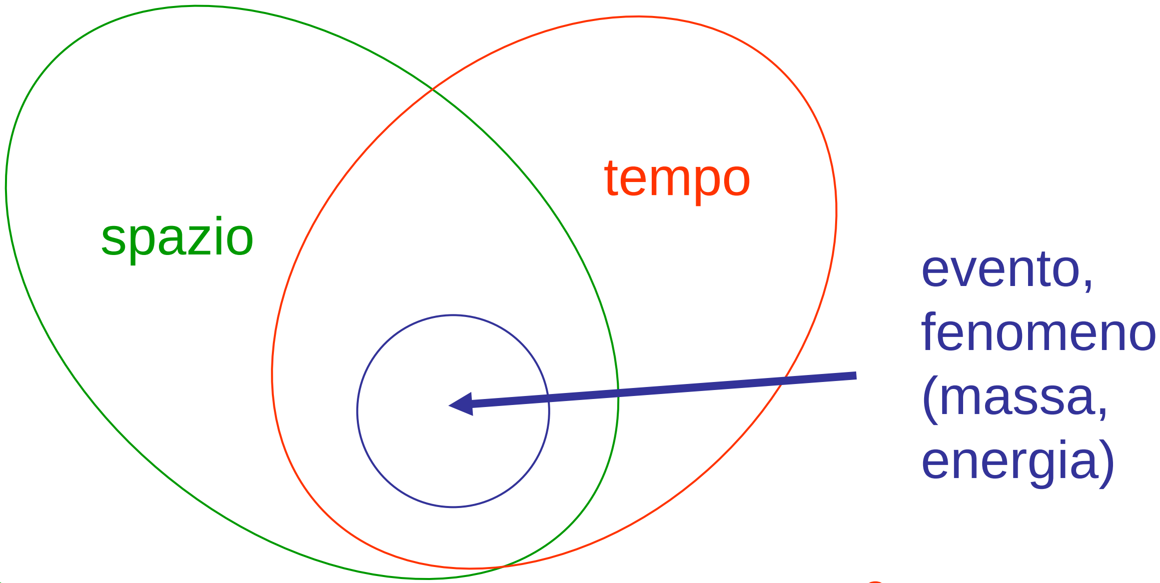
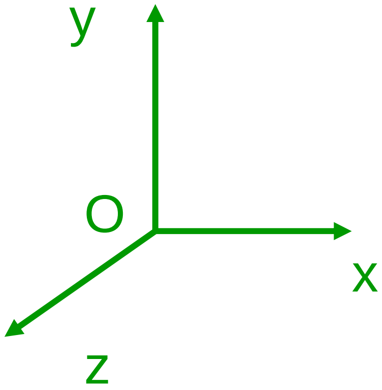
Meccanica

Corso di Fisica per CTF
AA2007/08

Preliminari: spazio & tempo





≤ 3 dimensioni

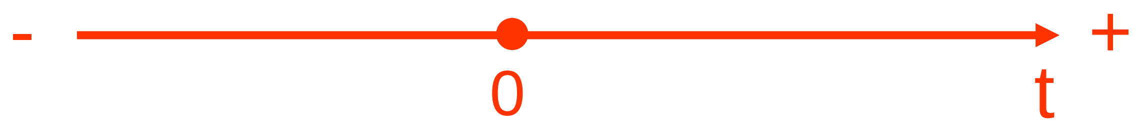
- separazione | non
- distanza | coincidenza

1 dimensione

- prima/dopo | non
- durata | simulta-
- intervallo | neità

Tempo (2)

- tempo, t, trascorso a partire da un'origine dei tempi (arbitraria, comoda), +vo o –vo, futuro o passato – noi andiamo solo verso il futuro



(non esiste il tempo assoluto, il big bang, la nascita dell'universo, ha avuto luogo ≈ 15×10^9 anni fà, Hubble, 1920)

- intervallo di tempo, $\Delta t = t_2 - t_1$, fra due eventi, assolutamente svincolato dall'origine dei tempi (matematicamente è quasi lo stesso se si pone $t_1 = 0$ e $t_2 = t$)

Punto materiale (P)

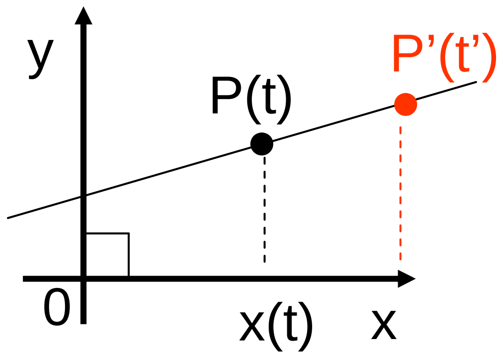
- estensione piccola rispetto al laboratorio
- struttura ininfluente ai fini del movimento
- es.
  - stella, pianeti rispetto al sistema solare
  - sasso rispetto alla terra/Aula_1_Via_Nosadella
  - molecola in un volume di gas (ad es. 1 litro)
  - etc.
- NB1 il p.m. è differente da (non è identico a) un punto geometrico
- NB2 il fatto che sia materiale (m) sarà rilevante poi nella dinamica

Meccanica 1a parte

Cinematica

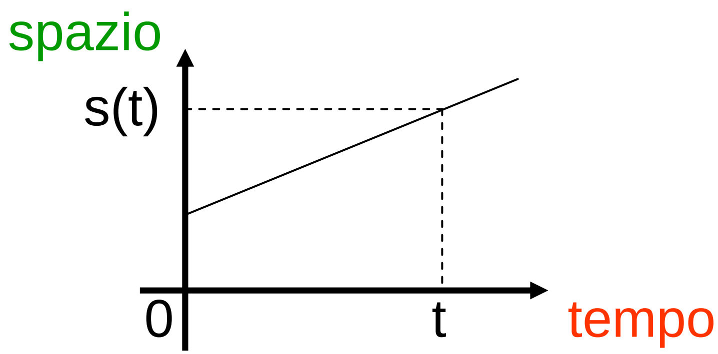
Sistemi di riferimento, eq. oraria

- il moto è relativo => sistema di riferimento



(P occupa varie posizioni nel piano cartesiano al passare di t; 1 dimensione: x occupa varie posizioni lungo l'asse x al passare di t => x = x(t))

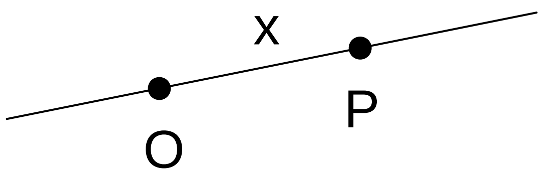
- spazio percorso nel tempo, eq. oraria

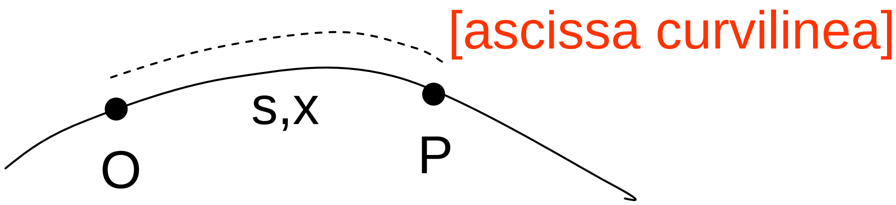


se ci interessa la distanza percorsa in un certo tempo indipendentemente dalla direzione

Moto in 1 dimensione

- in questo caso conta solo il verso +vo o -vo dello spostamento nel tempo => possiamo usare quantità scalari (non cambia la direzione)
- due possibilità: moto lungo una retta, x, o moto lungo una traiettoria (curva) fissata, s o x





- si definisce

$$\text{velocità media} = \frac{\text{spazio percorso}}{\text{tempo impiegato a percorrerlo}}$$

$$\boxed{v_m = \frac{s}{t}} \quad \text{o} \quad \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{o} \quad \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Velocità

- la velocità istantanea è ($\Delta t \to 0$ uguale a $t_2 \to t_1$)

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{dx}{dt}}$$

in generale
$x = x(t)$
$v = v(t)$

- le dimensioni di v sono

$$[v] = [s/t] = [st^{-1}] = [LT^{-1}]$$

- le unità di misura nel SI sono m/s e nel CGS cm/s – altra unità usata è km/h

6 m/s = **?** cm/s; si moltiplica per **1** = 10^2 cm/m

$$6(\cancel{m}/s)\cdot 10^2\ cm/\cancel{m} = 6\cdot 10^2\ cm/s$$

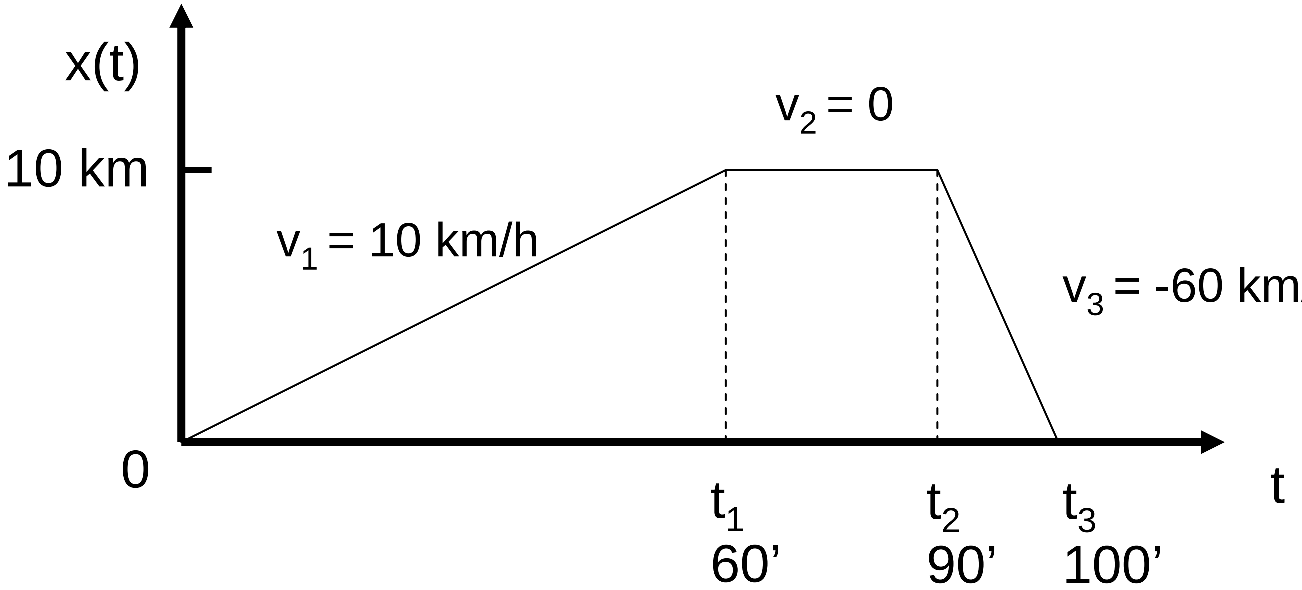
se devo convertire un'unità a numeratore la metto a denominatore nel rapporto unitario etc.; NB $s^{-1} \to s^{-1}$

Velocità (2)

- 2.5 m/s = ? km/h : **1** = 1 km/10^3 m **1** = 3.6 10^3 s/h

$$2.5\,\cancel{m}/\cancel{s} \cdot 3.6\cdot 1\cancel{0}^3\,\cancel{s}/h \cdot 1/1\cancel{0}^3\,km/\cancel{m} = 2.5 \cdot 3.6\,km/h = 9.0\,km/h$$

- **NB** **in generale: v. media ≠ media delle velocità** (<u>se</u> i Δt sono diversi), ad es.



Velocità (3)

- $v_m = [x(t_3)-x(0)]/(t_3-0) = (0-0)/100' = 0$
- $\underline{v} = (\Sigma_{i=1,3}\, v_i)/3 = (10+0-60)/3$ km/h $= -17$ km/h
- in formule

$v_m = (\Sigma_{i=1,n}\Delta x_i)/(\Sigma_{i=1,n}\Delta t_i) = (\Sigma_{i=1,n} v_i \Delta t_i)/(\Sigma_{i=1,n}\Delta t_i)$

quindi <u>solo se</u> i Δt_i sono tutti $= \Delta t$, si ha

$\Sigma_{i=1,n}\Delta t_i = \Sigma_{i=1,n}\Delta t = n\,\Delta t$ e

$\Sigma_{i=1,n} v_i \Delta t = \Delta t \cdot \Sigma_{i=1,n} v_i$

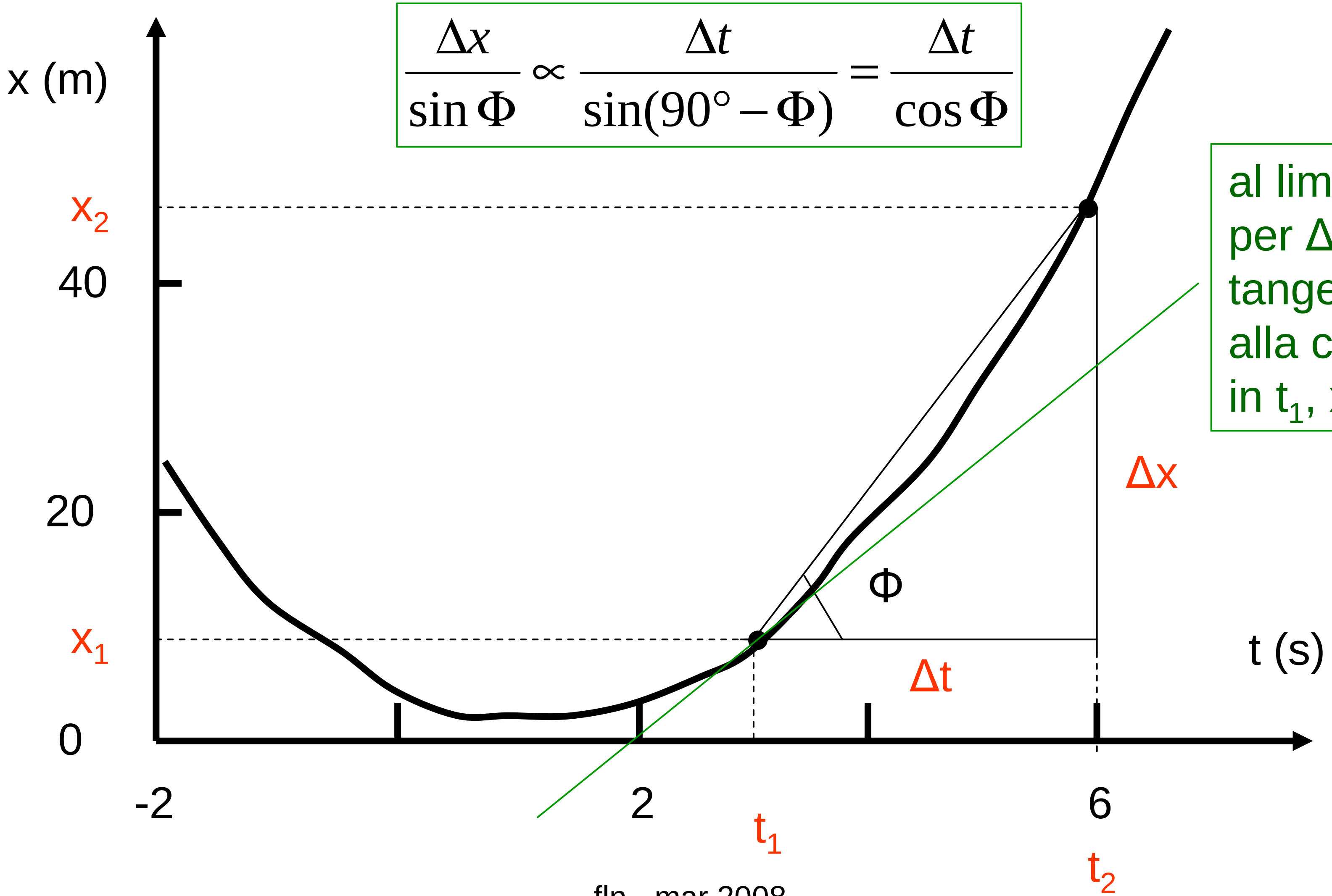
$\Rightarrow$ $v_m = \Delta t \cdot (\Sigma_{i=1,n} v_i)/(n\Delta t) = (\Sigma_{i=1,n} v_i)/n = \underline{v}$

- se si conoscono Δx_i, v_i => $\Delta t_i = \Delta x_i / v_i$ e si ha

$v_m = (\Sigma_{i=1,n}\Delta x_i)/(\Sigma_{i=1,n}\Delta x_i/v_i)$ (formula utile per gli esercizi)

Significato geometrico di v_m e di v istantanea

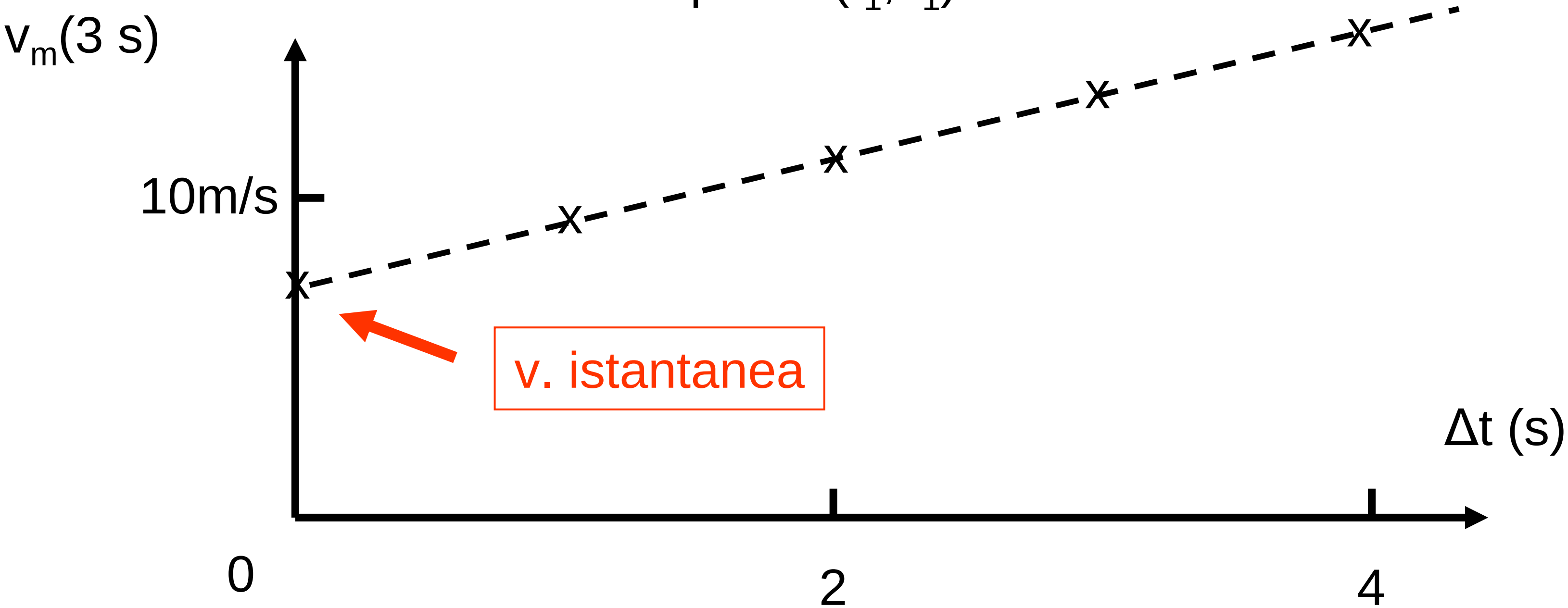
$$\frac{\Delta x}{\sin\Phi} \propto \frac{\Delta t}{\sin(90° - \Phi)} = \frac{\Delta t}{\cos\Phi}$$



al limite per $\Delta t \to 0$: tangente alla curva in t_1, x_1

Significato geometrico di v_m e di v istantanea (2)

- data la curva x = x(t)   (lucido precedente)
  - $v_m = \Delta x/\Delta t \sim \mathrm{tg}\,\Phi$ dà la direzione della corda tirata fra i punti (t_1,x_1) e (t_2,x_2)
  - $v(t_1) = dx/dt|_{t1}$ dà la direzione della tangente alla curva nel punto (t_1,x_1)



Accelerazione media e istantanea

- in generale v = v(t), si definisce accelerazione media

$$\boxed{a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

- e accelerazione istantanea

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{dx}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}}$$

- $[a_m]$ =[a] = [v/t] = $[st^{-1}t^{-1}]$ = $[LT^{-2}]$
- unità SI: m/s^2 CGS: $cm/s^2 = 10^{-2}$ cm/s^2
- g (accelerazione di gravità) ≈ 9.81 m/s^2 = 981 cm/s^2

Moto uniforme e uniformemente accelerato

Casi particolari

- moto uniforme (rettilineo o su traiettoria fissa, potrei usare anche x)

$v_m = v_0 = \text{cost} = \Delta s/\Delta t = (s-s_0)/(t-0)$ indipendente da t

$\Rightarrow$ $\boxed{s = v_0 t + s_0}$ (*) $s = s(t)$

$a = 0$ infatti $a_m = (v_2-v_1)/(t_2-t_1) = (v_0-v_0)/(t_2-t_1) = 0$

- moto uniformemente accelerato

$a_m = a_0 = \text{cost} = \Delta v/\Delta t = (v-v_0)/(t-0)$ indipendente da t

$\Rightarrow$ $\boxed{v = a_0 t + v_0}$ (*) $v = v(t)$

capita spesso! per es. g

(*) le cost. s_0, v_0 dipendono dalla scelta dell'origine dei t

Moto uniformemente accelerato (2)

1. $$v_m = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow s_2 = s_1 + v_m(t_2-t_1)$$

2. $$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow v_2 = v_1 + a_0(t_2-t_1)$$

v varia linearmente → prendo $v_m = (v_1+v_2)/2$ (centro dell'intervallo)

$$s_2 = s_1 + ½(v_1+v_2)(t_2-t_1) = s_1 + ½(v_1+v_1+a_0(t_2-t_1))(t_2-t_1)$$

$$s_2 = s_1 + v_1(t_2-t_1) + ½a_0(t_2-t_1)^2$$ ora pongo $t_1 = 0$ e $t_2 = t$

$s_1 = s(0) = s_0$; $s_2 = s(t)$; $v_1 = v(0) = v_0$; $v_2 = v(t)$

(NB t_1 e t_2 sono qualsiasi)

Moto uniformemente accelerato (3)

$$s(t) = s_0 + v_0(t-0) + \tfrac{1}{2}a_0(t-0)^2$$

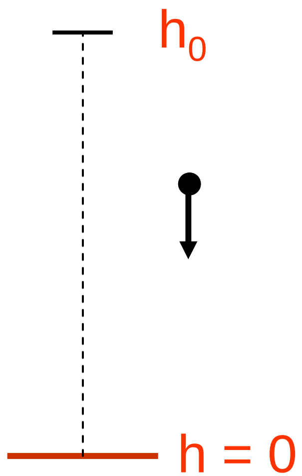
$$\begin{cases} s(t) = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}a_0 t^2 \\ v(t) = v_0 + a_0 t \\ a(t) = a_0 \end{cases}$$

dove s_0,v_0 sono spazio percorso e velocità a $t = 0$
Se considero un moto rettilineo unif. acc., userò x (anche come ascissa curvilinea) e senza rifare i passaggi (!)

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}a_0 t^2 \\ v(t) = v_0 + a_0 t \\ a(t) = a_0 \end{cases}$$

Moto uniformemente accelerato (4)

Se considero la caduta di un grave che parte da fermo in assenza di attrito, chiamando h(t) l'altezza rispetto al suolo, ponendo cioè $h(0) = h_0$, poichè $a_0 = -g$ accelerazione di gravità in questo sistema di riferimento, ho



$$\begin{cases} h(t) = h_0 - \frac{1}{2} gt^2 \\ v(t) = -gt \\ a(t) = -g \end{cases}$$

e il grave raggiunge il suolo, $h = 0$, dopo un tempo

$t = \sqrt{(2h_0/g)}$ (da $0 = h_0 - \frac{1}{2} gt^2$)

Moti in una dimensione

– vario $a = a(t)$ (il più generale)

se $av > 0$ accelerato ($av < 0$ decelerato)

– uniforme $a = 0$; $v = \text{cost}$

– uniformemente accel. $a = \text{cost} = a_0$; $v = v(t)$

dalle 2 eq. per x(t) e v(t) si può eliminare il parametro t, per es. dalla 2ª,

$t = (v(t)-v_0)/a_0$

e sostituendo nella 1ª

$$x(t) = x_0 + v_0\underbrace{(v(t)-v_0)/a_0}_{t} + \tfrac{1}{2}a_0\underbrace{[(v(t)-v_0)/a_0]^2}_{t^2}$$

Una relazione importante per il moto unif. acc.

$$x(t) = x_0 + v_0\cancel{v}/a_0 - v_0^2/a_0 + \tfrac{1}{2}(v^2 - 2\cancel{v}v_0 + v_0^2)/a_0$$

$$= x_0 - \tfrac{1}{2}\,v_0^2/a_0 + \tfrac{1}{2}\,v^2(t)/a_0 = x_0 + \tfrac{1}{2}(v^2(t) - v_0^2)/a_0$$

che può essere riscritta

$$\boxed{2a_0(x(t) - x_0) = v^2(t) - v_0^2}$$

valida per qualsiasi moto uniformemente accel. – intervengono esplicitamente solo lo spazio, la velocità e l'accelerazione

$$\Longrightarrow \quad v(t) = \sqrt{[v_0^2 + 2a_0(x(t) - x_0)]} \qquad \text{etc.}$$

Derivazione e integrazione

- se conosco x(t) $\Longrightarrow$ v(t) =dx(t)/dt; a(t) = dv(t)/dt
- però nei problemi di meccanica (e non solo) si conosce l'accelerazione a = F/m (vedi 2ª legge della dinamica, $\vec{F} = m\vec{a}$, più avanti)

$\Longrightarrow$ bisogna seguire il cammino inverso ed integrare

$$v(t) = \int_0^t a(t)dt; \qquad s(t) = \int_0^t v(t)dt$$

(questa operazione è stata fatta "di nascosto" nel ricavare le formule del moto uniformemente accelerato)

Qualche semplice regola

- la derivata di una costante è zero $(d/dt)cost = 0$
  (ma anche $\Delta(cost) = cost - cost = 0$!)

  ad es. $dv_0/dt = 0$, $ds_0/dt = 0$ etc.
- una costante può essere portata fuori dal segno di derivazione (e di integrazione)

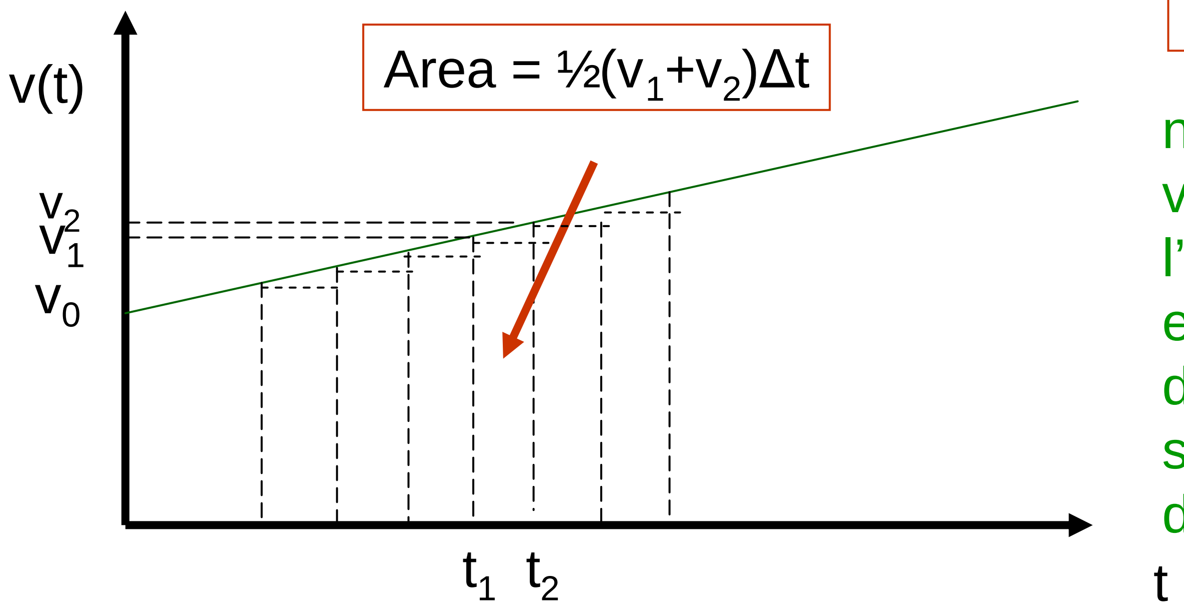
  ad es. $d/dt(½a_0t^2) = ½a_0(d/dt)t^2 = a_0t$ etc.
- la derivata di t^1 è $(d/dt)t = 1t^0 = 1$

  ad es. $d(v_0 + a_0t)/dt = 0 + a_0$ etc.
- l'integrale di una costante è una retta di pendenza costante

  ad es. $v(t) = \int_0^t a_0dt = a_0 \int_0^t dt = a_0[t]_0^t = a_0(t\text{-}0) = a_0t$
- l'integrale di t^1 è $t^2/2$ etc.

L'interpretazione geometrica dell'integrazione.

- l'integrazione corrisponde al calcolo dell'area sotto la curva descritta dalla funzione – a rigore è la somma delle aree dei rettangoli $v_1(t_1)(t_2-t_1)$ quando $t_2 \rightarrow t_1$ o $\Delta t \rightarrow 0$



$\Delta t = \Delta v / a_0$

nel nostro es., variazione lineare, l' integrale può essere calcolato direttamente sommando l'area dei trapezi

Sommario cinematica ad 1 dimensione

- $x(t) \quad \rightarrow \quad v(t) \quad \rightarrow \quad a(t)$ procedimento diretto

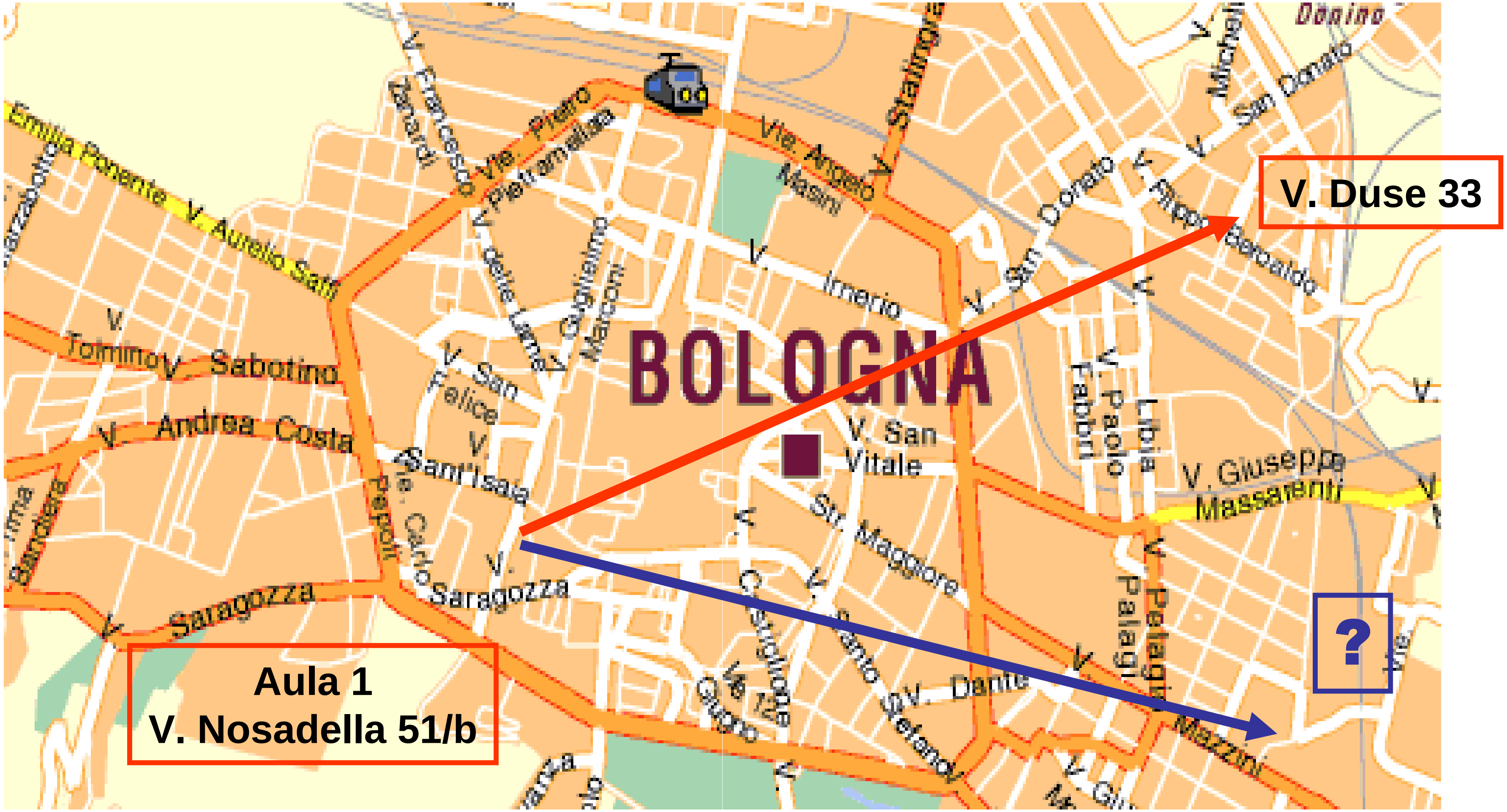
  derivazione derivazione

- $a(t) \quad \rightarrow \quad v(t) \quad \rightarrow \quad x(t)$ procedimento inverso

  integrazione integrazione

- NB in dinamica si parte da $\vec{a}(t) = \vec{F}(t)/m$

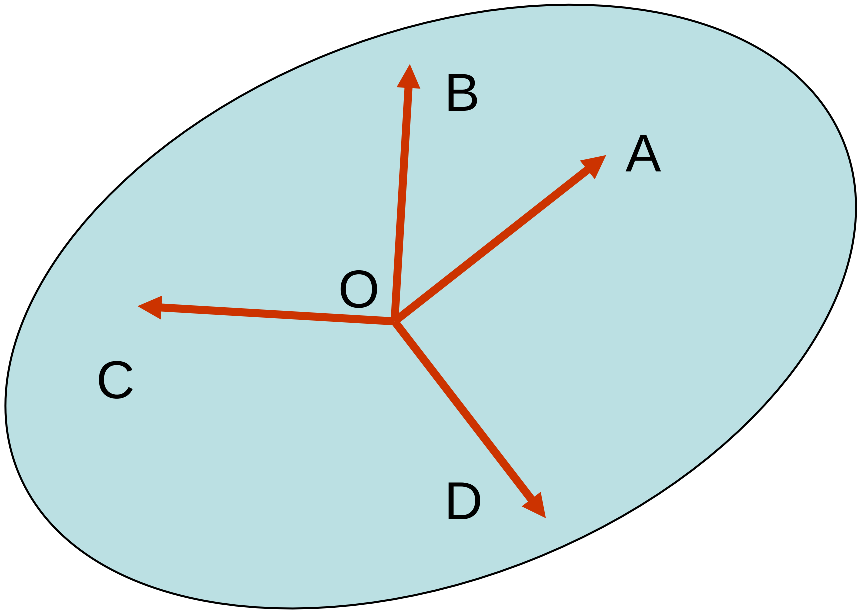
Moto in 2 (3) dimensioni



Moto in 2 (3) dimensioni

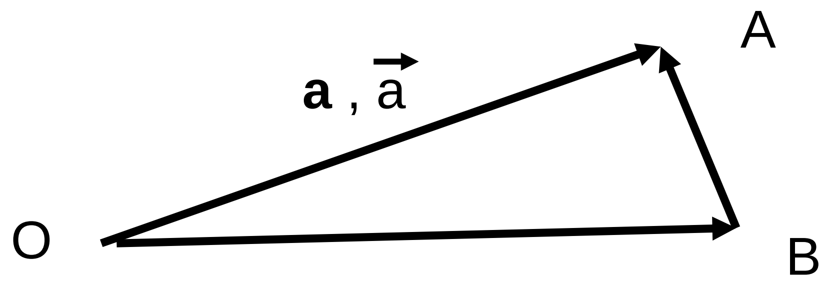
- le direzioni non sono tutte interscambiabili
- ad es.1, appuntamento: Via Duse 33 (x,y) al 6° piano (z) fra 1h (t), per incontrarsi occorre realizzare una coincidenza nello spazio-tempo; se vado verso Casalecchio o Via Mazzini (x',y') non va tanto bene => l'amica/o si arrabbia
- ad es.2, per fornire informazioni stradali non basta la distanza (quantità scalare)
- limitiamoci al piano:

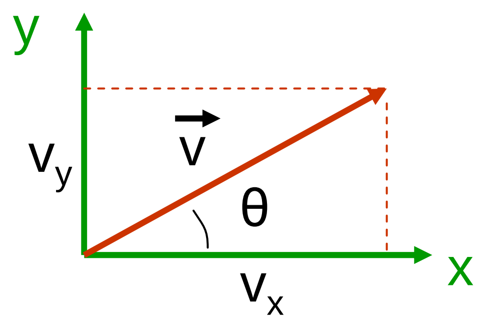
A,B,C,D sono alla stessa distanza da O, ma gli spostamenti OA ≠ OB ≠ OC etc.
|OA| = |OB| = |OC| etc.



Vettori (in **grassetto** o con la → sopra)

- vettori nel piano: 2 componenti (2 numeri, ±vi)
- vettori nello spazio: 3 componenti (3 numeri, ±vi)
- v. in una dimensione: 1 componente (1 numero, ±vo)





- vettori
  - modulo (o valore assoluto): |**a**| , $|\vec{a}|$, a
  - direzione e verso: nel piano cartesiano θ

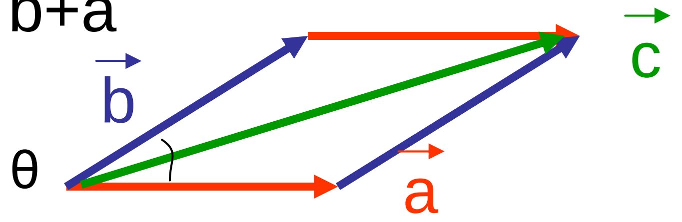
lunghezza del vettore

NB le componenti sono ±ve; *il modulo è sempre +vo*

Operazioni con i vettori

1. somma/differenza di vettori omogenei

- $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

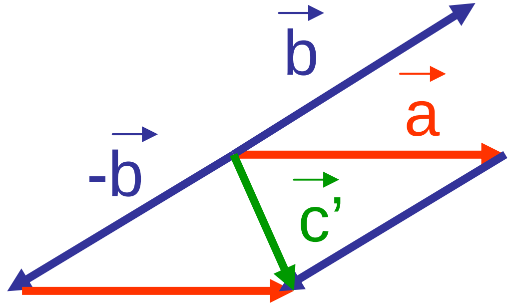


Regola del parallelogramma

- il vettore $\vec{c}$ è equivalente ad $\vec{a}$ seguito da $\vec{b}$ o viceversa (evidente nel caso di uno spostamento)
- modulo quadro del risultante (Teorema di Carnot)

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \theta) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta}$$

- $\vec{c}' = \vec{a} - \vec{b}$

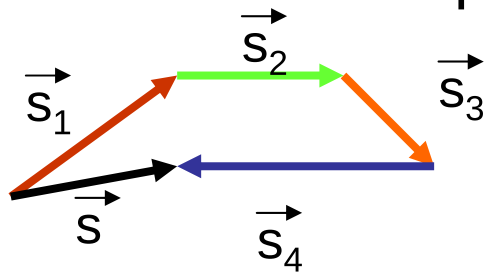


Operazioni coi vettori (2)

– in generale il risultante di più vettori chiude la poligonale

$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3 + \vec{s}_4$

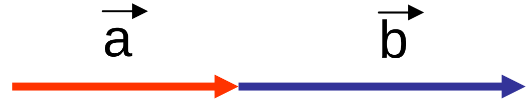
etc.



– casi particolari

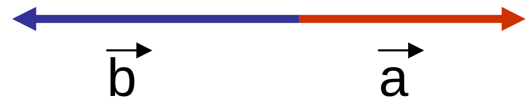
- vettori collineari paralleli

  $c = a + b$; $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$



- vettori collineari antiparalleli

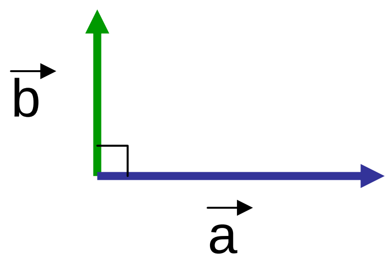
  $c = |a – b|$; $c^2 = a^2 + b^2 – 2ab$



- vettori ortogonali

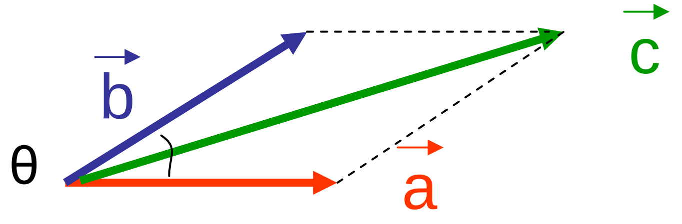
  $c^2 = a^2 + b^2$; $c = \sqrt{(a^2 + b^2)}$

  (Teorema di Pitagora)



Operazioni coi vettori (3)

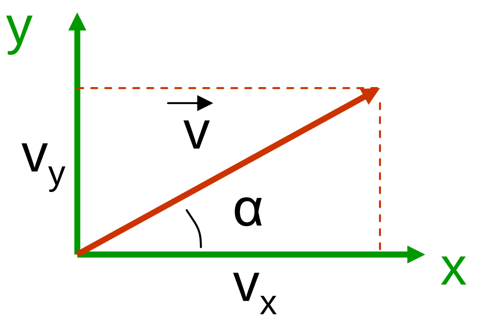
2. decomposizione di vettori
   - $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono le componenti di $\vec{c}$ secondo le relative direzioni



   - componenti cartesiane

     $v_x = v \cos\alpha$

     $v_y = v \sin\alpha$



   - componenti polari

     $v = \sqrt{(v_x^2 + v_y^2)}$

     $tg\alpha = v_y/v_x$

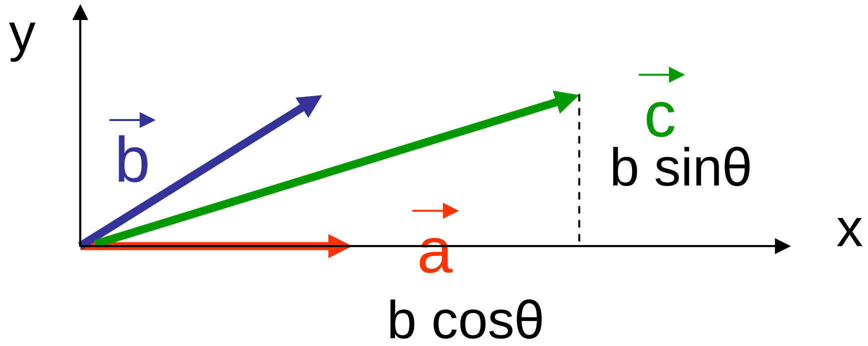
Operazioni coi vettori (4) (*)

- es.: somma in componenti di $\vec{a}$ e $\vec{b}$, scelgo $\vec{a}$ secondo x per semplicità

$a_x = a;\ a_y = 0$

$b_x = b\cos\theta$;

$b_y = b\sin\theta$



$\Rightarrow c_x = a_x + b_x = a + b\cos\theta$

$c_y = a_y + b_y = b\sin\theta$

$\Rightarrow c^2 = c_x{}^2 + c_y{}^2 = a^2 + \underline{b^2\cos^2\theta} + 2ab\cos\theta + \underline{b^2\sin^2\theta}$

$= a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta$

(come già trovato, NB $\forall\theta$, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$)

(*) facoltativo

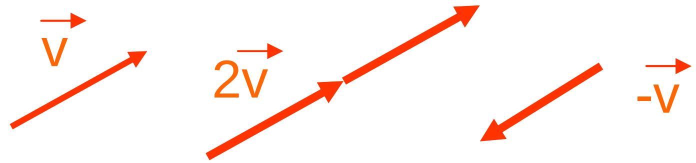
Operazioni coi vettori (5)

3. prodotto di un vettore per uno scalare

   $\vec{p} = m\vec{v}$; $\quad p = |m\vec{v}| = |m||\vec{v}| = |m|v$

   stessa direzione, il verso dipende dal fatto che lo scalare sia +vo o –vo

   es.



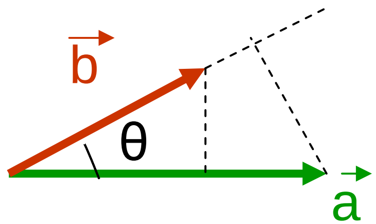
4. prodotti fra vettori

   - scalare o interno

     $\boxed{c = \vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\theta} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

     $= (a\cos\theta)b = a_b b = a(b\cos\theta) = ab_a$

     componente di a nella direzione b moltiplicata per b e viceversa



nullo per
$\theta = 90^o, 270^o$

Operazioni coi vettori (6)

- vettoriale o esterno

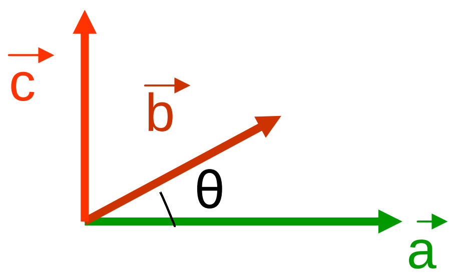
$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = - \vec{b} \wedge \vec{a}$

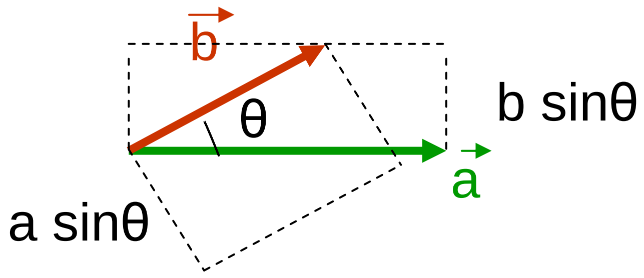
$\boxed{c = |\vec{a} \wedge \vec{b}| = ab \sin\theta}$

nullo per $\theta = 0^\circ, 180^\circ$

misura l'area del parallelogramma di lati a,b

$c = (a \sin\theta)b = a(b \sin\theta)$





($\vec{c}$ vede $\vec{a}$ ruotare su $\vec{b}$ in senso antiorario)

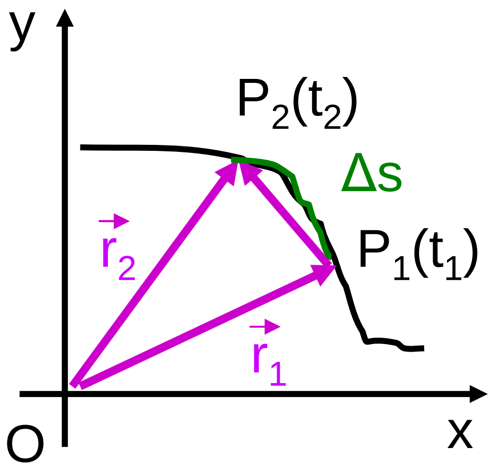
Velocità nel piano

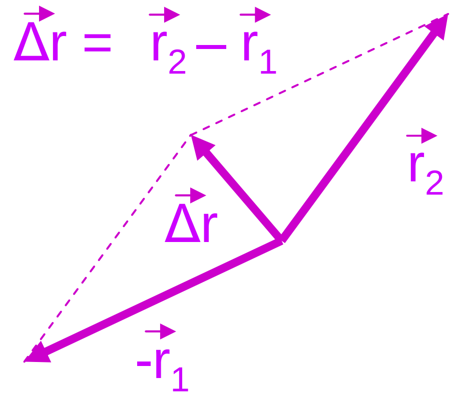
(spostamento)

$\vec{r}$ – raggio vettore

velocità vett. media:

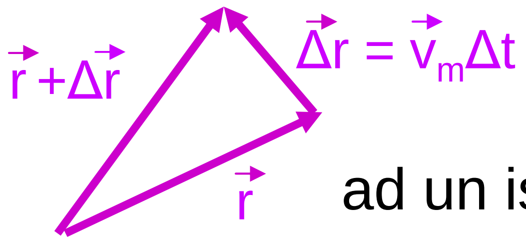
$$\vec{v}_m = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$





velocità vett. istantanea:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$



ad un istante generico t

la velocità vettoriale al limite per $\Delta t \to 0$ (ossia per $t_2 \to t_1$) risulta *sempre* tangente alla traiettoria (nell'es. in P_1)

Accelerazione nel piano

- $\vec{a}$ nel piano è in generale sia tangenziale che centripeta ($\vec{v}$ in generale varia sia in modulo che in direzione e verso)
- accelerazione media

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

- accelerazione istantanea

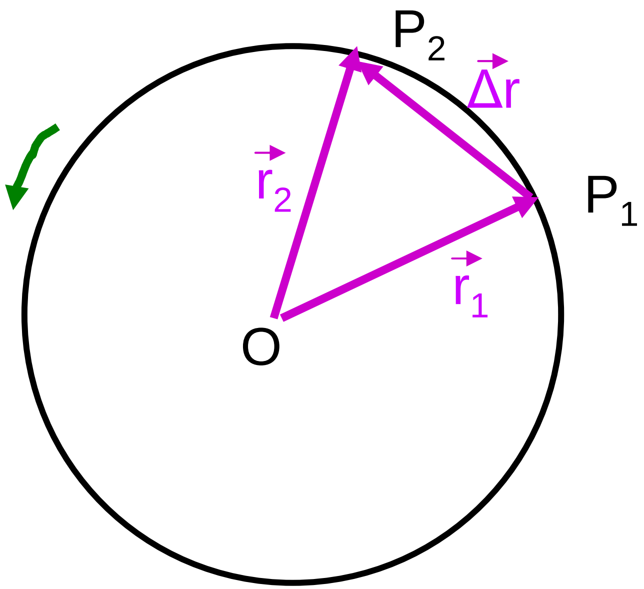
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

- NB nel moto rettilineo $\vec{v}$ varia solo in modulo e verso (v) => $\vec{a}$ risulta esclusivamente tangenziale (a)

Moto circolare uniforme

un es. di moto piano

- <u>moto circolare:</u> $r = |\vec{r}| = \text{cost}$
- <u>uniforme/periodico:</u> solo se $v = |\vec{v}| = \text{cost}$



Il periodo T è il tempo impiegato a fare un giro completo (r, v = cost)

$$\boxed{T = 2\pi r/v = 1/\nu}$$

(frequenza = periodo^{-1})

La velocità angolare è l'angolo per unità di tempo

$$\boxed{\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu}$$

NB ω si misura in rad/s
ν si misura in s^{-1} o hertz (Hz)

Moto circolare uniforme (2)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

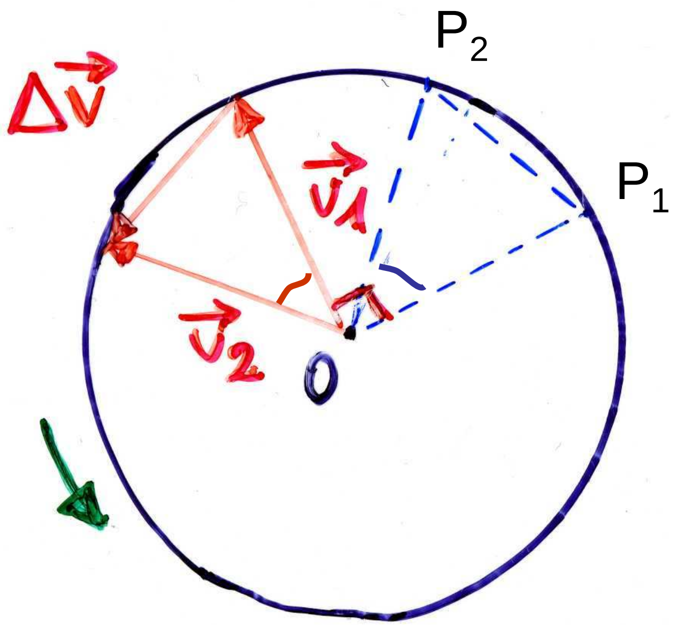
$$\boxed{\vec{v} \perp \vec{r}}$$

$$\boxed{v = \omega r} = 2\pi \nu r$$

[dalla def. di T: $v = 2\pi r/T = \underbrace{(2\pi/T)}_{\omega} r$]

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$

$$\boxed{\vec{a} \text{ anti} \parallel \vec{r}}$$



($\vec{a}$ è parallela a $\Delta\vec{v}$)

Moto circolare uniforme (3)

triangoli simili (angolo fra OP_1 e OP_2 = = angolo fra $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$)

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v}$$

siccome $|\vec{r}_1| = |\vec{r}_2| = r$

$|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$

(isosceli e con un angolo uguale)

$$\frac{1}{r}\frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{1}{v}\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} (\text{"}) = \lim_{\Delta t \to 0} (\text{"})$$

(dividendo per Δt, prima di passare al limite)

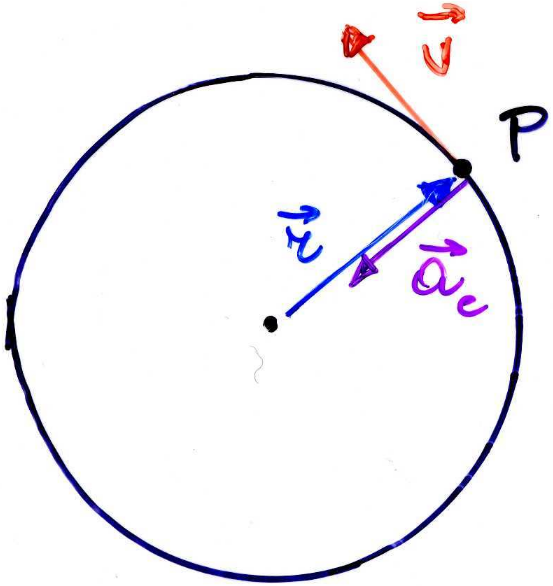
Accelerazione centripeta

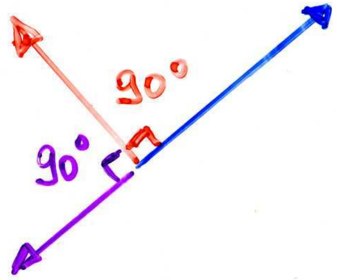
passando al limite si ha il modulo di a,   l'indice c implica una a centripeta

$$\frac{v}{r} = \frac{a}{v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_c = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$$

$\vec{a}_c$: direzione di $\vec{r}$, verso opposto

$$\boxed{\vec{a}_c = -\omega^2 \vec{r}}$$





$$\boxed{a_c = \omega v}$$

(l'acc. centripeta, $\vec{a}_c$, è diretta verso il centro della circonferenza; in generale, se la traiettoria non è circolare, verso il centro di curvatura della traiettoria)

L'accelerazione nel moto circolare uniforme (*)

2 equazioni (da $\vec{a}_c = -\omega^2\vec{r}$ seguono 2 moti armonici semplici)

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$$

$x = x(t)$ $\quad y = y(t)$ $\quad \omega^2$ – costante positiva

soluzione: $\forall$ funzione, f, che derivata due volte dia $-\omega^2 f$ (ad es. sin ωt; $d \sin\omega t/dt = \omega\cos\omega t$; $d(\omega\cos\omega t)/dt = -\omega^2 \sin\omega t$)

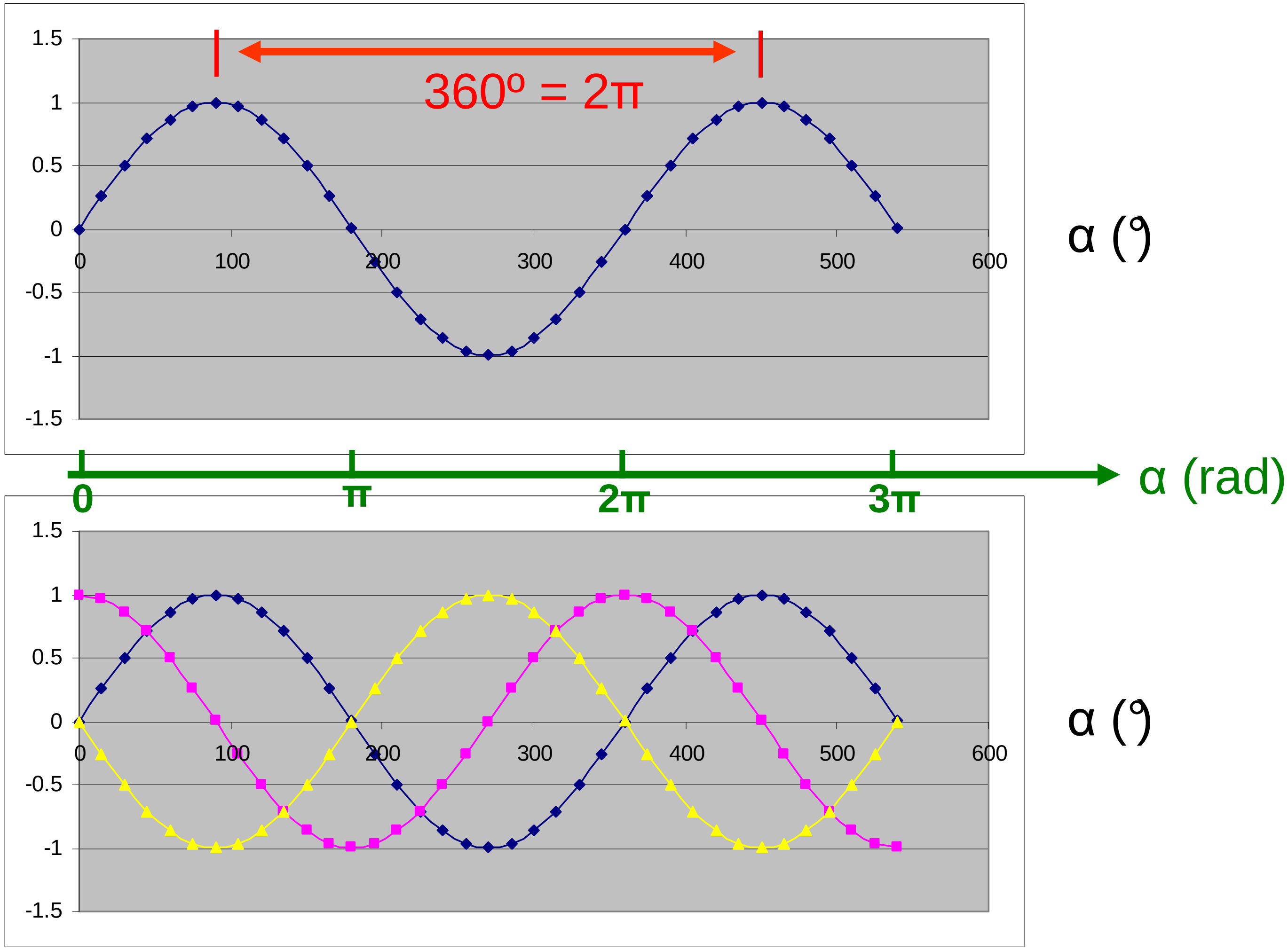
(*) facoltativo

Funzioni elementari periodiche(*)

ad es.

sinα

periodo (distanza fra massimi o fra minimi successivi) = 360°= 2 π



sinα, la sua derivata 1ª, cosα, e la derivata 2ª, -sinα, hanno tutte uguale periodo

sinα

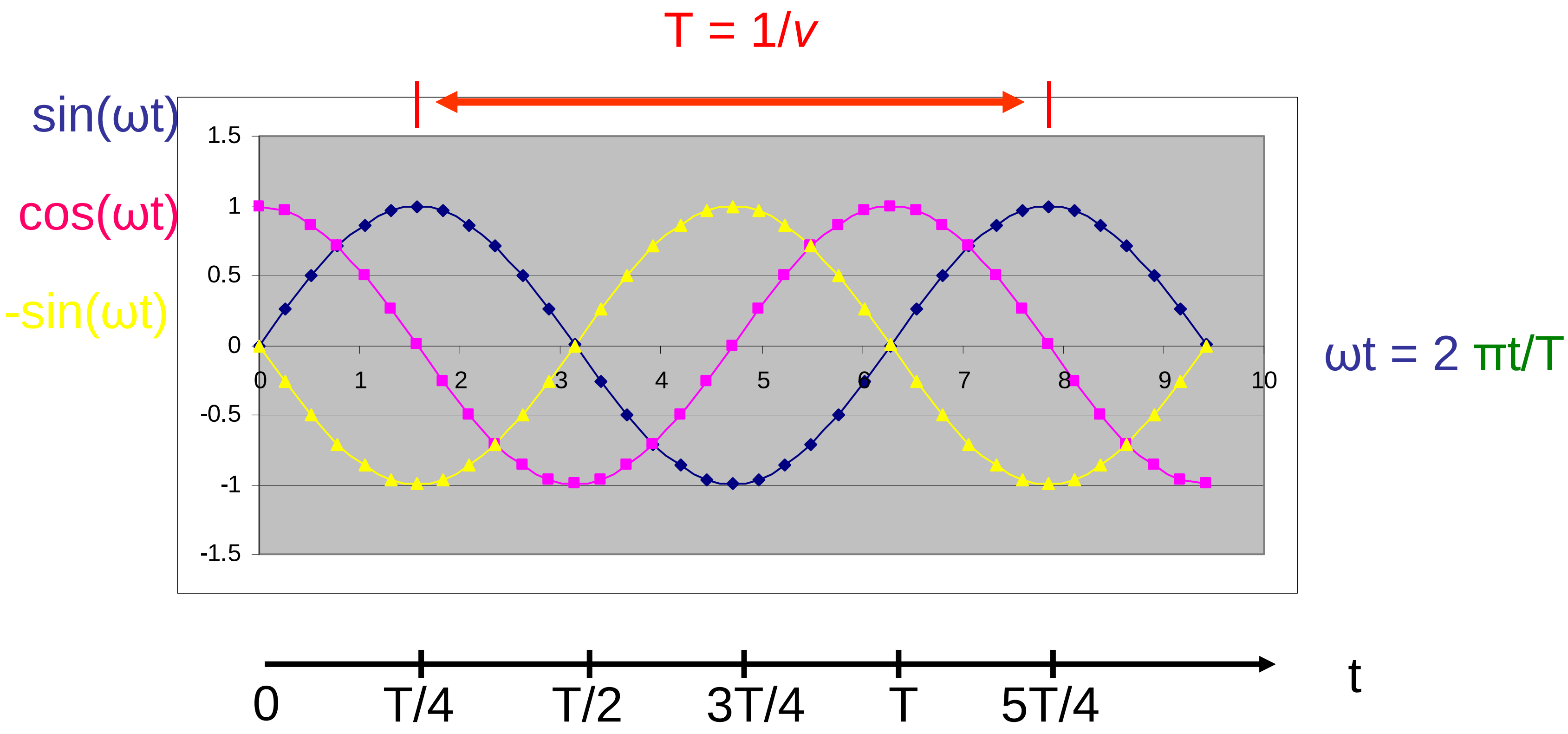
cosα

-sinα

(*) facoltativo

Funzioni elementari periodiche (2)(*)

$f(t) = \sin(\omega t) = \sin(2\pi t/T)$; $df(t)/dt = \omega\cos(2\pi t/T)$; $d^2f(t)/dt^2 = -\omega^2\sin(2\pi t/T)$



NB ω in rad/s, t in s, ωt in rad

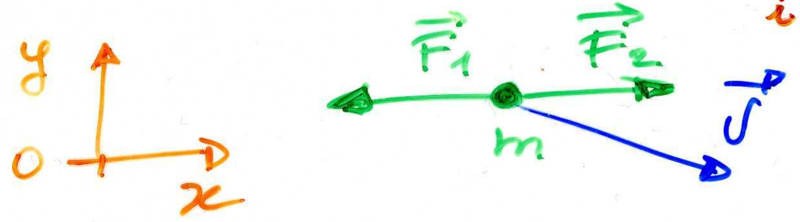
(*) facoltativo

Meccanica 2a parte

Dinamica

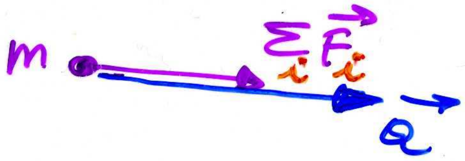
Enunciati dei 3 principi della dinamica (Newton)

I. Inerzia: se $\sum_i \vec{F}_i = 0$, $(\vec{v} = \text{cost})$ $\vec{q} = \text{cost}$

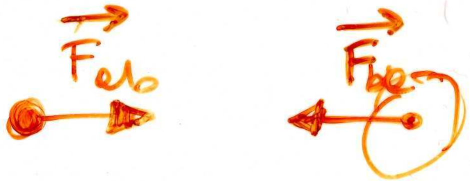


II. Se $\sum_i \vec{F}_i \neq 0$, $\vec{a} = \overrightarrow{\sum_i F_i} / m$ risultante

$(\vec{F} = m\vec{a})$



III. Simmetria delle azioni: $\vec{F}_{ab} = -\vec{F}_{ba}$

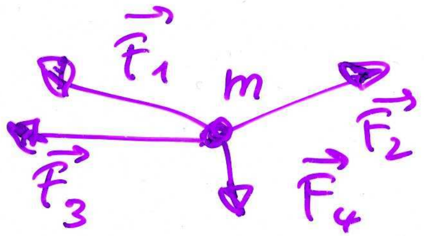


Cause del moto: le forze

- modifica dello stato di moto di un corpo: occorre un'interazione con altri corpi (a contatto o a distanza)
- l'interazione con altro corpo è necessaria per variare la velocità del corpo
- in assenza d'interazione (forza) lo stato di moto (rettilineo uniforme) permane: principio d'inerzia (I principio)
- sistema inerziale (in cui vale il principio d'inerzia): terna centrata sul sole, fissa rispetto alle stelle lontane – la terra è solo approx inerziale (rotazione)

Cause del moto : forze , $\sum \vec{F}_{(e)}$

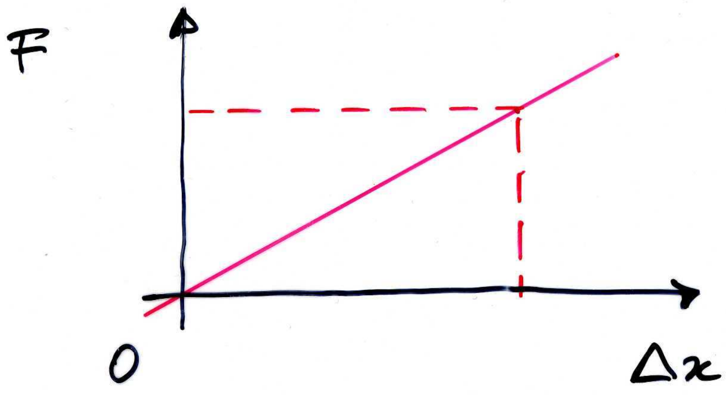
risultante



Forze: effetto dinamico ed effetto statico

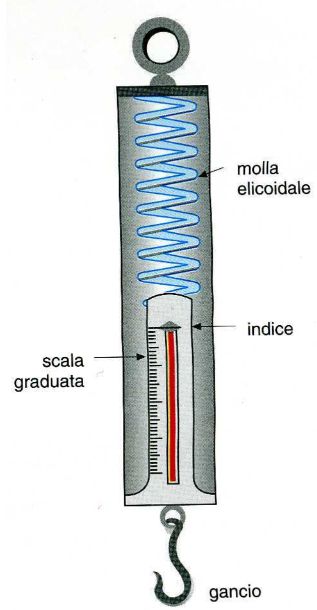
- occorre una definizione operativa di forza, ossia dare il metodo di misura
- constatazione: tutti i gravi, se sono liberi di cadere, si sentono attratti dalla terra e cadono lungo la verticale verso il basso: sentono la forza peso o di gravità (effetto dinamico)
- altra c.: se lo stesso grave è vincolato ad una molla elicoidale non cade ma la deforma, la allunga (effetto statico)
- in generale, ∀ forza vincolata produce una qualche deformazione
- la molla (il dinamometro) può essere usata per misurare le forze previa calibrazione ed entro il limite di elasticità (limite dato dalla validità della legge di Hooke): una volta calibrata la molla può essere usata per ∀ tipo di forze (elett., magn., etc.)
- la direzione del vettore forza è quella dell'asse della molla ed il verso è quello in cui si produce l'allungamento

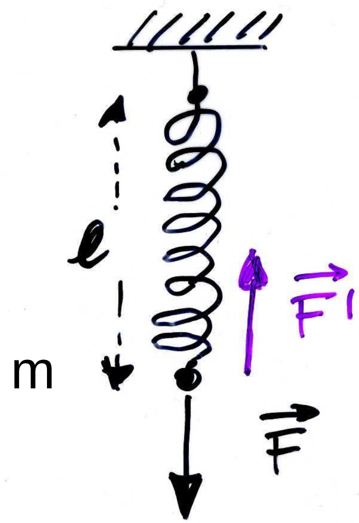
Dinamometro (molla) e misura statica delle forze



$$\boxed{F = k\,\Delta x}$$

costante delle molle





Legge di Hooke:
forza ∝ allungamento

ad es. il cilindretto di Fe portato a lezione (m = 44.83 g) produce una l = 26 cm sulla molla (l_0 = 19 cm): $\Delta x = l - l_0$ = 7 cm

$\Rightarrow$ $k \propto m/\Delta x$

(si può vedere usando altre coppie m', $\Delta x'$ ...)

Massa e II principio della dinamica

- avendo fissato una scala di forza, possiamo constatare che una forza produce un'accelerazione (effetto dinamico)
- in via di principio, posso applicare $\mathbf{F_1, F_2, F_3}$ ... etc. note e registrare le accelerazioni $\mathbf{a_1, a_2, a_3}$ ... etc.: i rapporti $F_1/a_1 = F_2/a_2 = F_3/a_3 = ... =$ cost. $= m$

  => $F/a = m$ ossia $F = ma$

  => $\vec{F} = m\vec{a}$ (II principio)

  con m massa (inerziale) del corpo
- $\vec{F}$ e $\vec{a}$ sono vettori e si combinano con la regola del parallelogramma – m non dipende dall'orientazione, scalare, nè dal tipo di forza (gravit., elast., elett., magn. ...), proprietà intrinseca del corpo

II principio, dimensioni e unità della forza

- dal II principio

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

scalare (inerzia) {molla (f. elastica), peso, f. elettrica, f. magnetica}

il I principio si ottiene per $\vec{F} = 0 \rightarrow \vec{a} = 0$

- dimensioni della f.:

  $[F] = [ma] = [MLT^{-2}]$

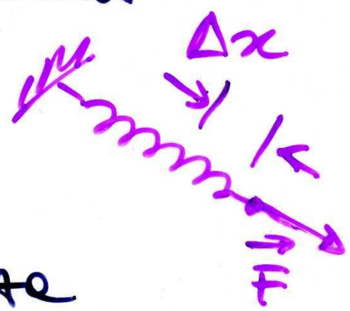
- unità
  - SI: $1N = 1kg \cdot 1ms^{-2}$ (newton)
  - CGS: $1dyne$ (o dina) $= 1g \cdot 1cms^{-2} =$
    $= 10^{-3}kg \cdot 10^{-2}ms^{-2} = 10^{-5}N$
  - sist. ingegneri $1kgp = 1kg \cdot g = 1kg \cdot 9.81ms^{-2} = 9.81\ N$
  - 1N ≈ forza peso esercitata da una mela (piccola, m ≈ 100g)

Forza e massa, def. dinamica (1)(*)

alternativamente:

1) Fissato un corpo campione (1 kg), definizione: una forza di n N produce una a (misurabile) di n m/s^2

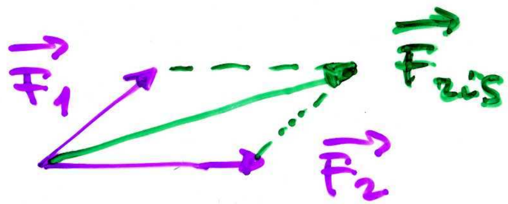
2) Le F possono essere misurate con dinamometri (molle) misurando allungamenti/accorciamenti



$$\Delta x \propto F$$

$\Rightarrow$ taratura, campione di forza

3) Le $\vec{F}$ sono vettori



(*) facoltativo

Forza e massa, def. dinamica (2)(*)

4) Le diverse F (peso, elettriche, magnetiche etc.) sono misurabili con dinamometri

$\vec{P} = \vec{F}_g = m\vec{g}$ (1kg pesa 9.81N)

5) Fissata F, applicandola a corpi di m diverse e misurando le a

$$m = m_u \frac{a_u}{a}$$

⇒ campione di massa

(equivalentemente la m può essere misurata partendo dalla conservazione della quantità di moto, $m\vec{v}$)

(*) facoltativo

q.d.m. e II principio

- def.: $\mathbf{q} = m\mathbf{v}$ quantità di moto

  $[q] = [mv] = [MLT^{-1}]$; unità SI: kg m s^{-1}

- $$\frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\vec{v} + m\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$$ variazione della qdm

  se $m = cost$ ($\Delta m = 0$; m può essere portata fuori dal limite)

  $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{q}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = m\vec{a}$$

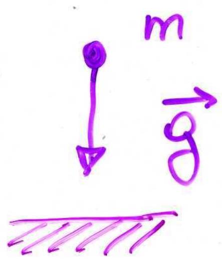
- $\mathbf{F} = \Delta \mathbf{q}/\Delta t$; $\mathbf{F}\Delta t = \Delta \mathbf{q}$

l'impulso di una forza uguaglia la variazione della qdm del corpo su cui agisce (teorema dell'impulso)

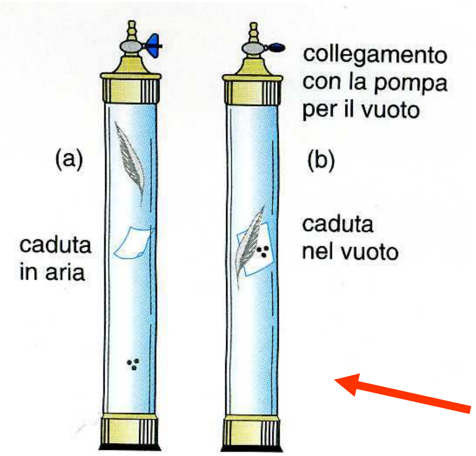
Forza peso

$$m\vec{g} = \vec{P} = \vec{F}_g$$

diretta in basso lungo la verticale

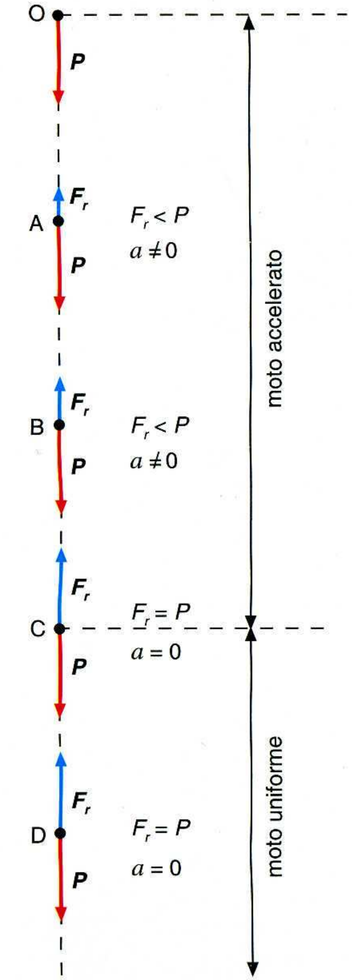


accelerazione di gravità
(costante)



assenza di attrito (dell'aria): tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione **g**

attrito dell'aria



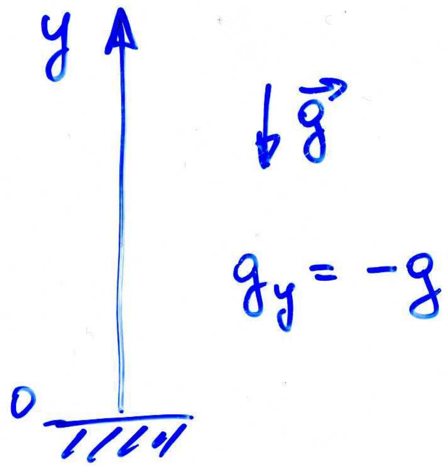
g e scelta del sistema di riferimento

(9.81)

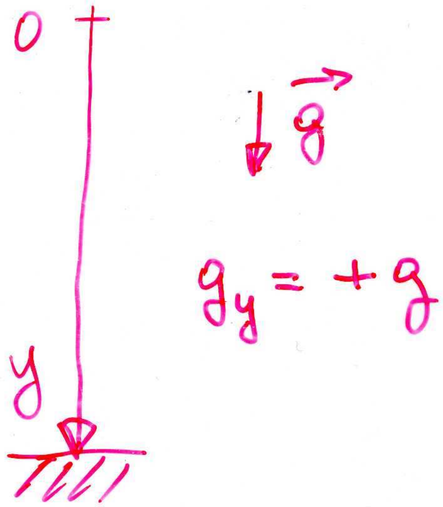
$$g = 9.80665 \ m/s^2 = 980.665 \ cm/s^2$$

0 m slm
45° latitudine

se scelgo



se scelgo



g_y indica la componente di $\vec{g}$ secondo la verticale, dipende dal riferimento

se lancio un corpo verso l'alto il moto sarà ritardato, se lo lascio cadere sarà accelerato

variabilità di g

45° latitudine
0 m s.l.m.

$g = 9.80665 \ m s^{-2}$ "esatta"

equatore	0m	9.780
poli	0m	9.832
45°	10Km	9.776

la terra ruota intorno al proprio asse; non è esattamente sferica

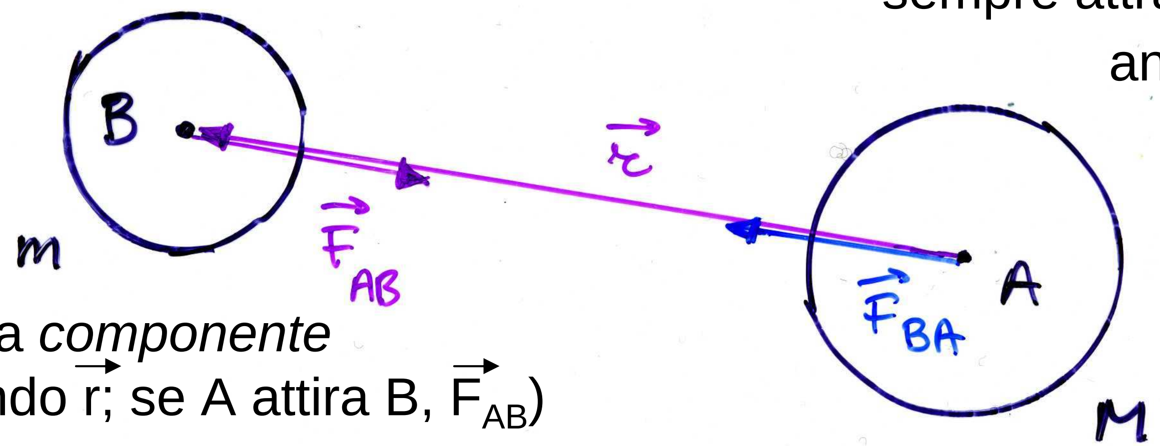
negli esercizi si può prendere $9.81 m s^{-2}$
$= 981 \ cm \ s^{-2}$

"errore" $\Delta g = g - g' = -0.00335 \ m s^{-2}$
$\Delta g / g = -0.335 \%$

Forza di attrazione gravitazionale (Newton)

corpi puntiformi (o sferici)

la forza gravitazionale è sempre attrattiva, cioè è antiparallela a $\vec{r}$, $\vec{F}_g \propto$ vettore unitario $-\vec{r}/r$ diretto in verso opposto a $\vec{r}$



(F_g indica la *componente* di $\vec{F}_g$ secondo $\vec{r}$; se A attira B, $\vec{F}_{AB}$)

$$\boxed{F_g = -G\,\frac{Mm}{r^2}}$$

$$\vec{F}_g = -G\,\frac{Mm}{r^3}\,\vec{r} \qquad (*)$$

LEGGE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE

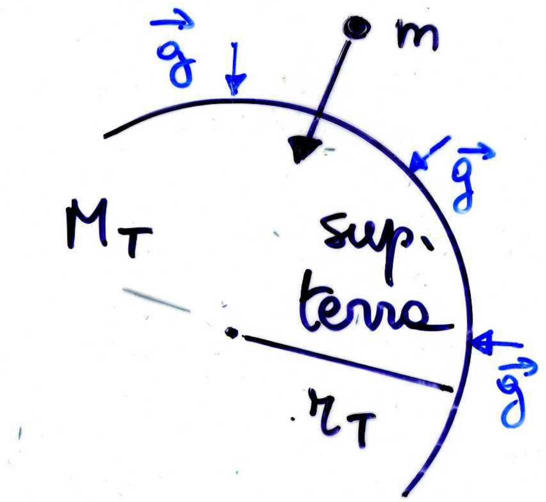
$$G = 6.672 \times 10^{-11}\ kg^{-1}\,m^3\,s^{-2}$$

esperienza di Cavendish

(*) $(1/r^2)\cdot\vec{r}/r = \vec{r}/r^3$!

Forza di attrazione gravitazionale (2) e peso

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} \qquad \text{(III principio)}$$



esperienza in lab. (Cavendish)

$$F_g = \left(G\frac{M_T}{r_T^2}\right)m = g\,m = P$$

$M_T = 5.97 \times 10^{24}$ Kg — si ricava

$r_T = 6.37 \times 10^{6}$ m — si misura, astron.

$g = 9.81$ m/s^2 — si misura, caduta

$\boxed{M_T = g\, r_T^2/G}$

Keplero

es. sistema S/Pianeti:

1. orbite dei P ellittiche, con S in un fuoco
2. il raggio vettore r_{SP} spazza Aree uguali in t uguali
3. $GM_S = \omega^2 r^3 \propto r^3/T^2$
   $\rightarrow M_S = \omega^2 r^3/G$
   $\sim 2 \cdot 10^{30}$ kg
   $(r = 1.5 \cdot 10^{11}$km, $T = 1$a$)$

Peso ed equazione di moto

eq. di moto

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

ad es. sotto l'azione della forza peso $\vec{F}$

$$\cancel{m}\vec{a} = \cancel{m}\vec{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{g}}$$

$$\begin{cases} \vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m} \\ (\vec{r}_0, \vec{v}_0 \text{ iniz.}) \end{cases}$$

asse +vo −vo verso il basso

$$a = \pm|\vec{g}|$$

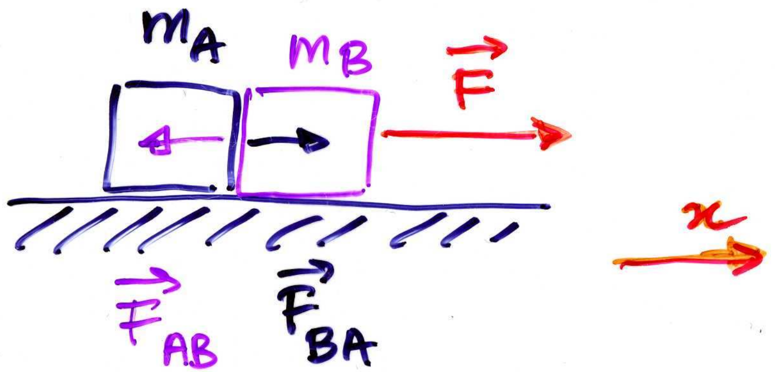
componente di $\vec{a}$ secondo la verticale

III principio e forze di contatto (*)

dati i corpi A e B che interagiscono, per il III principio si ha $\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA}$

III principio $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$

- ad es. forze di contatto
  (oggetti estesi)



$m = m_A + m_B$

(*) facoltativo

III principio e forze di contatto (2) (*)

applichiamo separatamente il II principio ad A, B e A+B per trovare la forza di contatto $\mathbf{F}_{AB}$ ($\mathbf{F}_{BA}$)

componente x

$$A+B: \quad m\vec{a} = \vec{F} \qquad ma = F$$

$$A: \quad m_A\vec{a} = \vec{F}_{BA} \qquad m_A a = F_{BA}$$

$$B: \quad m_B\vec{a} = \vec{F}_{AB} + \vec{F} \qquad m_B a = F - F_{AB}$$

$$\Sigma \quad (m_A+m_B)\vec{a} = \vec{F} \qquad (m_A+m_B)a = F$$

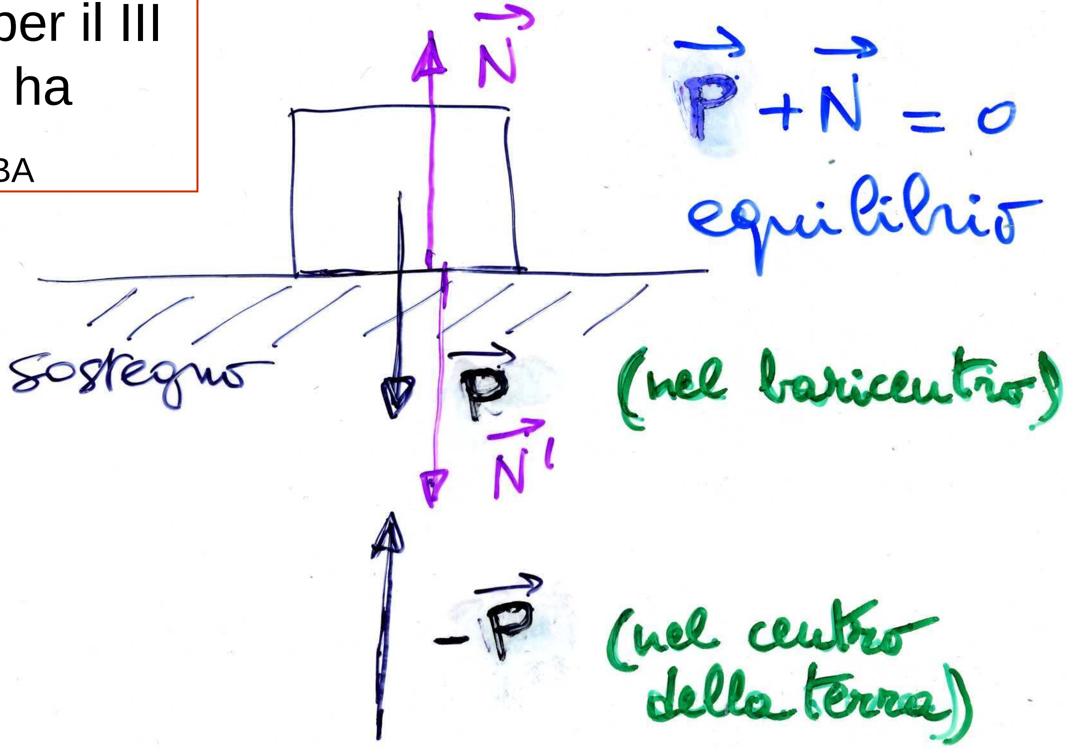
$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F} + \vec{F}\frac{m_B}{m_A+m_B} = -\vec{F}\frac{m_A}{m_A+m_B}$$

NB F_{AB} cresce con F: un vincolo ideale è quindi in grado di sostenere una F ∀, non così un vincolo 'reale' (carico di rottura, vedi più avanti, elasticità)

(*) facoltativo

III principio e forze di contatto (3)

dati i corpi A e B che interagiscono, per il III principio si ha
$\mathbf{F}_{AB} = - \mathbf{F}_{BA}$



le coppie di forze del III principio sono applicate a corpi diversi
P + (-**P**) =0
N + **N'** = 0

la spinta **N'** sul sostegno è dovuta a P e lo uguaglia
=> **P** + **N** = 0

(forza cui è sottoposta la terra!)

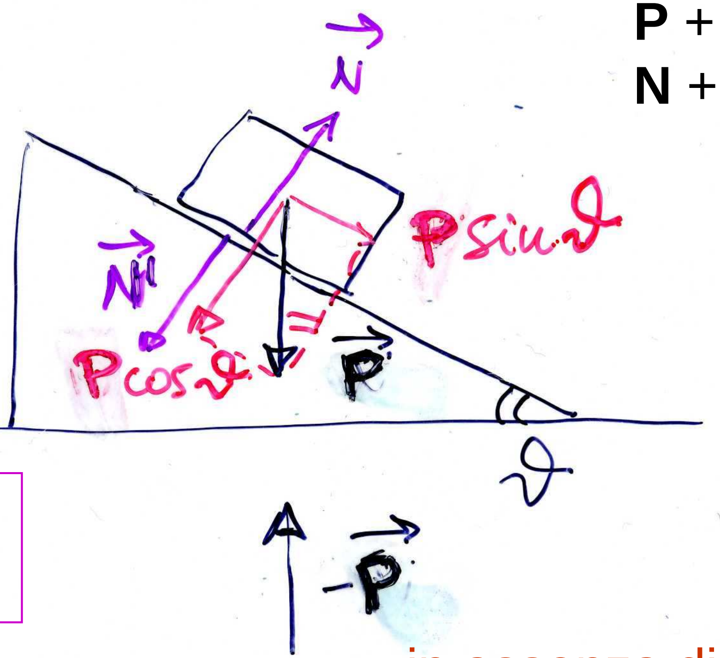
un vincolo ideale può equilibrare ∀ **P**, un vincolo reale no

III principio e forze di contatto (4)

III principio:
P + (-**P**) = 0
N + **N'** = 0

$$P\cos\vartheta = N$$

$$\cancel{m}a = P\sin\vartheta$$
$$= \cancel{m}g\sin\vartheta$$



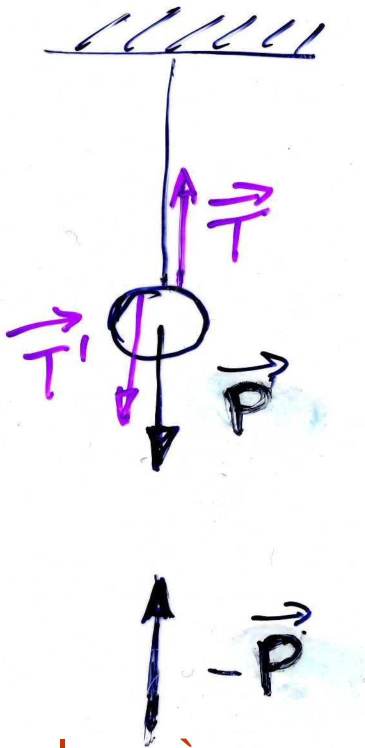
eq. di moto
in assenza $\Rightarrow$ $\boxed{a = g\sin\vartheta}$
di attrito

la componente Pcosθ
è equilibrata dalla
reazione vincolare N

in assenza di attrito non
vi può essere equilibrio:
la componente Psinθ
non è equilibrata

III principio e forze di contatto (5)

III principio:
P + (-**P**) = 0
T + **T’** = 0



fune, filo

(NB di massa trascurabile)

T’ tensione della fune, del filo
(**T** agisce sulla sfera di massa m)

$\vec{P} + \vec{T} = 0$

equilibrio

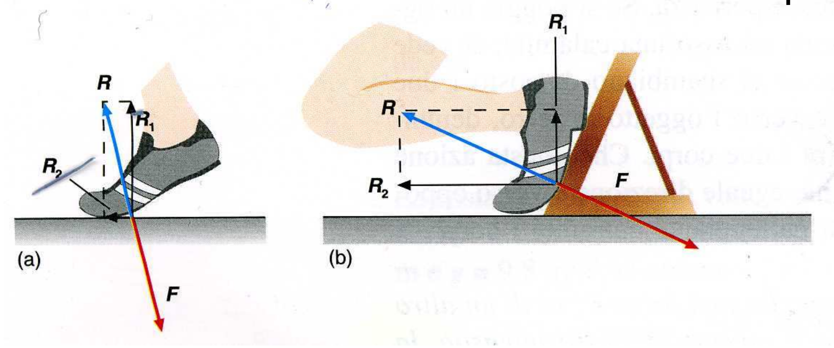
(forza cui è sottoposta la terra!)

un filo (fune) ideale può sostenere ∀ **P**, un filo (fune) reale sosterrà un carico max, oltre si spezza

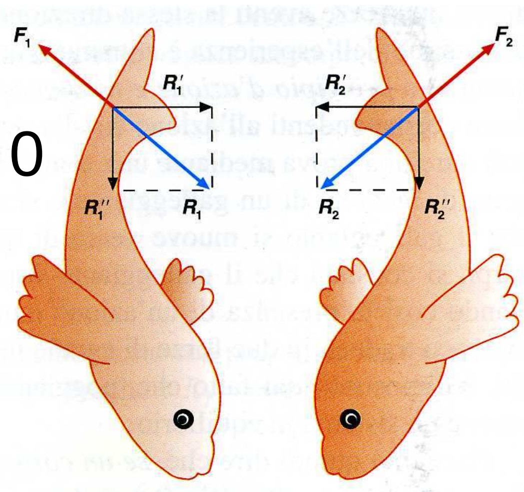
III principio e sistemi propulsori

- dati due corpi A e B che interagiscono: azione e reazione uguale e contraria $\mathbf{F}_{AB} = - \mathbf{F}_{BA}$
- ad es. blocchi di partenza: aumentano la spinta nella direzione del moto
- altro es. locomozione di animali: spinta sul mezzo circostante (suolo, acqua, aria)

$\mathbf{F} + \mathbf{R} = 0$

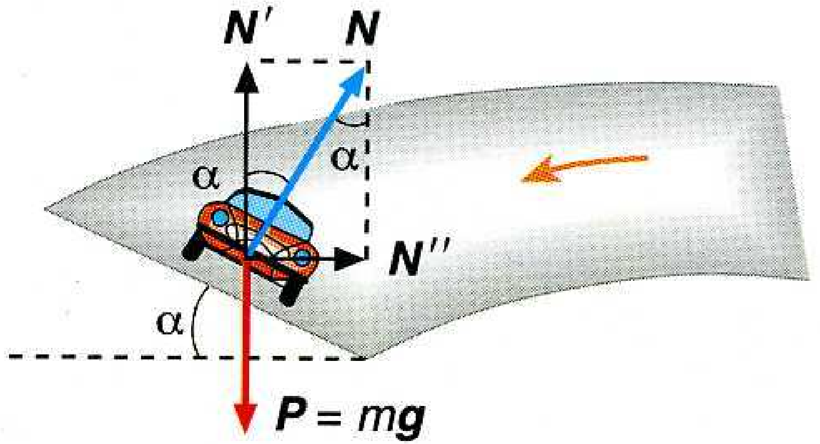


$\mathbf{F}_i + \mathbf{R}_i = 0$



III principio e moti curvilinei

- consideriamo un moto curvilineo (variazione di **v** in direzione e verso) assumendo trascurabile l'attrito
- la forza centripeta deve essere quindi fornita dalla reazione della curva sopraelevata di raggio R



$mv^2/R = N'' = N\sin\alpha =$

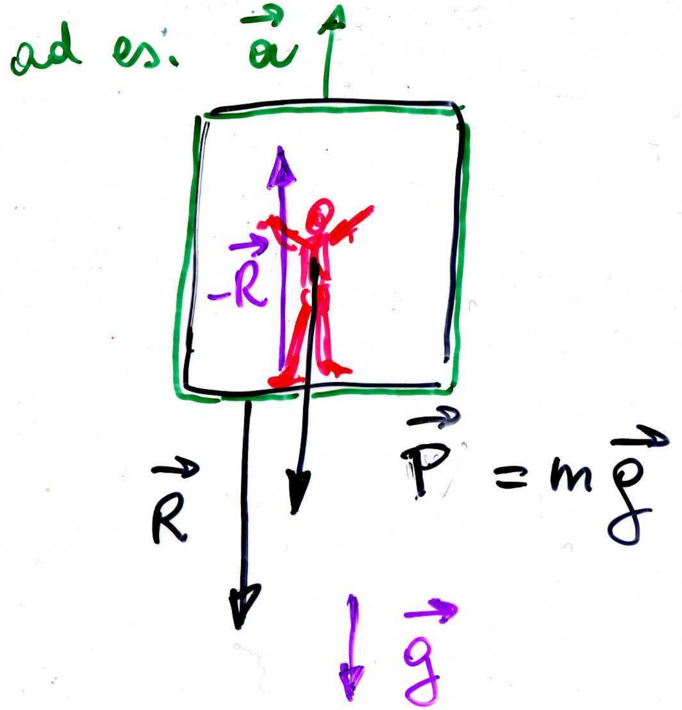
$= N'tg\alpha = Ptg\alpha$

$\Rightarrow tg\alpha = v^2/(Rg)$

ad es. $v = 50$ m/s, $R = 250$ m $\Big\}$ $tg\alpha \sim 2500/(250\cdot 10) \sim 1$; $\alpha \sim 45°$

Peso e peso apparente

il peso di una persona può essere definito come la forza esercitata sul pavimento



Ascensore accelerato ($\vec{a}$)

tipico sistema non inerziale se **a** ≠ 0

$\vec{R}$ – sul pavimento

$-\vec{R}$ – sulle persone

$m\vec{a} = \vec{P} - \vec{R}$ eq. di moto

Peso e peso apparente (2)

$$\Rightarrow \quad \vec{R} = \vec{P} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a})$$

se $\vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{cost} \qquad \vec{R} = \vec{P} = m\vec{g}$

" $\vec{a}$ verso l'alto $\qquad R = m(g+a) > P$

" " verso il basso $\qquad R = m(g-a) < P$

- quindi il peso apparente sarà inferiore (superiore) a quello reale se l'ascensore accelera verso il basso (alto)
- NB si noti che mentre *m è costante*, ***P*** *può variare*, per es. andando in montagna, in orbita o all'equatore si diminuisce di peso! (al polo si aumenta)

Sistemi isolati e conservazione q.d.m.

- isolati: sistemi di 2 o più corpi che si scambiano forze, interne, che a 2 a 2 si elidono (risultante nulla)
- es. corpi 1 e 2 su piano orizzontale senza attrito

su 1 agisce $\mathbf{F}_2$ (dovuta a 2)

su 2 agisce $\mathbf{F}_1$ (dovuta a 1)

$\mathbf{F}_1 = \Delta\mathbf{q}_2/\Delta t$; $\mathbf{F}_2 = \Delta\mathbf{q}_1/\Delta t$

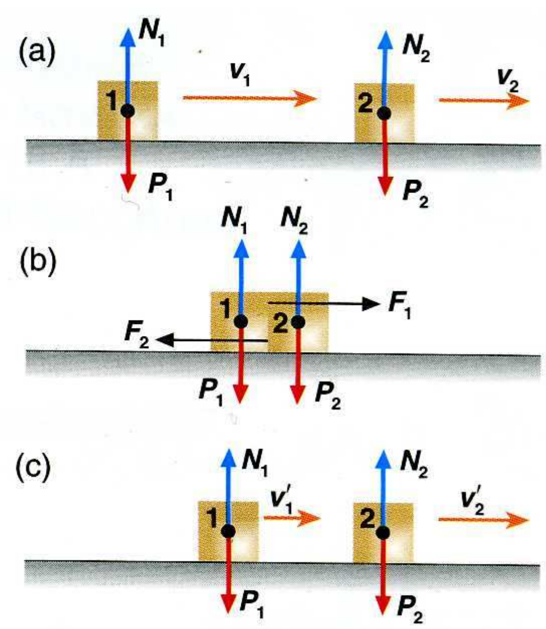
ma $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$

$\Rightarrow \quad \Delta\mathbf{q}_1/\Delta t + \Delta\mathbf{q}_2/\Delta t = 0$

ossia $\Delta\mathbf{q}_1 + \Delta\mathbf{q}_2 = \Delta(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) = 0$

la variazione della q.d.m. totale è nulla, da cui ricavo

$$\boxed{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = \text{cost}}$$



urto fra due corpi

Conservazione q.d.m. (2)

- se $\mathbf{q}_i$ e $\mathbf{q}_i'$ indicano le q.d.m. prima e dopo l'urto, avrò

  $\boxed{\mathbf{q}_1' + \mathbf{q}_2' = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2}$

  $m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$

  conservazione della q.d.m.: l'interazione fra due corpi non modifica la q.d.m - oppure – per un sistema isolato (soggetto a risultante nulla) la q.d.m. si conserva
- es. locomozione di celenterati, motori termici a getto

  q.d.m. iniziale è uguale zero

  $\Rightarrow \; m_a\mathbf{v_a} + m_c\mathbf{v_c} = 0$

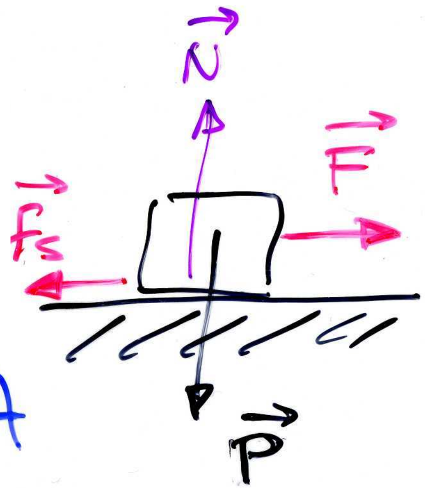
  da cui

  $v_c = -(m_a/m_c)v_a$

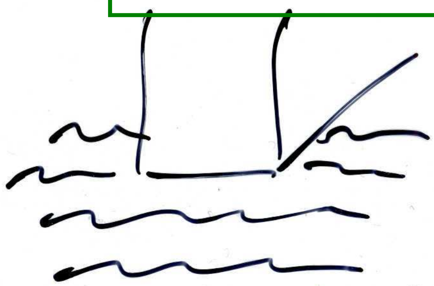
Forza d'attrito, leggi dell'attrito statico

- consideriamo un corpo appoggiato su una superficie reale, se applicassi una forza in assenza di attrito il corpo dovrebbe comunque accelerare, invece non si muove per $F \le \mu_s N$

attrito statico
(impedisce
l'inizio del moto)



1) l'a.s. non dipende dall'area A di contatto



superfici
ruvide

a microscopica
<< A contatto

2) l'a.s. cresce fino ad un valore max

$\forall A$

$$f_{s,max} = \mu_s N$$

$$(f_s \le \mu_s N)$$

Attrito (2)

- una volta superata la $f_{s,max}$ il corpo è accelerato da una forza

  $F' = F - f_c$ (dove f_c è un po' inferiore a $f_{s,max}$)

attrito cinetico o dinamico
(agisce durante il moto)

$$f_c = \mu_c N$$

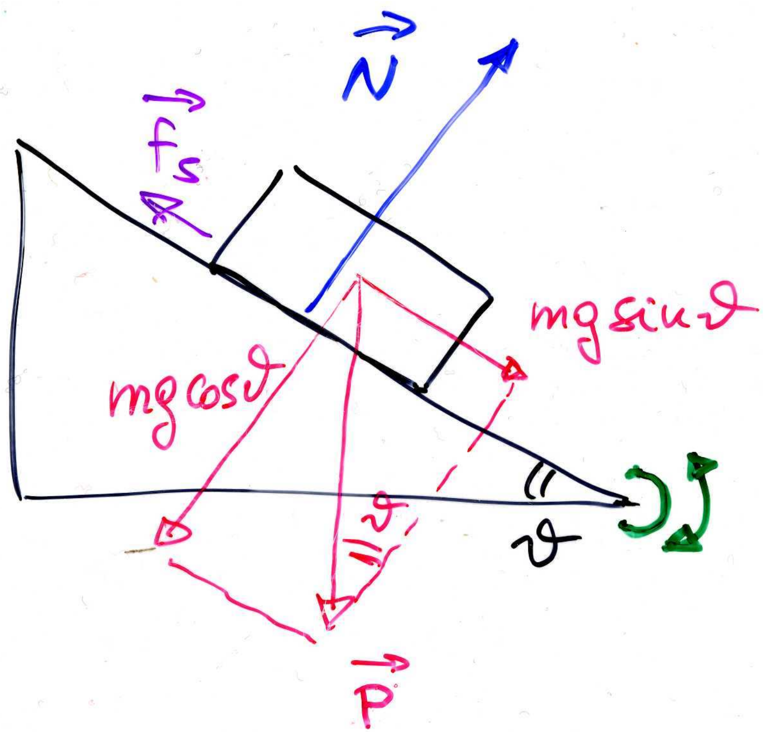
$$\mu_c < \mu_s$$

legno – legno ~ 0.5
metallo – metallo ~ 0.1

superfici levigate $\mu_c \approx 0.001$

Misura del coefficiente d’attrito

- si può usare un piano inclinato, ad inclinazione variabile: la forza peso è scomponibile parallelamente (Psinθ) ad ortogonalmente al piano (Pcosθ) e solo la componente normale è equilibrata dalla reazione vincolare, basta quindi far crescere l’angolo θ per aumentare la forza motrice



Misura del coefficiente d'attrito (2)

se $\vartheta \nearrow$, $\quad mg \sin\vartheta \nearrow$ $\quad$ (1° quadrante!)

$(= f_s)$

$$\cancel{m}\cancel{g} \sin\vartheta_c = f_{s,max} = \mu_s \cancel{m}\cancel{g} \cos\vartheta_c$$

$\nearrow$

inizia a scivolare

$$\mu_s = \frac{\sin\vartheta_c}{\cos\vartheta_c} = tg\,\vartheta_c$$

θ_c indica l'angolo critico, angolo per cui il corpo comincia a scivolare

Eq. di moto in presenza d'attrito

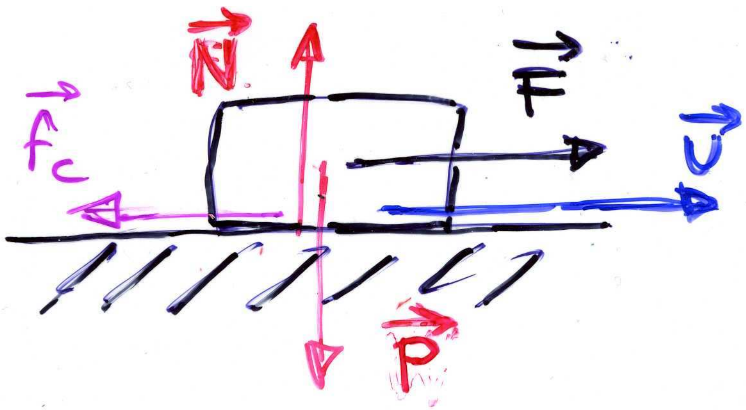
senza attrito : $m\vec{a} = \vec{F}$

con attrito : $\vec{a} = 0$
per $|\vec{F}| < f_{s,max} = \mu_s N$

$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{f}_c$
con $f_c = \mu_c N$

$\vec{f}_c = -\mu_c N \frac{\vec{v}}{v}$ si oppone al moto

Eq. di moto in presenza d'attrito (2)



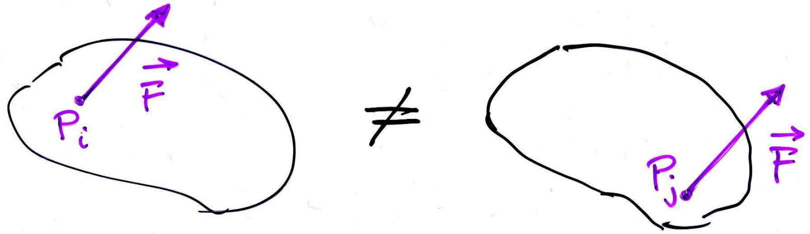
$$\Rightarrow \quad ma = F - \mu_c N$$

$$a = \frac{F - \mu_c N}{m} \quad \left(< \frac{F}{m} \right)$$

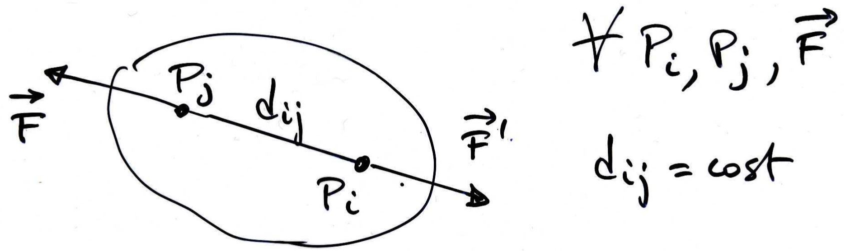
$$= (F - \mu_c mg)/m = F/m - \mu_c g$$

Corpo rigido

– per i corpi estesi, il punto di applicazione delle forze diventa importante



– def. di corpo rigido



– sperimentalmente: 1) due **F** uguali e contrarie lungo la stessa retta di applicazione in punti diversi non alterano lo stato di moto del c.r.;
2) una **F** applicata ad un punto può essere spostata lungo la sua retta di applicazione senza alterarne gli effetti

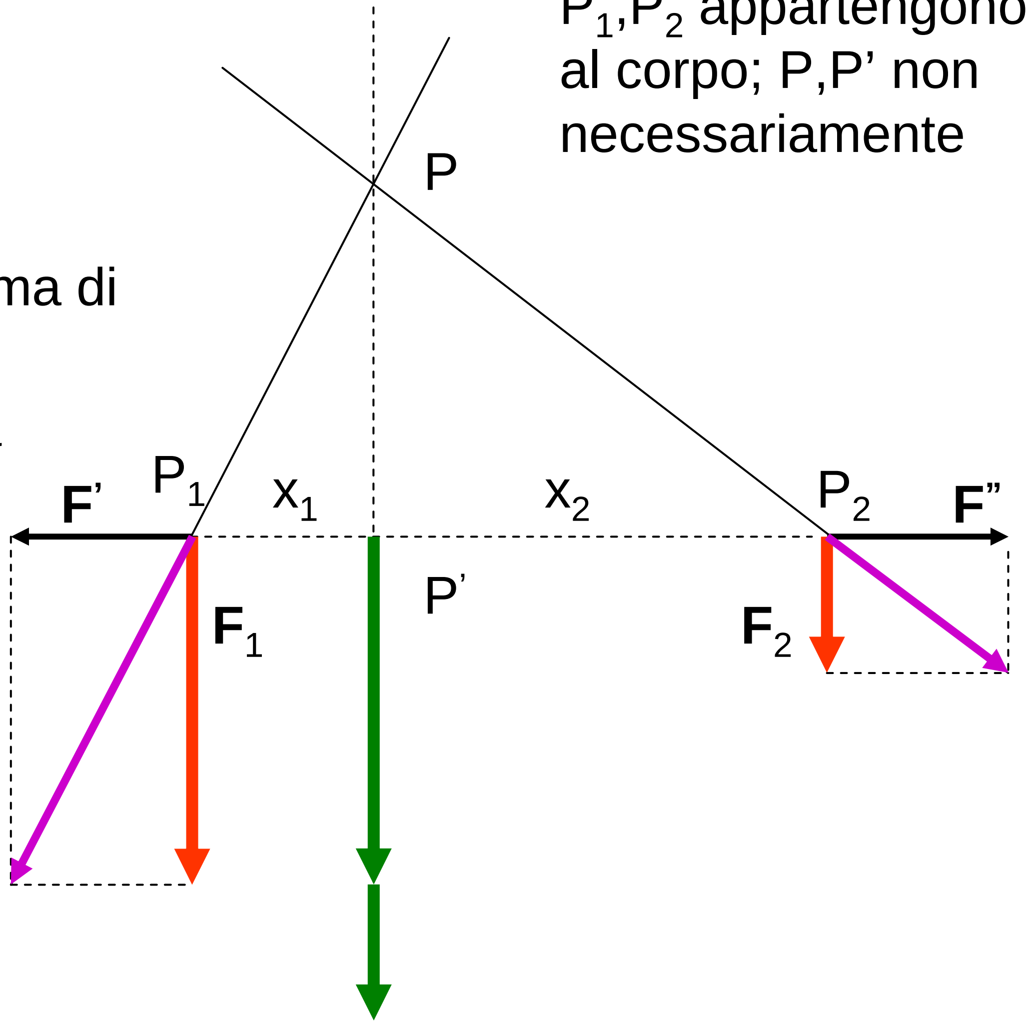
Corpo rigido: risultante di forze parallele

- aggiungo **F’** e **F”** = - **F’** (**F’** a piacere, arbitraria)
- traslo le risultanti in P: le componenti orizzontali si annullano, rimane la somma di $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$
- posso ritraslare la somma in P’
- la risultante è la somma di $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ lungo P’P con

$$\boxed{\frac{P_1P'}{P_2P'} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{F_2}{F_1}}$$

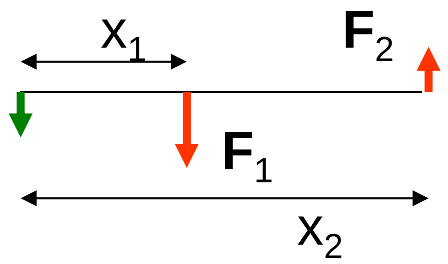
$$\left(\frac{P_1P'}{PP'} = \frac{F'}{F_1}; \qquad \frac{P_2P'}{PP'} = \frac{F''}{F_2}\right)$$

P_1,P_2 appartengono al corpo; P,P’ non necessariamente



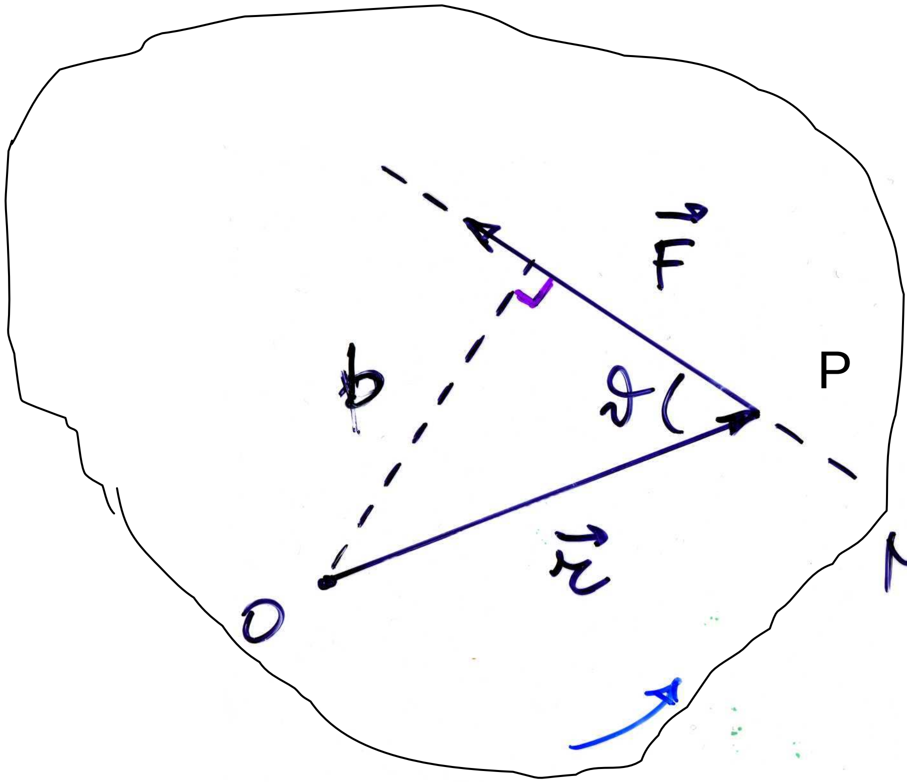
Risultante di forze parallele (2), baricentro

- posso riscrivere la rel. precedente come
  $\boxed{F_1x_1 = F_2x_2}$
- se $\mathbf{F_1}$ e $\mathbf{F_2}$ sono antiparallele, la risultante ha per modulo la differenza dei moduli, verso quello della **F** più grande, retta di applicazione all'esterno dalla parte della **F** più grande, con
  $F_1x_1 = -F_2x_2$
  $|F_1x_1| = |F_2x_2|$



- se si considera un corpo rigido esteso diviso in volumetti di massa m_i e di peso $m_i\mathbf{g}$, nel limite in cui **g** è costante, la risultante di tutte le forze peso è il peso del corpo $\mathbf{P} = \Sigma_i m_i \mathbf{g} = \mathbf{g}\Sigma_i m_i = m\mathbf{g}$ che sarà applicato nel centro di gravità o baricentro (per un corpo omogeneo è il centro geometrico – in generale può anche trovarsi fuori dal corpo)

Momento di una forza rispetto a un punto



momento di **F** rispetto ad O

$\mathbf{M} = \overrightarrow{OP} \wedge \mathbf{F}$

b, minima distanza fra O e la retta di applicazione di **F**, è il braccio

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

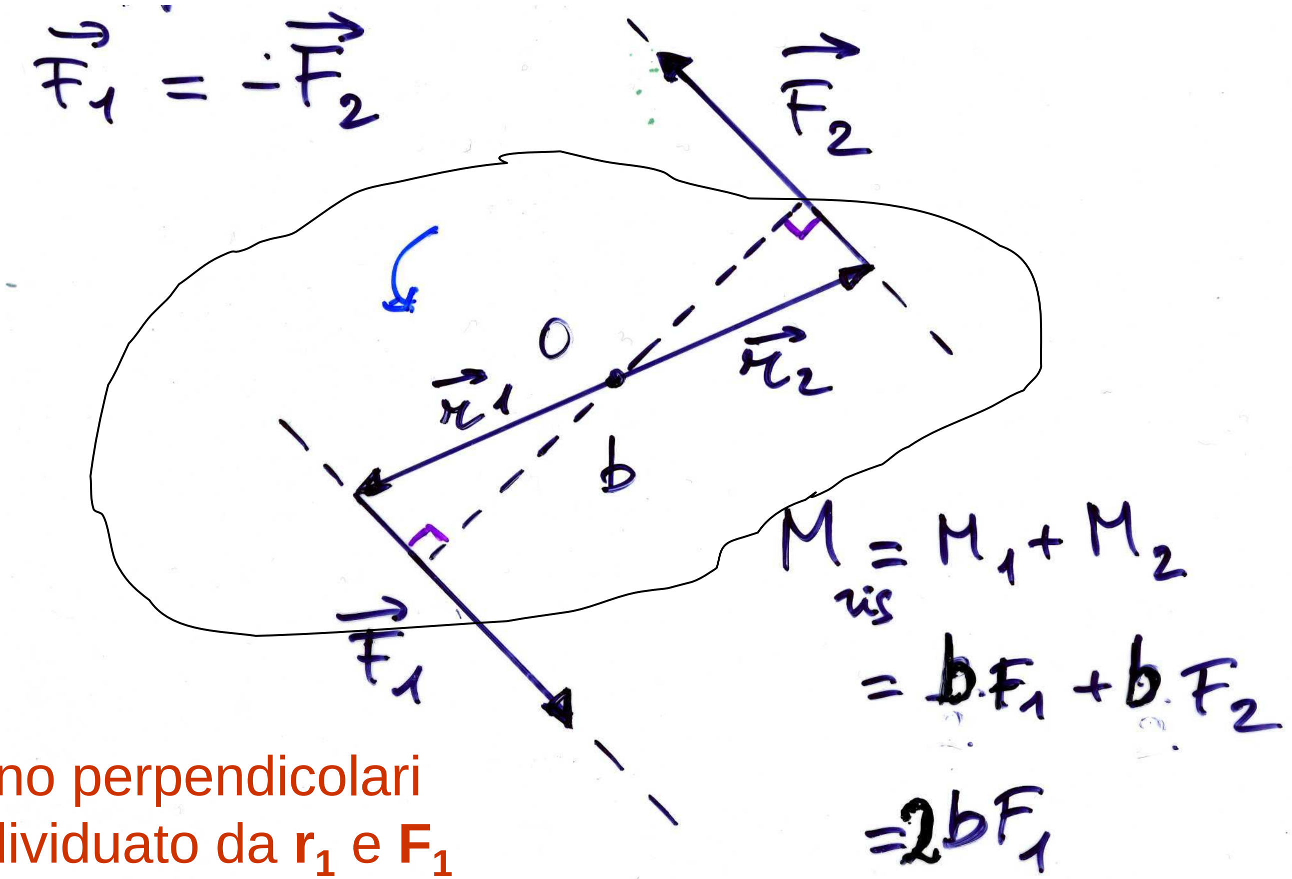
$$M = Fb$$
$$= rF\sin\vartheta$$

il momento è perpendicolare al piano individuato da **r** e **F**

NB **M** = 0 se **r** parall. **F**

[Momento] = [LF] = $[ML^2T^{-2}]$
unità SI: N·m
CGS: 1 dyne·cm =
$= 10^{-5}$ N·10^{-2} m $= 10^{-7}$ Nm

Coppia di forze



M_1 e **M_2** sono perpendicolari al piano individuato da **r_1** e **F_1** e sono paralleli (producono una rotazione nello stesso verso)

Condizioni generali di equilibrio di un corpo rigido

perchè il c.r. sia in equilibrio (permanga nel suo stato di moto uniforme precedente):

1. la risultante delle forze esterne applicate al c.r. deve essere nulla
2. il momento risultante delle forze esterne applicate al c.r. deve essere nullo

$$\begin{cases} \vec{F}_{ris} = \sum_i \vec{F}_i = 0 \\ \vec{M}_{ris} = \sum_i \vec{M}_i = 0 \end{cases}$$

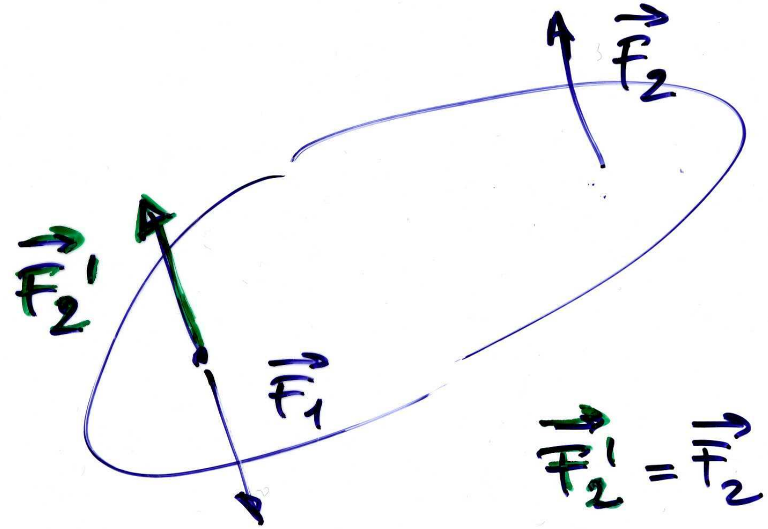
forze esterne

"

una risultante non nulla è causa di una variazione nel moto di traslazione; un momento risultante non nullo causa le rotazioni

Condizioni di equilibrio (2), esempio

es.



forze uguali e contrarie, con rette d'azione uguali o diverse

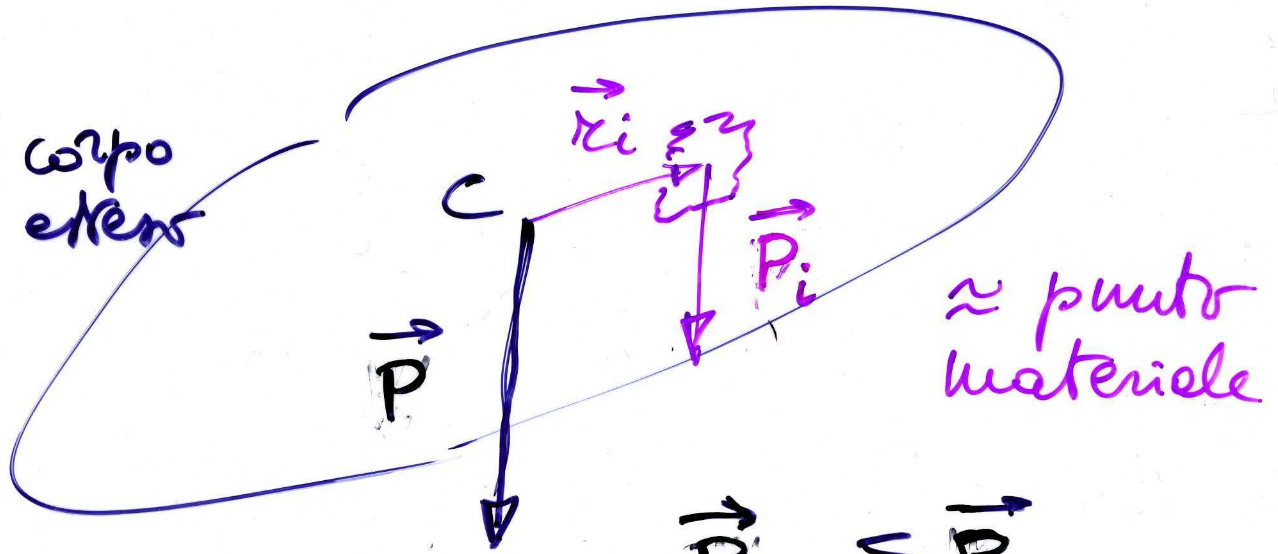
$$\vec{F}_2' = \vec{F}_2 = -\vec{F}_1$$

caso 1
$$\begin{cases} \vec{F}'_{ris} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2' = 0 \\ \vec{M}'_{ris} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2' = 0 \end{cases}$$
sta fermo

caso 2
$$\begin{cases} \vec{F}_{ris} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0 \\ \vec{M}_{ris} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 \neq 0 \end{cases}$$
ruota

Centro di gravità o baricentro

in modo del tutto equivalente alla def. precedente, il baricentro è individuabile imponendo che la somma dei momenti delle forze peso (ottenuta scomponendo il c.r. in *piccole* parti) rispetto ad esso sia nulla



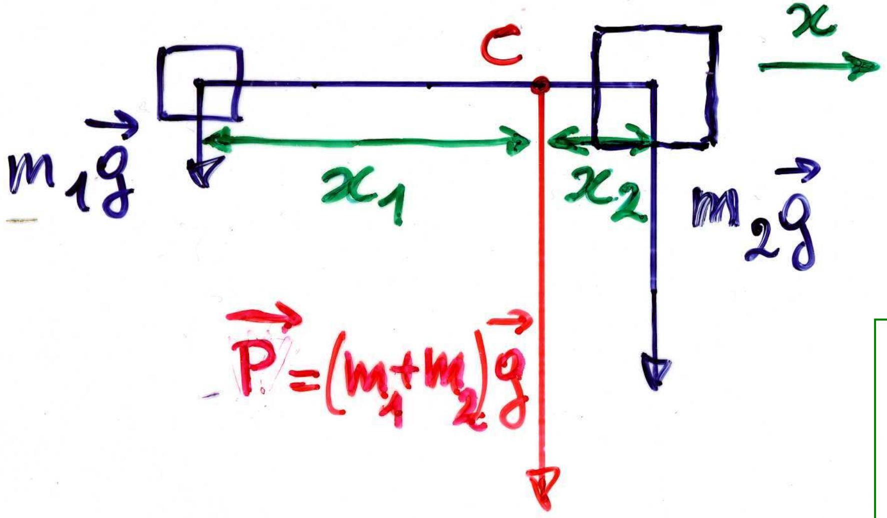
$$\vec{P} = \Sigma_i \vec{P}_i$$

da $\Sigma_i \vec{r}_i \wedge \vec{P}_i = 0$ $\Rightarrow$ baricentro

Es. di calcolo del baricentro

es.1 corpo uniforme: centro geometrico

es.2 due masse



$$m_1 g x_1 = m_2 g x_2$$

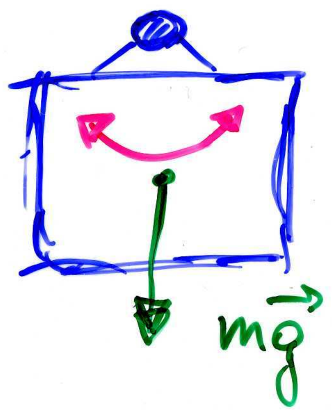
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{m_2}{m_1}$$

ho usato la definizione di baricentro: la somma dei momenti rispetto al baricentro C deve essere nulla:

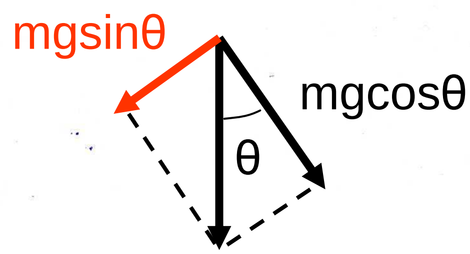
$\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 = 0 \Longrightarrow M_1 = M_2$

(i moduli sono uguali)

1)



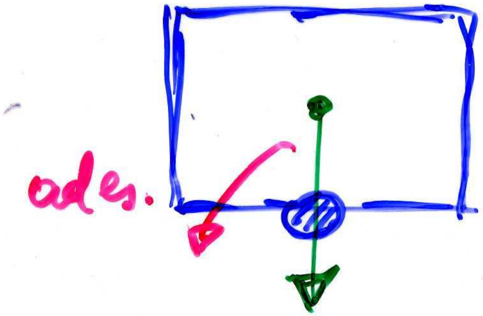
stabile



la componente mgcosθ è annullata dalla reazione del vincolo, invece mgsinθ rappresenta una f. di richiamo verso la posizione di equilibrio (cf. pendolo)

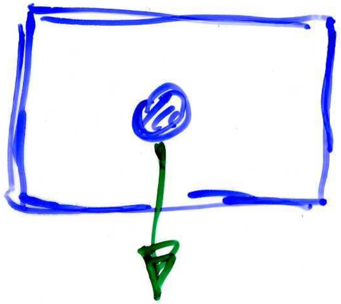
Tipi di equilibrio (2)

2)



instabile

3)



indifferente !
(da non verificare)

Pisa?

perchè le piramidi non hanno le punte in basso?

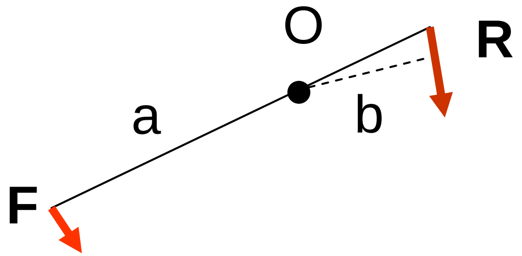
Leve

- leva: c.r. che ruota attorno ad un asse fisso (fulcro) in modo che M_F (potenza) possa bilanciare M_R (resistenza)

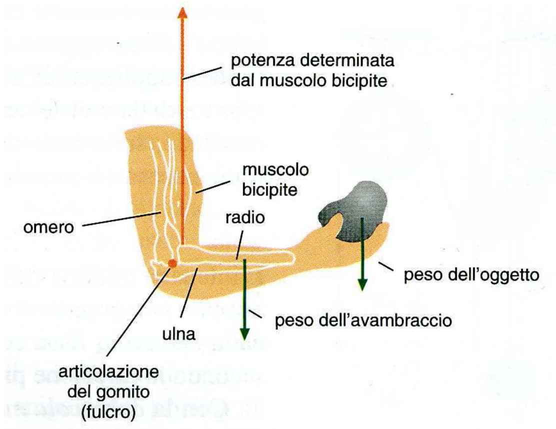
  $\mathbf{M_F + M_R = 0} \quad \rightarrow \quad \mathbf{M_F = -M_R}$

  $\rightarrow$ Fa = Rb $\rightarrow$ F/R = b/a con a,b rispettivi bracci

  (vantaggiosa, se F<R)

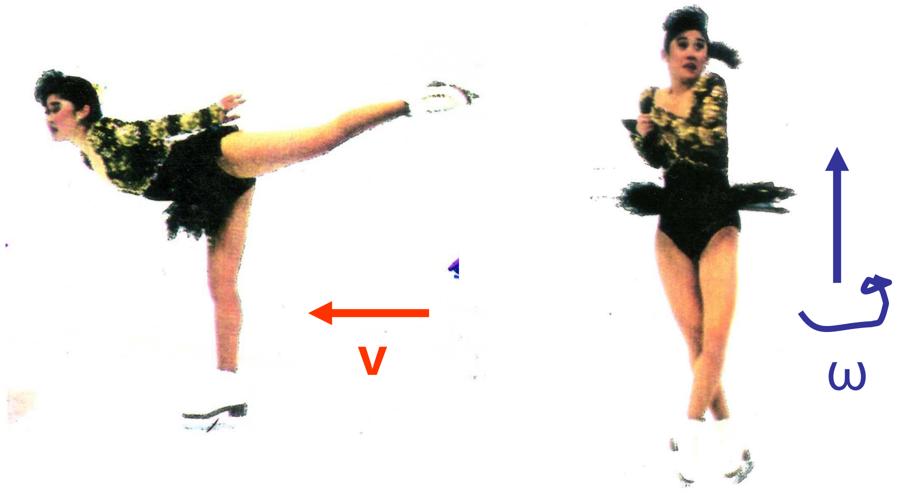


- leva di 1° tipo: fulcro O fra F e R (R e F concordi)
- leva di 2° tipo: R fra O e F (R e F discordi)
- leva di 3° tipo: F fra O e R (R e F discordi)



Moto in generale

- il moto di un c.r. libero in generale è scomponibile nel moto di traslazione del baricentro e nel moto di rotazione intorno al baricentro – per un c.r. con un asse fisso è possibile solo il moto di rotazione



Kirsti Yamaguchi in pura traslazione e in pura rotazione attorno al suo baricentro (1992)

una giostra in pura rotazione attorno ad un asse fisso: stessa ω, diversa $v = \omega r$, diversa $a_c = \omega^2 r$

Momento angolare e momento d'inerzia

- p.m., si definisce momento angolare (o della q.d.m.) il vett.

  $\boxed{\mathbf{L} = \mathbf{r} \wedge m\mathbf{v}}$

  $L = mvr = (mr^2)\omega$ (poichè **r** e **v** sono perpendicolari)

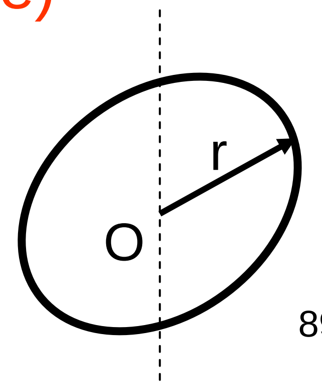
  il prodotto $I = mr^2$ si chiama momento d'inerzia (scalare) e gioca per le rotazioni il ruolo giocato della massa per le traslazioni

- c.r. esteso scomposto in particelle m_i, r_i, v_i – stesse ω, α

  $L = \Sigma_i L_i = \Sigma_i m_i r_i^2 \omega = \omega(\Sigma_i m_i r_i^2) = \omega I$ ($\mathbf{r}_i$ e $\mathbf{v}_i$ perpendicolari)

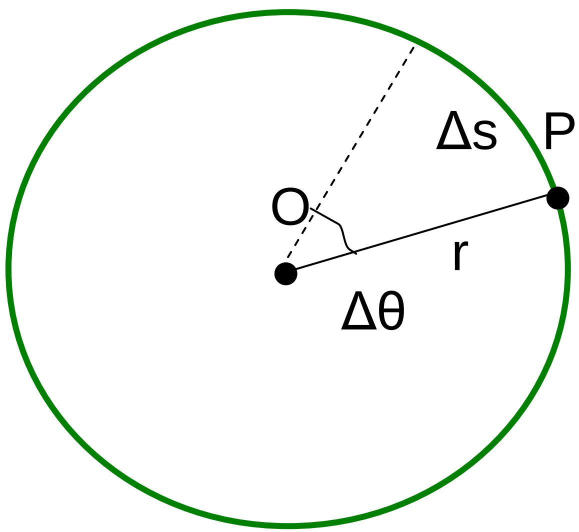
  $\boxed{I = \Sigma_i m_i r_i^2 = \int r^2 dm}$ momento d'inerzia (scalare)

  ad es. anello di raggio r $I = r^2 \int dm = mr^2$



Rotazioni: p.m. rispetto ad asse fisso

- circonferenza di raggio r, fisso, costante
- quando P si muove lungo la circonferenza varia $\theta = \theta(t)$
  rad.! – (p.m. oppure disco, cilindro scomposti in particelle)
- $\Delta s = r\Delta\theta$ $\qquad$ $OP = r$
- $v = \Delta s/\Delta t = r\Delta\theta/\Delta t = r\omega$
- $a_t = \Delta v/\Delta t = r\Delta\omega/\Delta t = r\alpha$
- $a_c = v^2/r = \omega^2 r$



- se α = cost si può ricavare
  $\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0)$
  cf. $v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$ [vedi p. 19]

Momento angolare e momento d'inerzia (2)

dimensioni e unità del momento angolare

- [Momento angolare] = [LQ] = $[ML^2T^{-1}]$
- unità SI: $1\ kg\ m^2\ s^{-1} = 1\ J \cdot s$ [joule (J) unità di energia]
- CGS: $1\ g\ cm^2\ s^{-1} = 1\ erg \cdot s =$ [erg unità di energia]
- $= 10^{-7}\ J \cdot 1s = 10^{-7}\ Js$

dimensioni e unità del momento d'inerzia

- $[I] = [ML^2]$
- unità SI: $kg \cdot m^2$
- CGS: $1\ g \cdot cm^2 =$
- $= 10^{-3}\ kg \cdot 10^{-4}\ m^2 = 10^{-7}\ kg\ m^2$

Il principio per i corpi in rotazione

- p.m., si parte da $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ($F = ma = mr\alpha$) e si moltiplica vettorialmente a dx per **r**, si ha in modulo

  $M = rF = rmr\alpha = (mr^2)\alpha = I\alpha$

- c.r. esteso, analogamente avremo, dopo averlo scomposto in particelle,

  $M_{ris} = \Sigma_i M_i = (\Sigma_i m_i r_i^2)\alpha$ (poichè tutti gli $\mathbf{M}_i$ sono paralleli)

  $\boxed{M_{ris} = I\alpha}$ (cf. $\mathbf{F}_{ris} = m\mathbf{a}$)

- possiamo riscrivere

  $M_{ris} = I\Delta\omega/\Delta t = \Delta(I\omega)/\Delta t = \Delta L/\Delta t$ (I è cost.!)

  se $M_{ris} = 0$ si ha

  $\Delta L/\Delta t = 0$, $L = \text{cost.}$ (conservazione del momento angolare)

cons. momento angolare (es.)

- pattinatrice su ghiaccio durante una piroetta: se chiude le braccia I [= Σmr^2] diminuisce e ω aumenta e viceversa (L è costante, $M_{peso} = 0$ rispetto all'asse di rotazione)

  $L = I_0\omega_0 = I\omega \quad \rightarrow \quad \omega = (I_0/I)\omega_0$

- collasso stellare – stella con $m = 2M_S$, $r_1 = R_S = 7 \cdot 10^5$ km, $T_{rot} = 10$ g che collassa gravitazionalmente ad una stella di neutroni molto densa, stessa massa, $r_2 = 10$ km; quale sarà la nuova velocità angolare?

  Assumiamo sfere uniformi: $I_i = 2/5\, m_i r_i^2$ - il sistema è isolato, niente F_{est}: $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

  $\omega_2 = \omega_1(I_1/I_2) = \omega_1(2/5mr_1^2)/(2/5mr_2^2) = \omega_1(r_1^2/r_2^2) = 4 \cdot 10^4$ rad/s

OK? $v_{perif} = 4\ 10^4$ rad/s $\cdot\ 10^4$ m $= 4\ 10^8$ m/s !! ci vorrebbe un calcolo relativistico

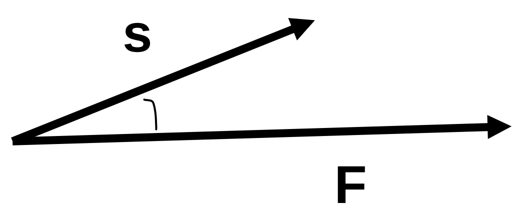
Lavoro di una forza

1. forza cost. **F** applicata ad un p.m., spostamento finito rettilineo **s** del p.m.

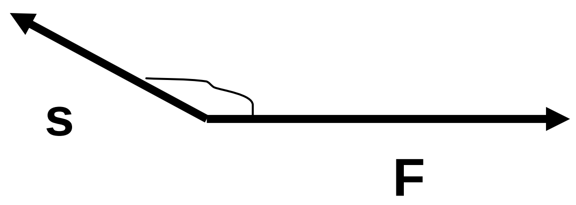
   $\mathcal{L} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{s} = F\, s \cos\theta$ (= $\mathbf{s}\cdot\mathbf{F}$)

   prodotto scalare

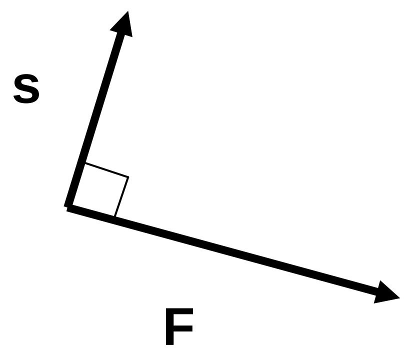
   spostamento del punto di applicazione di **F** parallelo ad **F**: $\mathcal{L} = 0$ se $F = 0$, $s = 0$, $\theta = 90°, 270°$



$\mathcal{L} > 0$



$\mathcal{L} < 0$



$\mathcal{L} = 0$

Lavoro (2)

- dimensioni del lavoro (stesse del momento di F)
  $[\mathcal{L}] = [Fs] = [MLT^{-2}\ L] = [ML^2T^{-2}]$
  unità SI: 1N·1m = 1 joule = 1 J "
  CGS: 1cm·1dina = 1 erg "
  1 erg = 10^{-2} m · 10^{-5} N = 10^{-7} J
  (J e erg sono usate solo per lavoro, energia e calore)
- Potenza: rapidità con cui è eseguito un lavoro
  $\mathcal{P} = \mathcal{L}/\Delta t$
  $[\mathcal{P}] = [ML^2T^{-3}]$
  unità SI: 1 J/s = 1 watt = 1 W; CGS: 1 erg/s
  altra unità, cavallo vapore: 1 CV = 735 W

Lavoro di una forza variabile

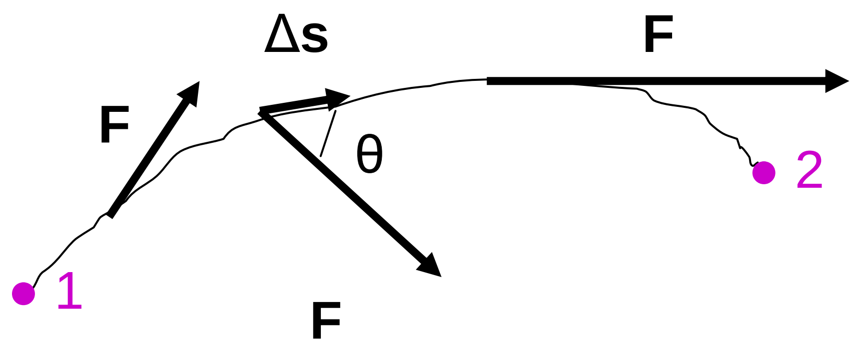
2. forza variabile (mod.,direz.,verso), traiettoria curva

dividiamo la traiettoria

in trattini $\Delta\mathbf{s}$ con $\mathbf{F}$ cost.

nel tratto (→ definiz.

precedente)



$\Delta\mathcal{L} = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{s} = F\,\Delta s\cos\theta$

per ottenere il lavoro totale:

$\mathcal{L} = \Sigma\mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{s} = \Sigma F\,\Delta s\cos\theta$

in effetti a rigore:

$\mathcal{L} = \lim_{\Delta s\to 0} \Sigma F\Delta s\cos\theta = \int_1^2 F\cos\theta\, ds$

(somma su ∞ tratti di lunghezza infinitesima ds)

Lavoro di F_{ris} e energia cinetica

- p.m. di massa m soggetto a $\mathbf{F_{ris}} = \mathbf{F}$ cost, $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ => moto unif. accel; prendiamo Δt => $\Delta x = x_2 - x_1$ nella direzione. del moto; si ha

  $a(x_2 - x_1) = ½(v_2^2 - v_1^2)$ [vedi p. 19]

  $\mathcal{L} = F(x_2 - x_1) = ma(x_2 - x_1) = ½mv_2^2 - ½mv_1^2$

  si definisce energia cinetica

  $\boxed{K = ½mv^2}$ **(*sempre* ≥ 0, poichè m ≥0 e v^2 ≥0)**

  il lavoro di F_{ris} uguaglia ΔK del p.m.

- corpo di massa m, moto traslatorio (stessa **v** per tutti i punti): $K = ½mv^2$; sistema di forze agenti sul corpo che trasla (traiettoria retta o curva)

  $\boxed{\mathcal{L}_{ris} = ½m(v_2^2 - v_1^2) = \Delta K}$ **(teorema dell'energia cinetica)**

  lavoro totale delle f. agenti = variazione energia cinetica

Energia

- energia = capacità di compiere lavoro (dimensioni, unità: le stesse del lavoro)
- es.1 energia cinetica: corpo in moto (**v**, K) comprime una molla, $\mathcal{L}$ contro la f. elastica
- es.2 sasso lanciato verso l'alto ($\mathbf{v}_0$, K), $\mathcal{L}$ contro la f. di gravità

- es.3 si lascia cadere un corpo da fermo (K = 0): l'energia cinetica raggiunta quando il c. tocca il suolo dipende dalla quota iniziale (energia potenziale) – moto unif. acc. $v_0^2=2gh$

Forze conservative

- se il lavoro $\mathcal{L}$ delle f. dipende ***solo*** dalla posizione 1 (iniziale) e 2 (finale) e ***non*** dalla scelta del percorso 12: forze conservative
- le f. che dipendono solo dalla posizione sono conservative (in particolare le f. costanti sono conservative!)
- esempi di f. conservative: f. peso $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$, f. elastica $\mathbf{F} = k(\mathbf{x}-\mathbf{x_0})$, f. elettrostatica $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, vedi più avanti, etc.
- se le f. dipendono da t esplicitamente oppure anche implicitamente (ad es. attraverso **v**, f. di attrito (resistenza) dell'aria $\mathbf{F_a} = -cAv^2(\mathbf{v}/v)$, f. di attrito radente $\mathbf{f_c} = -\mu_c N(\mathbf{v}/v)$, f. magnetica $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$, vedi più avanti, etc.) non sono forze conservative

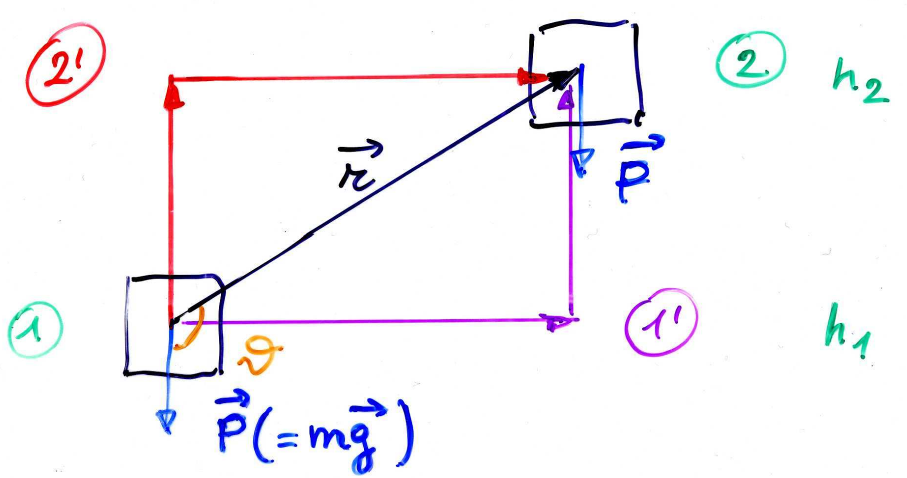
Forze conservative (2)

- es. f. peso (costante), supponiamo di spostare una massa m da una quota h_1 ad una h_2, posso scegliere diversi percorsi: 12 (diretto), 11'2, 12'2 etc.

$$\mathcal{L}_{12} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{r} = Pr\cos\theta = -mg(h_2-h_1)$$

$$\mathcal{L}_{11'2} = \mathcal{L}_{11'} + \mathcal{L}_{1'2} = 0 + [-mg(h_2-h_1)] = -mg(h_2-h_1)$$

$$\mathcal{L}_{12'2} = \mathcal{L}_{12'} + \mathcal{L}_{2'2} = -mg(h_2-h_1) + 0 = -mg(h_2-h_1)$$



Forze conservative (3)

- il lavoro è sempre lo stesso, proviamo 13'32, 12 secondo una spezzata (a scalini), 12 secondo una curva continua

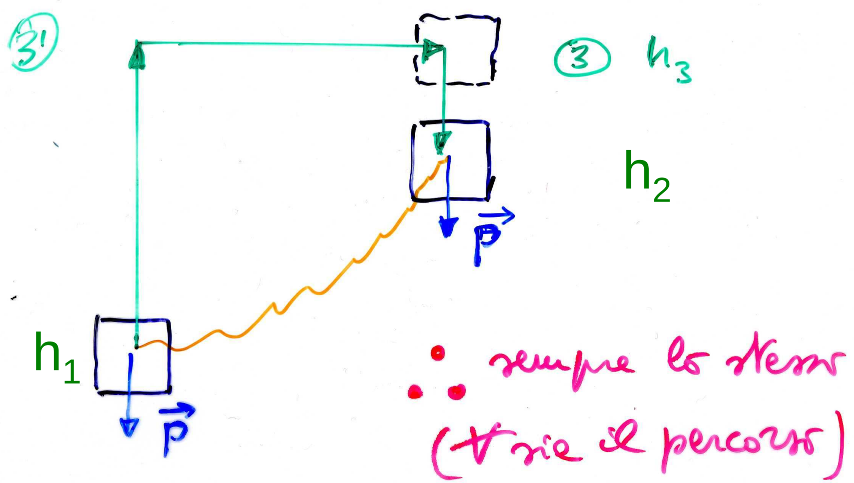
  ...

  $$\mathcal{L}_{13'32} = \mathcal{L}_{13'} + \mathcal{L}_{3'3} + \mathcal{L}_{32} = -\,mg(h_3-h_1) + 0 + mg(h_3-h_2) = -\,mg(h_2-h_1)$$

  $$\mathcal{L}_{12spezzata} = \Sigma(0 + [-mg\Delta h]) = -\,mg(h_2-h_1)$$

  ...

- il lavoro dipende solo dalla quota iniziale e finale, non dal modo in cui si passa da 1 a 2



Energia potenziale

- se **F** è conservativa (dipende solo dalla posizione) ho che ***$\mathcal{L}_{12}$ è indipendente dal percorso e dipende solo dagli estremi*** (di conseguenza sarà $\mathcal{L}_{11} = 0$ sempre)
- posso porre

$$\boxed{\mathcal{L}_{12} = W_1 - W_2 = -\Delta W}$$

dove W è l'energia potenziale: il lavoro da 1 a 2 è = – (la variazione dell'energia potenziale)

NB si definisce ***solo*** la variazione dell'e.p., ***non*** il suo valore in assoluto

ad es. f. peso

$W(h) - W(0) = -\mathcal{L}_{0h} = mgh$

se, *arbitrariamente*, scelgo $W(0) = 0$, ho $W(h) = mgh$

[ma qualsiasi altra scelta andrebbe bene lo stesso: $\Delta W = W_2 - W_1 =$
$= W_2' - W_1' = (W_2+c) - (W_1+c) = W_2+c - W_1-c$ con c cost.]

Conservazione dell’energia meccanica

- p.m. o corpo soggetti a f., posso definire in genere

  $\boxed{E = K + W}$

  energia totale meccanica, somma di e. cinetica ed e. potenziale (con $\mathcal{L}_{12} = K_2 - K_1$, lavoro ***della*** f., vedi p. 97), scalare

- se le f. sono conservative avrò

  $\mathcal{L}_{12} = K_2 - K_1 = W_1 - W_2$

  da cui

  $$\boxed{K_2 + W_2 = K_1 + W_1 = \text{cost.} \qquad (= E_0)}$$

  oppure

  $\Delta E = 0$

  legge di conservazione dell’energia totale meccanica

Conservazione dell'energia meccanica (2)

- ad es.1 f. peso / caduta libera, si parte con **v** = 0 dalla quota h

  $E(h) = K(h) + W(h) = 0 + mgh = mgh$ $(= E_0)$

  $E(0) = K(0) + W(0) = ½mv^2 + 0 = ½m \cdot 2gh = mgh$

  genericamente, $0 \leq y \leq h$

  $E(y) = ½mv_y^2 + mgy = mgh$

- ad es.2 moto di un p.m. di massa m attaccato ad una molla di costante elastica k, x allungamento della molla

  $E(x) = K(x) + W(x) = ½mv^2 + ½kx^2$ $(= E_0)$

  $E(0) = ½mv_{max}^2$ *(posizione di equilibrio, x = 0)*

  $E(A) = ½kA^2$ *(massima elongazione, v = 0)*

  $\Rightarrow E_0 = ½mv_{max}^2 = ½kA^2$

Lavoro delle forze non conservative

- es. considero un blocco, m = 2.04 kg, che si muove senza attrito su un piano sotto l'azione di F =15 N cost. per un tratto d = 2 m (Fd = 30 J)

  $\mathcal{L} = -\Delta W = K_2 - K_1$

  $W(x) = -Fx + \text{cost} = F(d - x)$

  $E_0 = 30$ J; K cresce; W diminuisce di conseguenza

  $E(x) = K(x) + W(x) = E_0 = \text{cost}$

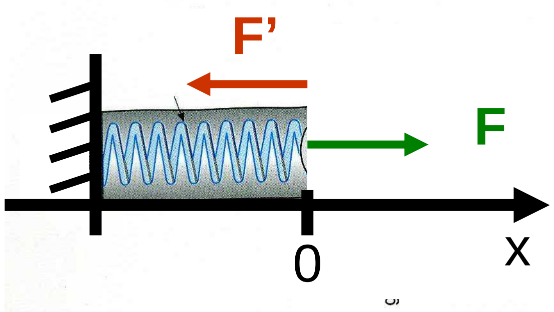
- se c'è attrito, ad es. $\mu_c = 0.5$, dovrò includere il lavoro della f. d'attrito, $f_c = \mu_c N = \mu_c mg = 10$ N, che si oppone al moto: $\mathcal{L}_{nc} = -f_c d = -20$ J

  $\mathcal{L} = -\Delta W + \mathcal{L}_{nc} = K_2 - K_1$

  $E(x) = K(x) + W(x) < E_0$

Lavoro della forza elastica

- molla orizzontale, $x = 0$ a riposo, data una f. deformante $x = F/k$ ($F = kx$, Hooke) f. elastica della molla F'



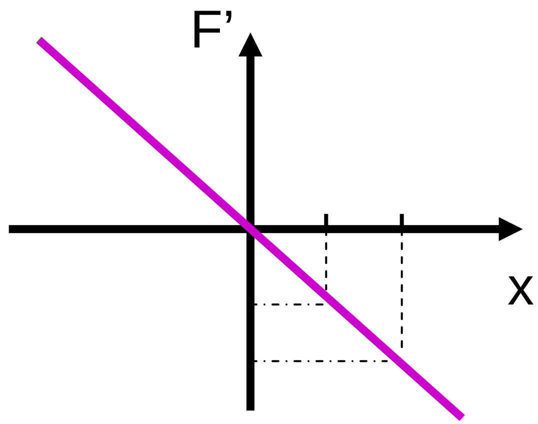
=> in una nuova posizione di equilibrio

$\mathbf{F} + \mathbf{F'} = 0$; $\mathbf{F'} = -\mathbf{F}$; $F' = -F = -kx$

allunghiamo la molla da x_1 a x_2,

F' passa da $F_1' = -kx_1$ a $F_2' = -kx_2$

F' è variabile ⇨ uso $\underline{F'} = (F_1' + F_2')/2$



$\mathcal{L} = \underline{F'}\,\Delta x = (-kx_1 - kx_2)/2 \cdot (x_2 - x_1)$

$= -(\frac{1}{2}k\,x_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2) = -\Delta W$

En. potenziale elastica ed en. totale

- en. potenziale della molla, allungamento x

  $W = ½kx^2$

- a stretto rigore si sarebbe dovuto fare (risultato uguale)

  $\mathcal{L} = \int_{x1}^{x2} F'dx = -\int_{x1}^{x2} kxdx = -k \int_{x1}^{x2} xdx = -k/2\,(x_2^2 - x_1^2)$

- lancio un blocco di massa m contro la molla con velocità $\mathbf{v_0}$ secondo x: comprimerà la molla fino a fermarsi – ponendo $x_1 = 0$, $x_2 = A$ ($v_1 = v_0 = v_{max}$, $v_2 = 0$), trascuriamo gli attriti

  P ed **N** non fanno lavoro

  $\mathcal{L} = -½kA^2$ lavoro della f. elastica (molla)

  $\Delta K = 0 - ½mv_{max}^2$ variazione en. cinetica (blocco)

  $\mathcal{L} = \Delta K$ (teor. dell'en. cinet.) => $½kA^2 = ½mv_{max}^2$

  si ha un trasferimento di energia dal blocco alla molla

En. totale sistema massa più molla

- per due allungamenti generici x_1 e x_2 avrò

  $\Delta K = -\Delta W$

  $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2)$

  ovvero

  $\frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$

  o anche

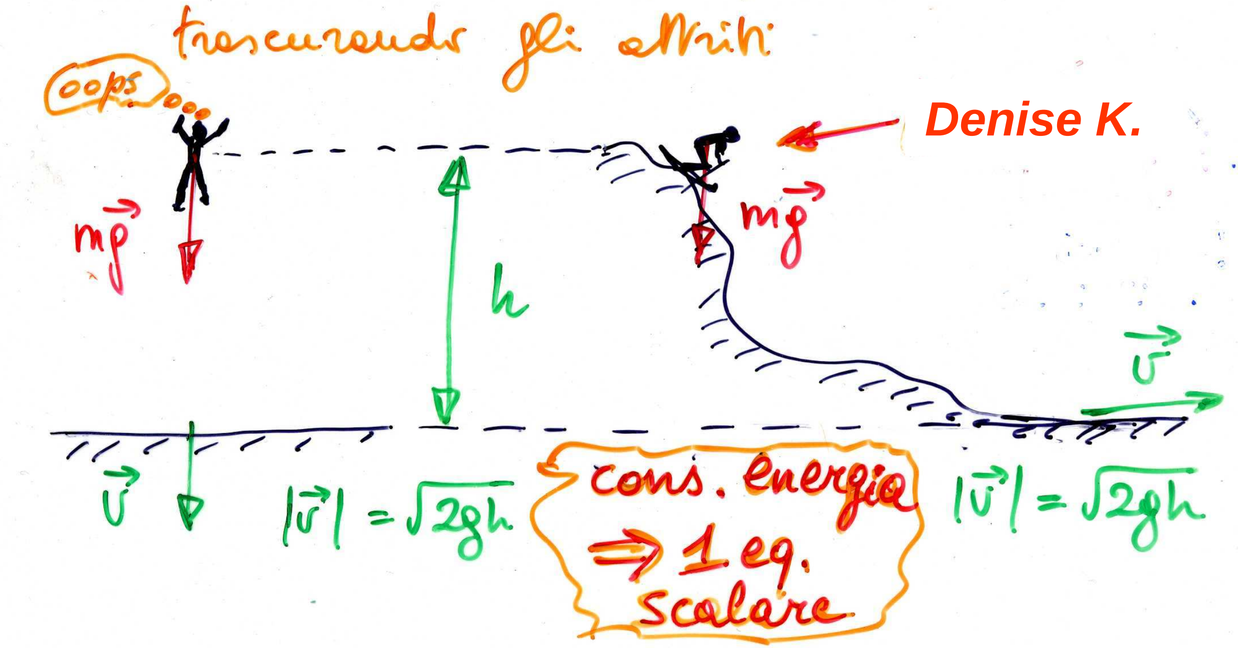
  $\frac{1}{2}mv(t)^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2 = \text{cost} \qquad (= E_0)$

  che è l'energia totale di un moto armonico nel tempo di periodo $T = 2\pi/\omega$ dove $\omega^2 = k/m$

  (se il blocco resta agganciato alla molla, si muoverà di moto armonico semplice in assenza di attriti)

Caveat

- l'energia è uno scalare => direzioni ignote
  ad es. Paracadutista (mancato) & sciatore



- gli attriti con il mezzo circostante riducono l'en. totale meccanica che si trasforma in altra energia

Meccanica 3a parte

Elasticità

Trazione e compressione

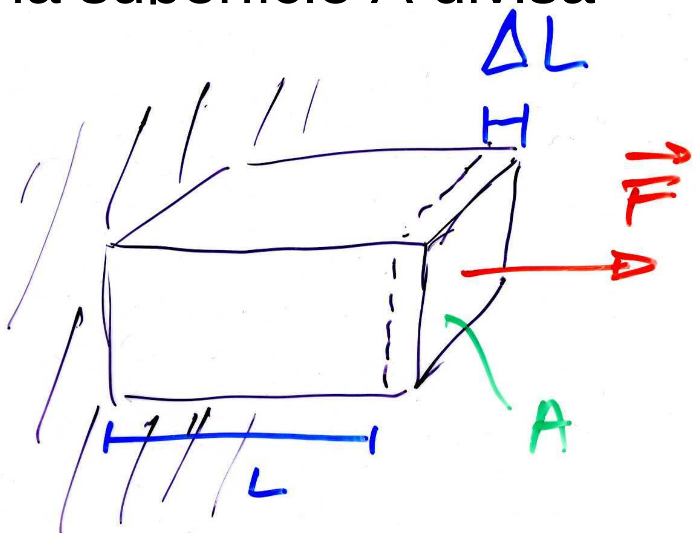
- i corpi reali non sono rigidi ma più o meno deformabili, il tipo di deformazione dipende da come si applicano le f.
- si definisce sforzo la f. applicata su una superficie A divisa la superficie stessa

  sforzo = F/A

  $[F/A] = [MLT^{-2}L^{-2}] = [ML^{-1}T^{-2}]$

  unità SI: N/m^2 o pascal (Pa)

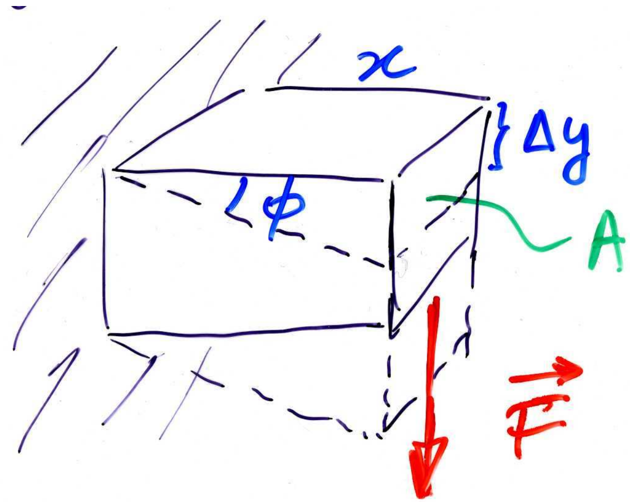
  CGS: 1 $dyne/cm^2 = 10^{-1}\ N/m^2$



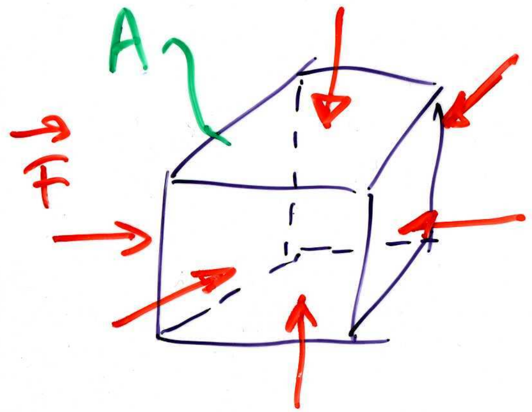
- ***deformazione*** = ΔL/L (numero puro) adimensionale - la definizione di deformazione fa riferimento al tipo di sforzo: trazione (compressione) implica sforzo ortogonale alla superficie

Sforzo di taglio e di volume

- taglio: forza parallela alla sup. A
- sforzo = F/A
- deformazione = Φ (adimensionale)
  con tgΦ = Δy/x



- sforzo di volume (presente anche per liquidi e gas, senza forma propria)
- sforzo = F/A = Δp (pressione)
- deformazione = - ΔV/V

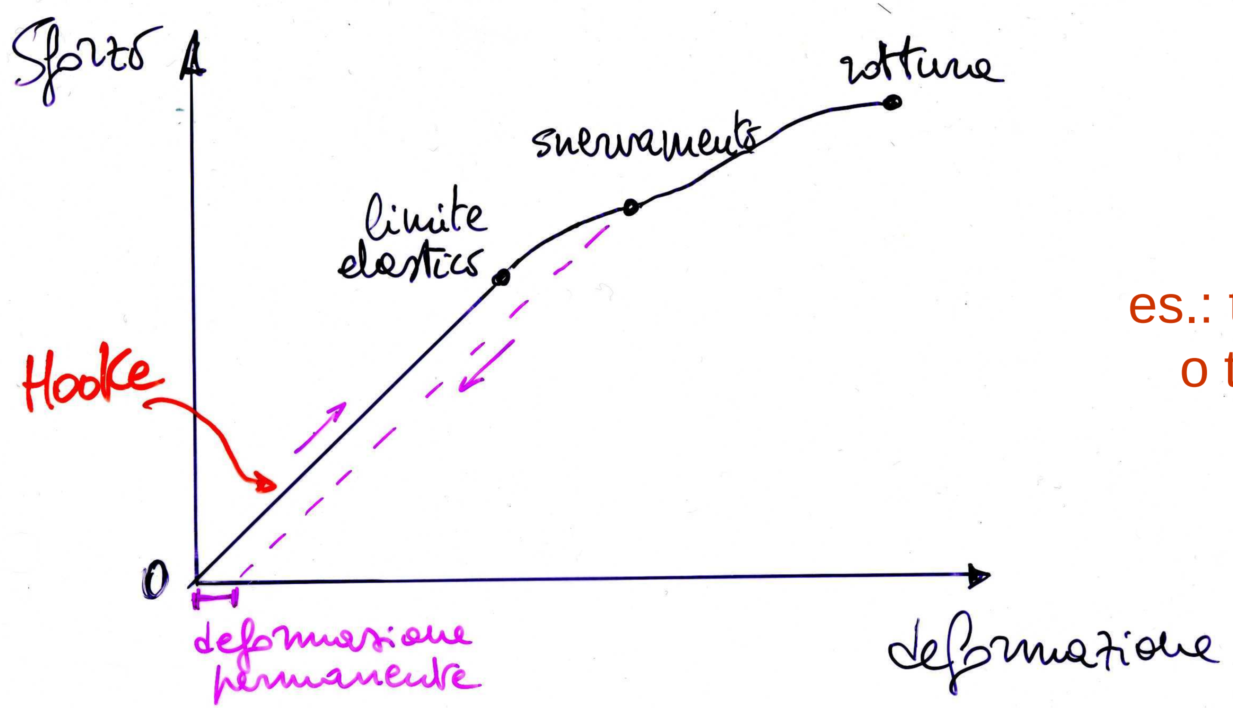


Legge di Hooke

- per piccole deformazioni, entro il limite elastico => vale la legge di Hooke

  $\boxed{\text{sforzo} \propto \text{deformazione}}$

  (cf. con F = kx, forza elastica)



es.: trazione o taglio

Legge di Hooke (2)

1. trazione/compress.
   F/A = Y ΔL/L
   (Y – modulo di Young)
2. taglio
   F/A = nΦ
   (n – modulo di rigidità)
3. elasticità di vol.
   Δp = - B·ΔV/V
   (B – modulo omogeneo)

		Y $(10^9 \frac{N}{m^2})$	n $(10^9 \frac{N}{m^2})$	B $(10^9 \frac{N}{m^2})$
Solidi	Acciaio	210	83	170–180
	Pb	18	8	43
	Osso	~10	–	–
Elastomeri	Muscolo	~0.005	–	–
	Gomma	~0.001	–	–
Liquidi	H_2O			2.2
	Hg			26
Gas	gas perfetto (1 atm)			~0.0001

Applicazione della legge di Hooke

- $$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{Y}\frac{F}{A}$$ => $\Delta L = F \cdot L/(YA) = F/k$ con $k=YA/L$

- quanto si deforma l'osso di una gamba?
- $Y_{osso} \sim 10^{10}$ N/m^2
- 40 kg (su una gamba) => F ~ 400 N
- L ~ 0.9 m (1/2 altezza)
- A ~ 10 cm^2 ~ 10^{-3} m^2

=> $k = YA/L \sim 1.1\ 10^7$ N/m

$\Delta L = F/k \sim 3.6\ 10^{-5}$ m = 36 μm

(verifica a posteriori: $\Delta L/L \sim 4\ 10^{-5}$ piccolo, si può quindi ammettere che valga la legge di Hooke)

Applicazione delle leggi dell'elasticità

- confronto formica-elefante sotto l'azione del proprio peso
- assumiamo che siano fatti con lo stesso materiale, stessa resistenza al carico, stessa densità

  $\rho = M/V = M/L^3$
- schematicamente prendiamo dei cubi, formica, area di base $A = L^2$, $M = \rho V = \rho L^3$
- $F/A = Mg/L^2 = \rho L^3 g/L^2 = \rho L g$
- elefante, $L' = nL$, $A' = n^2L^2$, $P = n^3Mg$ $n \sim 3000$
- $F'/A' = n^3Mg/n^2L^2 = n\ \rho L g$

  se lo sforzo di rottura è lo stesso => zampe (ossa) dell'e. devono essere molto più tozze di quelle della f.

Fine della meccanica