) = \omega_1 (\cancel{2/5} m r_1^2) / (\cancel{2/5} m r_2^2) = \omega_1 (r_1^2/r_2^2) = 4 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$$

OK? $v_{\text{perif}} = 4 \cdot 10^4 \text{ rad/s} \cdot 10^4 \text{ m} = 4 \cdot 10^8 \text{ m/s} !!$ ci vorrebbe un calcolo relativistico



Lavoro di una forza

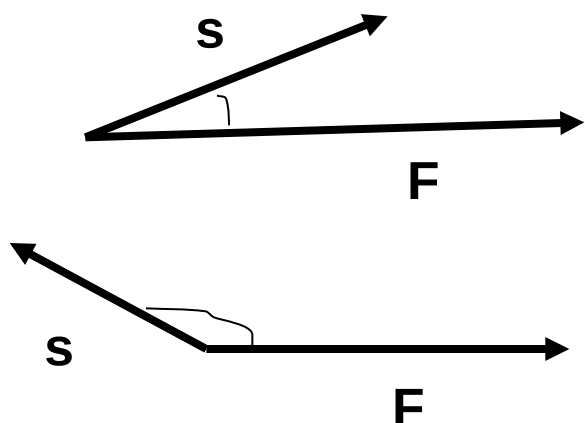
1. forza cost. $\mathbf{F}$ applicata ad un p.m., spostamento finito rettilineo $\mathbf{s}$ del p.m.

$$\mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = F s \cos\theta$$

$$(\mathbf{s} \cdot \mathbf{F})$$

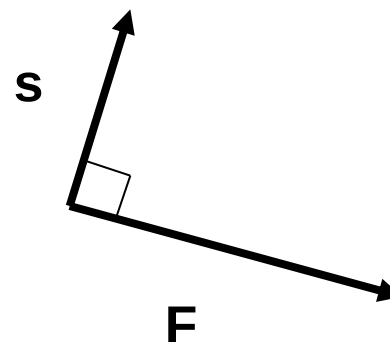
prodotto
scalare

spostamento del punto di applicazione di $\mathbf{F}$ parallelo ad $\mathbf{F}$:
 $\mathcal{L} = 0$ se $F = 0$, $s = 0$, $\theta = 90^\circ, 270^\circ$



$$\mathcal{L} > 0$$

$$\mathcal{L} < 0$$



$$\mathcal{L} = 0$$



Lavoro (2)

- dimensioni del lavoro (stesse del momento di F)
 $[\mathcal{L}] = [Fs] = [MLT^{-2} L] = [ML^2T^{-2}]$
unità SI: $1N \cdot 1m = 1 \text{ joule} = 1 J$ “
CGS: $1cm \cdot 1dina = 1 \text{ erg}$ “
 $1 \text{ erg} = 10^{-2} m \cdot 10^{-5} N = 10^{-7} J$
(J e erg sono usate solo per lavoro, energia e calore)
- Potenza: rapidità con cui è eseguito un lavoro
 $\mathcal{P} = \mathcal{L} / \Delta t$ (a v cost. $\mathcal{P} = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} / \Delta t = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv \cos \theta$)
 $[\mathcal{P}] = [ML^2T^{-3}]$
unità SI: $1 J/s = 1 \text{ watt} = 1 W$; CGS: 1 erg/s
altra unità, cavallo vapore: $1 CV = 735 W = 0.735 kW$



Lavoro di una forza variabile

2. forza variabile (mod.,direz.,verso), traiettoria curva;
dividiamo la traiettoria
in tratti $\Delta \mathbf{s}$ con $\mathbf{F}$ cost.
nel tratto ($\rightarrow$ definiz.
precedente)

$$\Delta \mathcal{L} = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} = F \Delta s \cos \theta$$

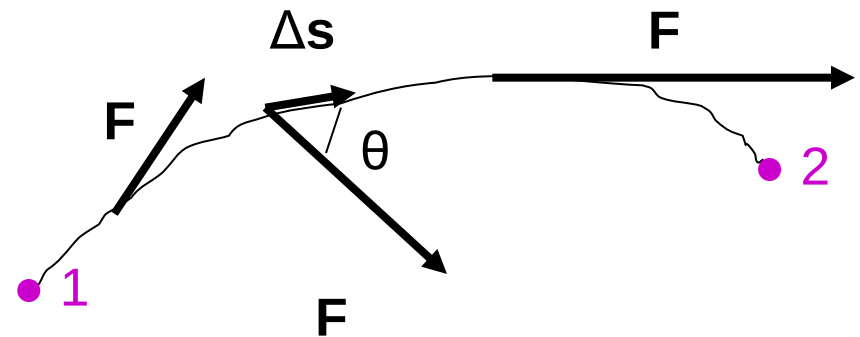
per ottenere il lavoro totale:

$$\mathcal{L} = \sum \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{s} = \sum F \Delta s \cos \theta$$

in effetti a rigore:

$$\mathcal{L} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \sum F \Delta s \cos \theta = \int_1^2 F \cos \theta \, ds$$

(somma su ∞ tratti di lunghezza infinitesima ds)





Lavoro di F_{ris} e energia cinetica

- p.m. di massa m soggetto a $F_{\text{ris}} = F$ cost, $a = F/m \Rightarrow$ moto unif. accel; prendiamo $\Delta t \Rightarrow \Delta x = x_2 - x_1$ nella direzione del moto; si ha

$$a(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}(v_2^2 - v_1^2) \quad [\text{vedi p. 19}]$$

$$\mathcal{L} = F(x_2 - x_1) = ma(x_2 - x_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

si definisce energia cinetica

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

(sempre ≥ 0 , poichè $m \geq 0$ e $v^2 \geq 0$)

il lavoro di F_{ris} uguaglia ΔK del p.m.

- corpo di massa m , moto traslatorio (stessa v per tutti i punti):
 $K = \frac{1}{2}mv^2$; sistema di forze agenti sul corpo che trasla (traiettoria retta o curva)

$$\mathcal{L}_{\text{ris}} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \Delta K$$

(teorema dell'energia cinetica)

lavoro totale delle f. agenti = variazione energia cinetica



Energia

- **energia** = capacità di compiere lavoro (dimensioni, unità: le stesse del lavoro)
- es.1 **energia cinetica**: corpo in moto ($\mathbf{v}$, K) comprime una molla, $\mathcal{L}$ contro la f. elastica
- es.2 sasso lanciato verso l'alto ($\mathbf{v}_0$, K), $\mathcal{L}$ contro la f. di gravità



- es.3 si lascia cadere un corpo da fermo ($K = 0$): l'energia cinetica raggiunta quando il c. tocca il suolo dipende dalla quota iniziale (**energia potenziale**) – moto unif. acc. $v_0^2 = 2gh$



Forze conservative

- se il lavoro $\mathcal{L}$ delle f. dipende **solo** dalla posizione 1 (iniziale) e 2 (finale) e **non** dalla scelta del percorso 12:
⇒ **forze conservative**
- le f. che dipendono solo dalla posizione sono conservative (in particolare le f. costanti sono conservative!)
- esempi di f. conservative: f. peso $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, f. elastica $\mathbf{F} = k(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, f. elettrostatica $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, vedi più avanti, etc.
- se le f. dipendono da t esplicitamente oppure anche implicitamente (ad es. attraverso $\mathbf{v}$, f. di attrito (resistenza) dell'aria $\mathbf{F}_a = -cA\mathbf{v}^2(\mathbf{v}/v)$, f. di attrito radente $\mathbf{f} = -\mu N(\mathbf{v}/v)$, f. magnetica $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, vedi più avanti, etc.) **non** sono forze conservative



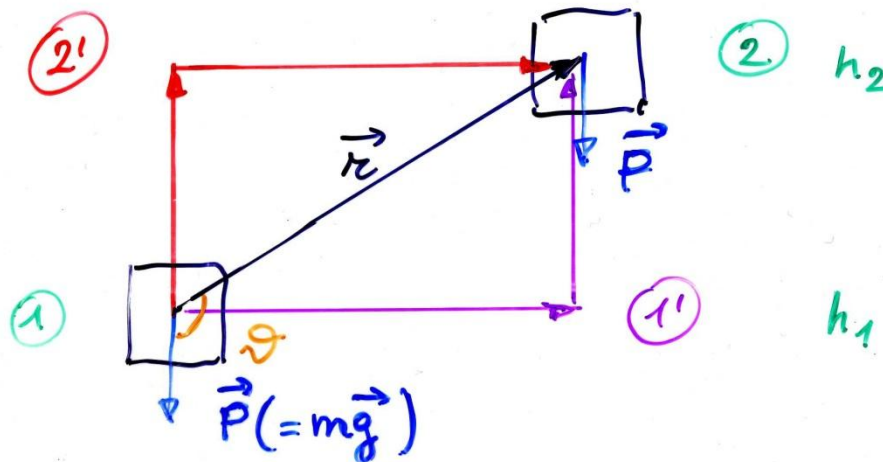
Forze conservative (2)

- es. f. peso (costante), supponiamo di spostare una massa m da una quota h_1 ad una h_2 , posso scegliere diversi percorsi: 12 (diretto), 11'2, 12'2 etc.

$$\mathcal{L}_{12} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{r} = Pr \cos\theta = -mg(h_2 - h_1)$$

$$\mathcal{L}_{11'2} = \mathcal{L}_{11'} + \mathcal{L}_{1'2} = 0 + [-mg(h_2 - h_1)] = -mg(h_2 - h_1)$$

$$\mathcal{L}_{12'2} = \mathcal{L}_{12'} + \mathcal{L}_{2'2} = -mg(h_2 - h_1) + 0 = -mg(h_2 - h_1)$$





Forze conservative (3)

- il lavoro è sempre lo stesso, proviamo 13'32, 12 secondo una spezzata (a scalini), 12 secondo una curva continua

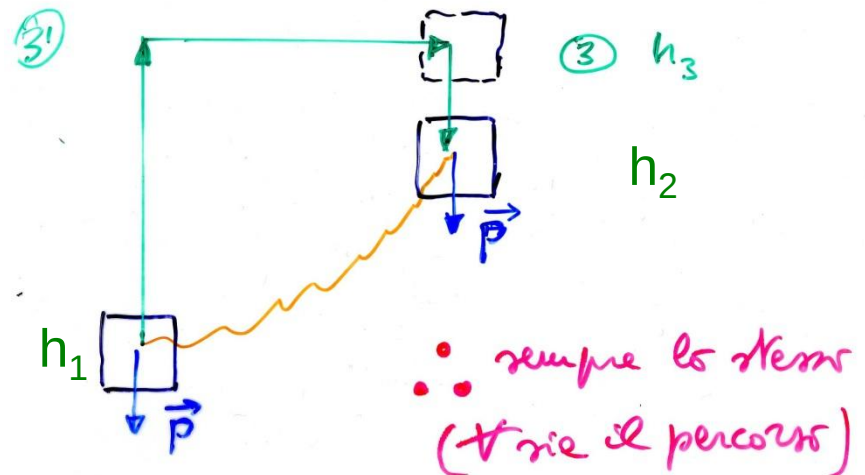
...

$$\mathcal{L}_{13'32} = \mathcal{L}_{13'} + \mathcal{L}_{3'3} + \mathcal{L}_{32} = -mg(h_3 - h_1) + 0 + mg(h_3 - h_2) \\ = -mg(h_2 - h_1)$$

$$\mathcal{L}_{12\text{spezzata}} = \Sigma(0 + [-mg\Delta h])$$

...

- il lavoro dipende solo dalla quota iniziale e finale, non dal modo in cui si passa da 1 a 2





Energia potenziale

- se $\mathbf{F}$ è conservativa (dipende solo dalla posizione) ho che $\mathcal{L}_{12}$ è **indipendente dal percorso e dipende solo dagli estremi** (di conseguenza sarà anche $\mathcal{L}_{11} = 0$ sempre)
- posso porre

$$\mathcal{L}_{12} = W_1 - W_2 = -\Delta W$$

dove W è l'energia potenziale: il lavoro da 1 a 2 è = $-$ (la variazione dell'energia potenziale)

NB si definisce **solo** la variazione dell'e.p., **non** il suo valore in assoluto

ad es. f. peso

$$W(h) - W(0) = -\mathcal{L}_{0h} = mgh$$

se, *arbitrariamente*, scelgo $W(0) = 0$, ho $W(h) = mgh$

[ma qualsiasi altra scelta andrebbe bene lo stesso: $\Delta W = W_2 - W_1 = W_2' - W_1' = (W_2 + c) - (W_1 + c) = W_2 + c - W_1 - c$ con c cost.]



Conservazione dell'energia meccanica

- p.m. o corpo soggetti a f., posso definire in genere

$$E = K + W$$

energia totale meccanica, somma di e. cinetica ed e. potenziale (con $\mathcal{L}_{12} = K_2 - K_1$, lavoro **della f. risultante**, vedi p. 91), **scalare**

- **se** le f. sono conservative avrò

$$\mathcal{L}_{12} = K_2 - K_1 = W_1 - W_2$$

da cui

$$K_2 + W_2 = K_1 + W_1 = \text{cost.} \quad (= E_0)$$

oppure

$$\Delta E = 0$$

legge di conservazione dell'energia totale meccanica



Conservazione dell'energia meccanica (2)

- ad es.1 f. peso / caduta libera, si parte con $\mathbf{v} = 0$ dalla quota h

$$E(h) = K(h) + W(h) = 0 + mgh = mgh \quad (= E_0)$$

$$E(0) = K(0) + W(0) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + 0 = \frac{1}{2}m \cdot 2gh = mgh$$

genericamente, $0 \leq y \leq h$

$$E(y) = \frac{1}{2}mv_y^2 + mgy = mgh \quad (= E_0)$$

- ad es.2 moto di un p.m. di massa m attaccato ad una molla di costante elastica k , x allungamento della molla

$$E(x) = K(x) + W(x) = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2(*) \quad (= E_0)$$

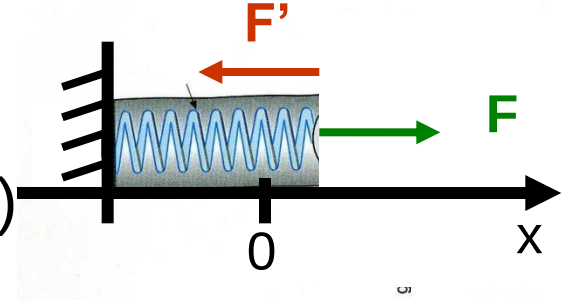
$$E(0) = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \quad (\text{posizione di equilibrio, } x = 0)$$

$$E(A) = \frac{1}{2}kA^2 \quad (\text{massima elongazione, } v = 0)$$

$$\Rightarrow E_0 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Lavoro della forza elastica

- molla orizzontale, $x = 0$ a riposo,
data una f. deformante
 $x = F/k$ ($F = kx$, legge di Hooke)



f. elastica della molla F'

⇒ in una nuova posizione di equilibrio

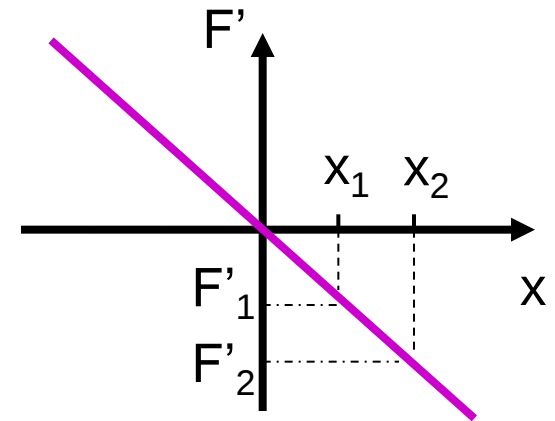
$$\mathbf{F} + \mathbf{F}' = 0; \quad \mathbf{F}' = -\mathbf{F}; \quad F' = -F = -kx$$

allunghiamo la molla da x_1 a x_2 ,

F' passa da $F'_1 = -kx_1$ a $F'_2 = -kx_2$

F' è variabile ⇒ uso $\underline{F}' = (F'_1 + F'_2)/2$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \underline{F}' \Delta x = (-kx_1 - kx_2)/2 \cdot (x_2 - x_1) \\ &= -\left(\frac{1}{2}k x_2^2 - \frac{1}{2}k x_1^2\right) = -\Delta W \end{aligned}$$





En. potenziale elastica ed en. totale

- en. potenziale della molla, allungamento x

$$W = \frac{1}{2}kx^2$$

- a stretto rigore si sarebbe dovuto fare (il risultato è uguale)

$$\mathcal{L} = \int_{x_1}^{x_2} F' dx = - \int_{x_1}^{x_2} kx dx = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = -k/2 (x_2^2 - x_1^2)$$

- lancio un blocco di massa m contro la molla con velocità v_0 secondo x su un piano orizz.: comprimerà la molla fino a fermarsi – ponendo $x_1 = 0$, $x_2 = A$ ($v_1 = v_0 = v_{\max}$, $v_2 = 0$); trascuriamo gli attriti, $\mathbf{P}$ ed $\mathbf{N}$ non fanno lavoro

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}kA^2 \quad \text{lavoro della f. elastica (molla)}$$

$$\Delta K = 0 - \frac{1}{2}mv_{\max}^2 \quad \text{variazione en. cinetica (blocco)}$$

$$\mathcal{L} = \Delta K \quad (\text{teor. dell'en. cinet.}) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

si ha un trasferimento di energia dal blocco alla molla



En. totale sistema massa più molla

- per due allungamenti generici x_1 e x_2 avrò

$$\Delta K = - \Delta W$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = - (\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2)$$

ovvero

$$\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

o anche

$$\frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2 = \text{cost} \quad (= E_0)$$

che è l'energia totale di un moto armonico nel tempo di periodo $T = 2\pi/\omega$ dove $\omega^2 = k/m$

(se il blocco resta agganciato alla molla, si muoverà di moto armonico semplice in assenza di attriti)



Lavoro delle forze non conservative(*)

- es. considero un blocco, $m = 2.04 \text{ kg}$, che si muove senza attrito su un piano sotto l'azione di $F = 15 \text{ N}$ cost. per un tratto $d = 2 \text{ m}$ (lavoro $Fd = 30 \text{ J}$)

$$\mathcal{L} = -\Delta W = K_2 - K_1$$

$$W(x) = -Fx + \text{cost} = F(d - x)$$

$$E_0 = 30 \text{ J}; \quad K \text{ cresce}; \quad W \text{ diminuisce di conseguenza}$$

$$E(x) = K(x) + W(x) = E_0 = \text{cost}$$

- se c'è attrito, ad es. $\mu = 0.5$, dovrò includere il lavoro della f. d'attrito non conservativa, $f = \mu N = \mu mg = 10 \text{ N}$, che si oppone al moto: $\mathcal{L}_{nc} = -fd = -20 \text{ J}$

$$\mathcal{L} = -\Delta W + \mathcal{L}_{nc} = K_2 - K_1$$

$$E(x) = K(x) + W(x) < E_0$$



- $$|\vec{v}| = \sqrt{2gh}$$

- 102



Meccanica 3a parte



Elasticità

Trazione e compressione

- i corpi reali non sono rigidi ma più o meno deformabili, il tipo di deformazione dipende da come si applicano le f.
- si definisce **sforzo** la f. applicata su una superficie A divisa la superficie stessa

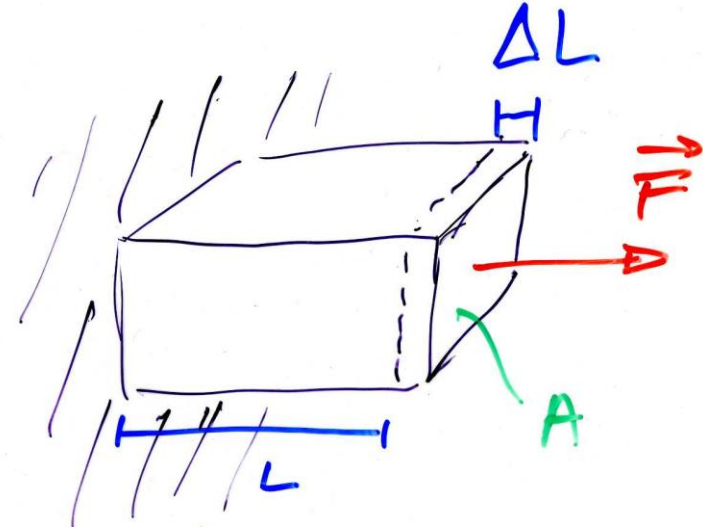
$$\text{sforzo} = F/A$$

$$[F/A] = [MLT^{-2}L^{-2}] = [ML^{-1}T^{-2}]$$

unità SI: N/m² o pascal (Pa)

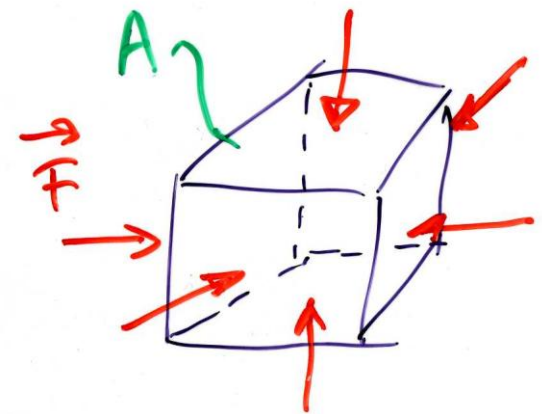
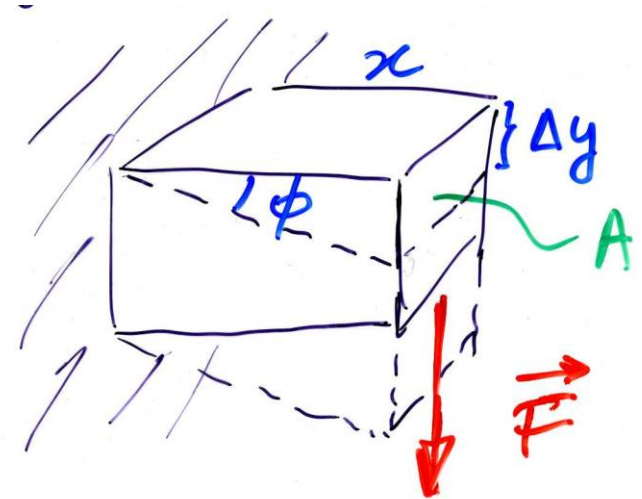
CGS: 1 dyne/cm² = 10⁻¹ N/m²

- **deformazione** = $\Delta L/L$ (numero puro)
adimensionale - la definizione di deformazione fa riferimento al tipo di sforzo: trazione (compressione) implica sforzo ortogonale alla superficie



Sforzo di taglio e di volume

- taglio: forza parallela alla sup. A
- sforzo = F/A
- deformazione = Φ (adimensionale)
con $\text{tg}\Phi = \Delta y/x$
- sforzo di volume (presente anche per liquidi e gas, senza forma propria)
- sforzo = $F/A = \Delta p$ (pressione)
- deformazione = $-\Delta V/V$

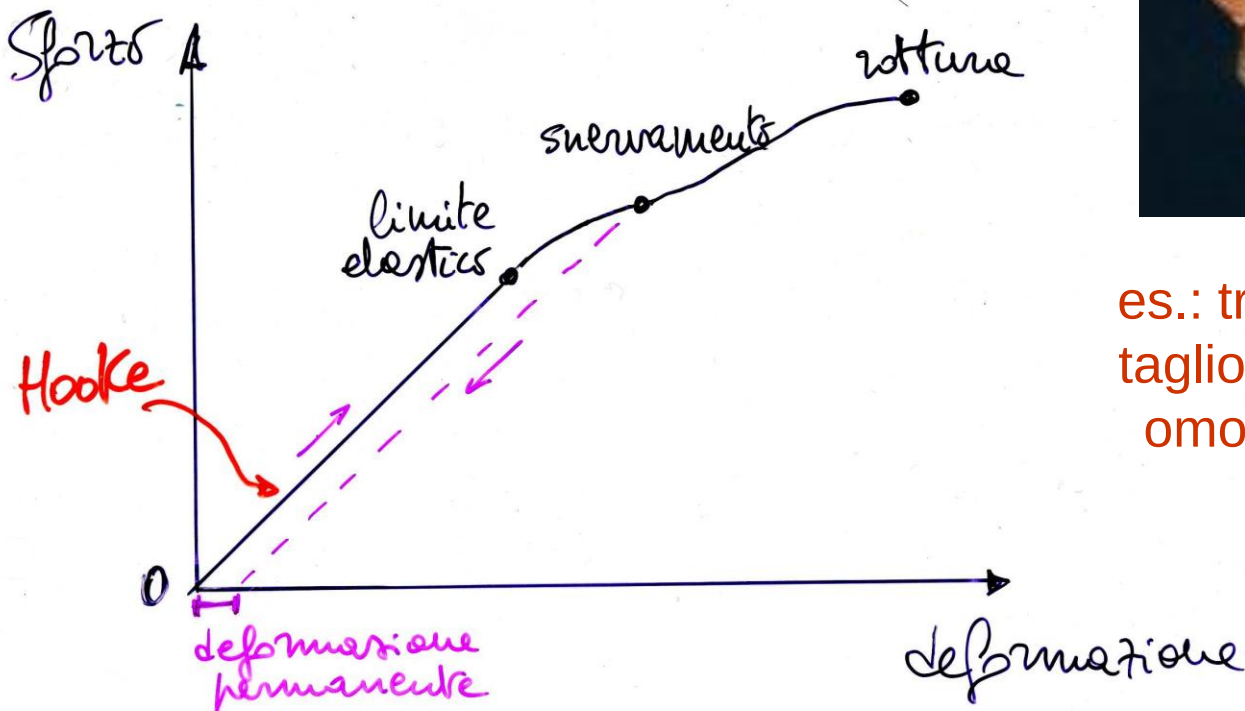


Legge di Hooke

- per piccole deformazioni, entro il limite elastico $\Rightarrow$ vale la legge di Hooke

sforzo $\propto$ deformazione

(cf. con $F = kx$, forza elastica)



es.: trazione,
taglio, sforzo
omogeneo

Legge di Hooke (2)



1. trazione/compress.

$$F/A = Y \Delta L/L$$

(Y – modulo di Young)

2. taglio

$$F/A = n \Delta \Phi$$

(n – modulo di rigidità)

3. elasticità di vol.

$$\Delta p = - B \cdot \Delta V/V$$

(B – modulo omogeneo)

	$Y (10^9 \frac{N}{m^2})$	$n (10^9 \frac{N}{m^2})$	$B (10^9 \frac{N}{m^2})$
Solidi Elastici	Acciaio	210	83
	Pb	18	8
	Oss	~10	—
	Muscoli	~0.005	—
	Gomme	~0.001	—
Liquidi	H ₂ O	}	}
	Hg	}	}
Gas	gas perfetto (1 atm)	}	}

2.2
26

~0.0001



Applicazione della legge di Hooke

- $\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{Y} \frac{F}{A} \Rightarrow \Delta L = F \cdot \frac{L}{YA} = F/k$ con $k = YA/L$

- quanto si deforma l'osso di una gamba?
- $Y_{\text{osso}} \sim 10^{10} \text{ N/m}^2$
- 40 kg (su una gamba) $\Rightarrow F \sim 400 \text{ N}$
- $L \sim 0.9 \text{ m}$ (1/2 altezza)
- $A \sim 10 \text{ cm}^2 \sim 10^{-3} \text{ m}^2$

$\Rightarrow k = YA/L \sim 1.1 \cdot 10^7 \text{ N/m}$

$\Delta L = F/k \sim 3.6 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 36 \mu\text{m}$

(verifica a posteriori: $\Delta L/L \sim 4 \cdot 10^{-5}$ piccolo, si può quindi ammettere che valga la legge di Hooke)



Applicazione delle leggi dell'elasticità(*)

- confronto formica-elefante sotto l'azione del proprio peso
- assumiamo che siano fatti con lo **stesso materiale**, **stessa resistenza al carico**, **stessa densità**

$$\rho = M/V = M/L^3$$

- schematicamente prendiamo dei cubi, **formica**, area di base $A = L^2$, $M = \rho V = \rho L^3$
- $F/A = Mg/L^2 = \rho L^3 g/L^2 = \rho L g$
- **elefante**, $L' = nL$, $A' = n^2 L^2$, $P = n^3 Mg$ $n \sim 3000$
- $F'/A' = n^3 Mg/n^2 L^2 = n \rho L g$

se lo sforzo di rottura è lo stesso $\Rightarrow$ zampe (ossa) dell'e. devono essere molto più tozze di quelle della f.



Fine della meccanica