

# Meccanica dei Fluidi

Πάντα ρέει  
Eraclito



Corso di Fisica per CTF  
AA 2011/12



# Fluidi

- i fluidi sono pensati come sistemi continui
- non hanno forma propria e non sostengono sforzi tangenziali (staticamente)
- per trattarli dovremo sostituire alle grandezze massa, lavoro, energia ... le corrispondenti **densità**

– densità (di massa) media

$$\rho = m/V$$

– pressione  $p = \frac{F}{A} (= \frac{F \times s}{A \times s} = \frac{\mathcal{L}}{V})$

(densità di lavoro-energia)(+)

– densità di energia potenziale

$$\frac{mgh}{V} = \rho gh$$

– densità di energia cinetica

$$\frac{1/2 mv^2}{V} = \frac{1}{2} \rho v^2$$

(+)  $F \cdot \text{spostamento} = \text{lavoro}$

$A \cdot \text{spostamento} = \text{volume}$



# Densità (di massa)

- **densità assoluta**

$$\rho = m/V$$

(massa divisa il V che occupa, media)

$$\Rightarrow m = \rho V \quad \text{e} \quad V = m/\rho$$

$$[\rho] = [M/V] = [ML^{-3}]$$

unità SI:  $\text{kg/m}^3$

CGS:  $\text{g/cm}^3$

$$1 \text{ g/cm}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3$$

altre unità:  $\text{kg/l} = \text{g/cm}^3$ ;  $\text{g/l} = \text{kg/m}^3 \dots$  ( $1 \text{ l} = 10^{-3} \text{ m}^3 = 10^3 \text{ cm}^3$ )

- **densità relativa**

$$d_r = \rho/\rho_{\text{rif}}$$

(numero puro)

(riferimento:  $\text{H}_2\text{O}$  distillata a  $4^\circ \text{ C}$ ,  $\rho_{\text{H}_2\text{O}} = 10^3 \text{ kg/m}^3$ )

$$\Rightarrow \rho = d_r \rho_{\text{rif}} = d_r \rho_{\text{H}_2\text{O}}$$



# Sforzo e pressione

- solidi  
(forma propria)

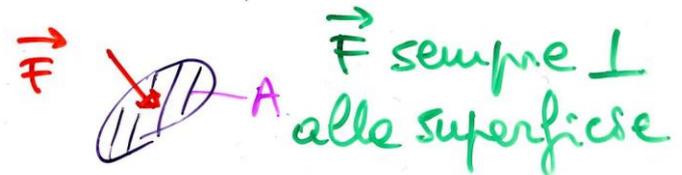
$$\frac{F}{A} \text{ sforzo - vettore}$$



dipende dall'orientazione

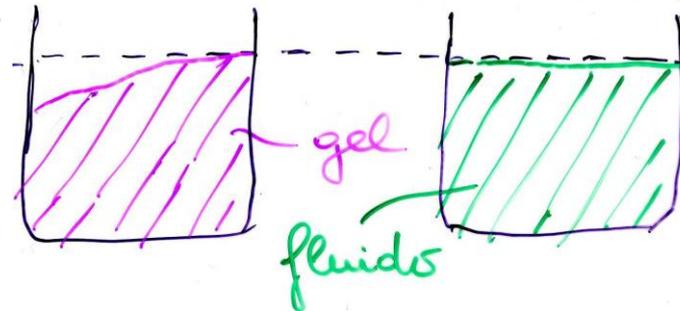
- fluidi  
(senza forma propria)

$$p = \frac{F}{A} \text{ pressione - scalare}$$



- gel  
(~ senza f.p.)

equipotenziale





# Pressione

- la pressione (in un fluido) è una grandezza scalare, non dipende dall'orientazione della superficie su cui la forza è applicata – basta prendere **un punto di un fluido in quiete: risultante nulla** →  $p = F/A$  è uguale in tutte le direzioni
- $[p] = [F/A] = [ML^{-1}T^{-2}]$   
unità SI: N/m<sup>2</sup> ovvero pascal (Pa)  
CGS: 1 dyne/cm<sup>2</sup> = 10<sup>-5</sup> N/10<sup>-4</sup> m<sup>2</sup> = 0.1 Pa (baria)  
altre unità: 1 atm = 1.01325 10<sup>5</sup> Pa  
1 bar = 10<sup>5</sup> Pa  
1 millibar = 10<sup>2</sup> Pa  
1 mmHg = 1 torr = 1/760 atm = 1.33 10<sup>2</sup> Pa  
(vedi definizioni successive per atm, mmHg)



## Pressione (2)

---

- altri esempi di pressione:
  - un blocco di massa  $m$  e peso  $\mathbf{F} (= \mathbf{P}) = m\mathbf{g}$  appoggiato sulla base di area  $A$  esercita una pressione  $p$   
$$p = F/A$$
  
(anche una persona esercita sul pavimento una pressione)
- se conosciamo la pressione  $p$  e l'area  $A$  possiamo calcolare la forza  $F$  corrispondente  
$$F = pA$$
  
quindi, per una data pressione, la forza aumenta in modo  $\propto$  area



# Fluidostatica



# Liquidi e gas

---

- nei fluidi lo sforzo ha carattere di pressione
- **i liquidi sono poco compressibili** (vedi Meccanica pag. 107, tabella dei moduli di elasticità):  $B_{\text{liq}} \sim B_{\text{sol}}$  – cioè servono grandi sforzi per piccole variazioni di volume:  $\Delta V/V = - (F/A)/B = -\Delta p/B$  (nei liquidi le molecole sono vicine ~ come nei solidi e  $\rho \sim \text{cost.}$ , **indipendente da p**)
- **i gas invece sono molto compressibili**,  $B_{\text{gas}}$  è molto piccolo (le molecole del gas sono lontane fra loro, il volume occupato è quasi vuoto e  $\rho = \rho(p)$  **dipende da p**, cioè può variare)



# La pressione nei liquidi: legge di Stevino

- consideriamo un cilindro di fluido (liquido) in equilibrio

– lungo la verticale  $\Sigma_i F_i = 0 = p_0 A + \rho h A g - p(h) A$  (\*)

dove  $m = \rho V = \rho h A$  è la massa del fluido

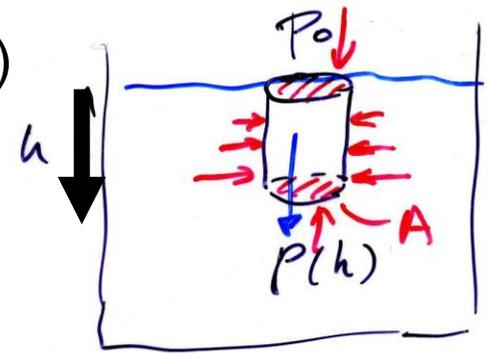
e  $h$  è la profondità nel fluido (+va verso il basso)

– la forze sul mantello si elidono a due a due:

prendendo due piccole aree uguali laterali

alla stessa  $h$  si ha  $F = p \Delta A = p' \Delta A = F'$

da cui  $p' = p$



- eliminando  $A$  nella (\*) e risolvendo per  $p(h)$  si ottiene la legge di Stevino in forma integrale

$$p(h) = p_0 + \rho g h$$

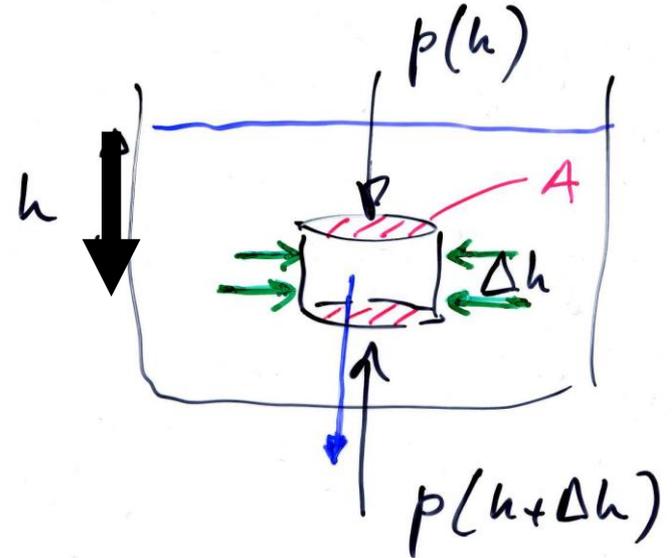
dove  $p_0$  è la pressione sulla superficie superiore (se è la sup. libera del liquido,  $p_0 = p$  atmosf.):  **$p$  aumenta con  $h$**



## Legge di Stevino (2)



- in generale consideriamo un volumetto in equilibrio all'interno di un fluido ( $\sum_i \mathbf{F}_i = 0$ )
    - f. orizzontali si elidono a 2 a 2
    - f. verticali
- $$Ap(h+\Delta h) = Ap(h) + A\rho g\Delta h$$



- ossia

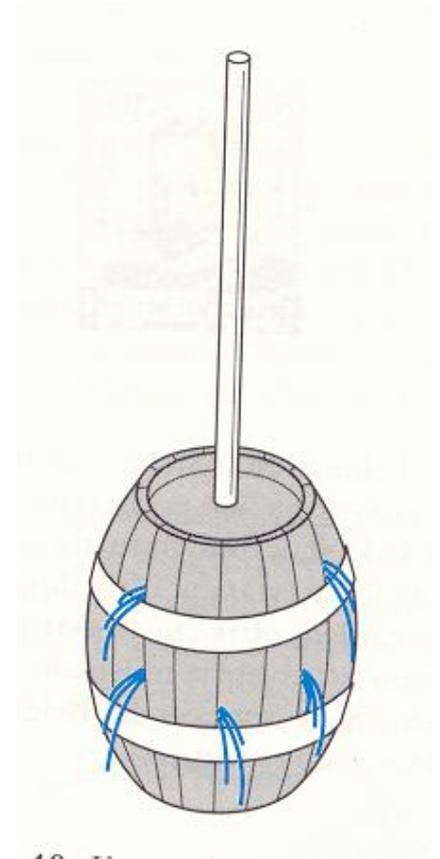
$$\Delta p = p(h+\Delta h) - p(h) = \rho g\Delta h$$

che, al limite per  $\Delta h \rightarrow dh$ , è la legge di Stevino in forma differenziale e vale anche per i gas (ad es. con  $\rho_{\text{gas perfetto}} = [M/(RT)]p$ , vedi più avanti)



# Pressione idrostatica

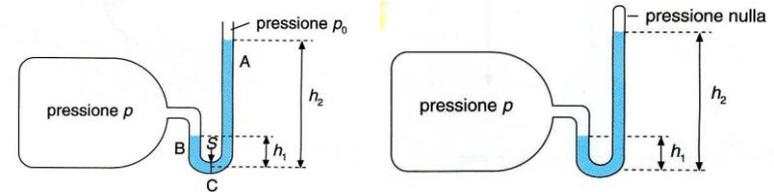
- pressione idrostatica: la pressione esercitata sulla base da una colonna di fluido in quiete ( $\rho g \Delta h$ )
- non dipende dalla forma del contenitore
- per un liquido dipende solo da  $\Delta h$  non dalla profondità nel fluido
- **non dipende dalla m del fluido** – ad es.1 un tubicino sufficientemente lungo inserito in una botte sigillata e riempita di liquido la fa scoppiare! – ad es.2 un cuscino d'aria alla p di 20 bar sostiene una colonna di Fe di ugual sezione ed alta 25.4 m





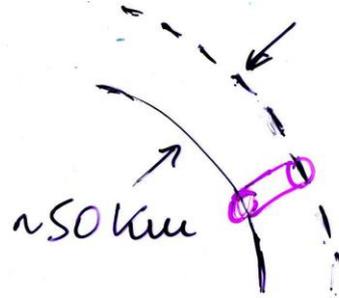
# Misura della pressione, pressione atmosferica

- $p$  si misura con manometri (ad  $H_2O$ , per piccole  $\Delta p$ , altrimenti a Hg), elettromanometri

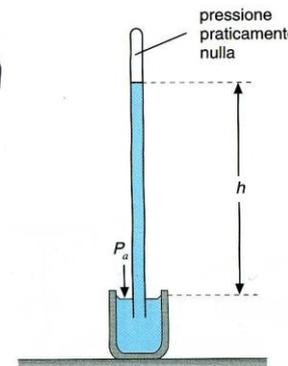
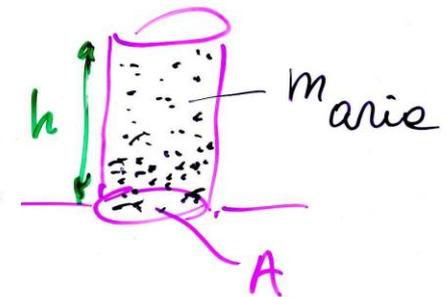


- pressione atmosferica  $p_0$  (cfr. esperienza di Torricelli, barometro: la pressione dell'aria è ~ quella di **76 cm di Hg**) – la “pressione normale” dell'aria è quella di 76.0 cm di Hg a 0 m s.l.m., 45° di latitudine e 0 °C.  **$p_0 = 101325 \text{ Pa} = 1 \text{ atm}$**

- l'atmosfera è spessa ~ 50 km
- la densità decresce con  $h$

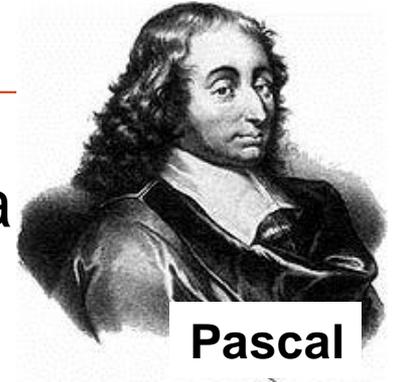


- $p_{\text{aria}}/A = m_{\text{aria}}g/A$
- $p \sim \frac{1}{2} p_0$  per  $h \sim 5400 \text{ m}$





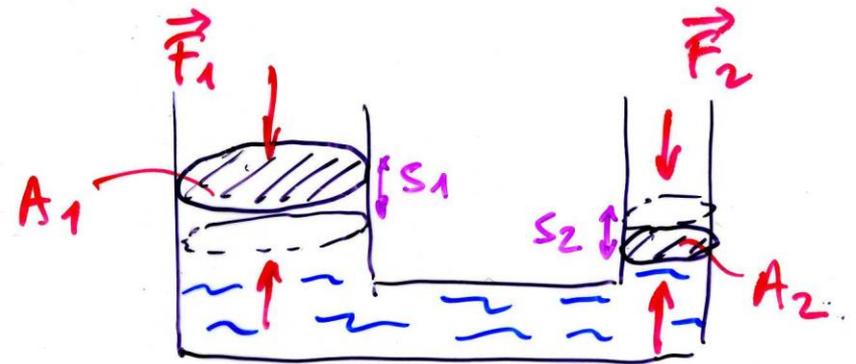
# Legge di Pascal



- dalla legge di Stevino, se la pressione esterna varia di  $\Delta p_0 = p_0' - p_0$ , varierà anche la pressione all'interno di un liquido di  $\Delta p = \Delta p_0$
- in genere per un fluido incompressibile una variazione di  $p$  esterna si trasmette inalterata a tutto il fluido (“principio” di Pascal)
- ad es. pressa o torchio idraulico

$$\Delta p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$F_1 = F_2 \frac{A_1}{A_2} > F_2$$



(ma il lavoro è:  $F_1 s_1 = F_2 s_2$  !)

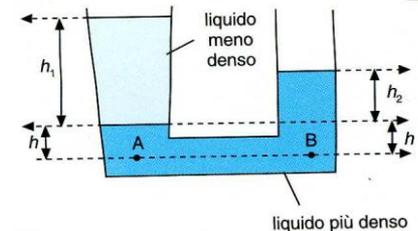


# Altre conseguenze della legge di Stevino

- es. 1 due fluidi immiscibili con  $\rho_1 \neq \rho_2$  in recipienti comunicanti: sia  $h_1$  l'altezza del meno denso rispetto alla sup. di separazione e  $h_2$  quella del più denso, si avrà

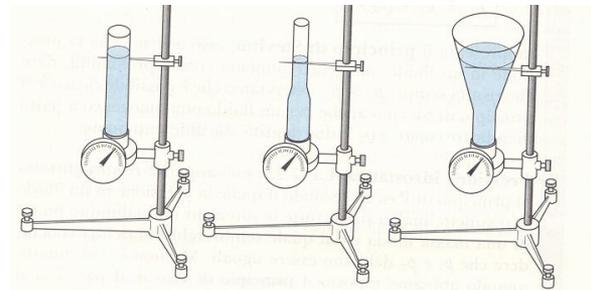
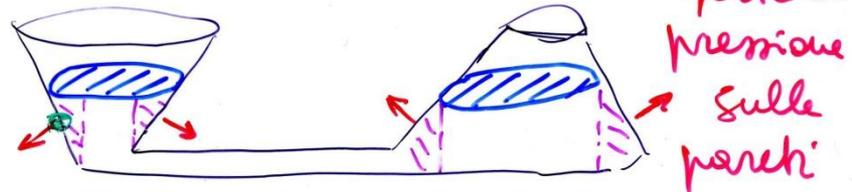
$$p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2; \quad \rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$$

$$h_1/h_2 = \rho_2/\rho_1$$



- es. 2 “paradosso idrostatico”:  $p$  dipende solo dalla profondità  $h$

- le pareti “sostengono” il fluido
- il fluido “sostiene” le pareti
- indipendenza dalla forma del contenitore





# Spinta idrostatica

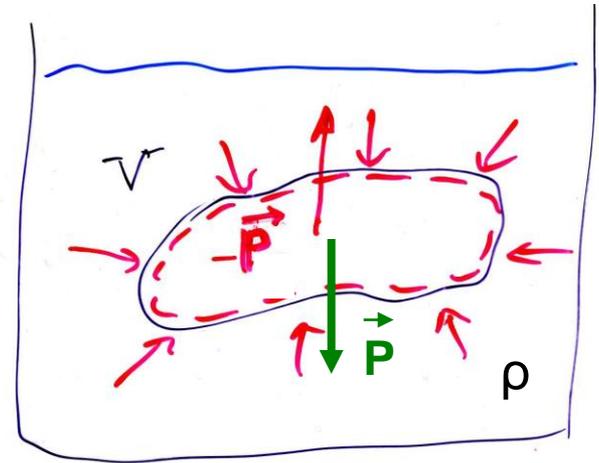
- prendiamo un volume  $V$  di fluido (liquido o gas) **in quiete**, (Il principio d.): il suo peso  $\mathbf{P} = m\mathbf{g} = \rho V\mathbf{g}$  dovrà essere equilibrato da una f.  $-\mathbf{P}$  dovuta al resto del fluido
- sostituiamo il fluido con un corpo di uguale  $V$ , esso subirà quindi una spinta diretta verso l'alto

$$F_S = -\rho Vg$$

dovuta al fluido circostante (spinta idrostatica)

- sul corpo agisce quindi ( $\rho'$  densità del c.) una f. totale

$$F_{\text{ris}} = P + F_S = P - \rho Vg = \rho' Vg - \rho Vg = (\rho' - \rho)Vg$$



“Tipica” spinta idrostatica:  
corpi parzialmente  
immersi nel Mar Morto,  
 $\rho \sim 1.24 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$  (cfr.  
con acqua di mare aperto,  
 $\rho \sim 1.02\text{-}1.03 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ )



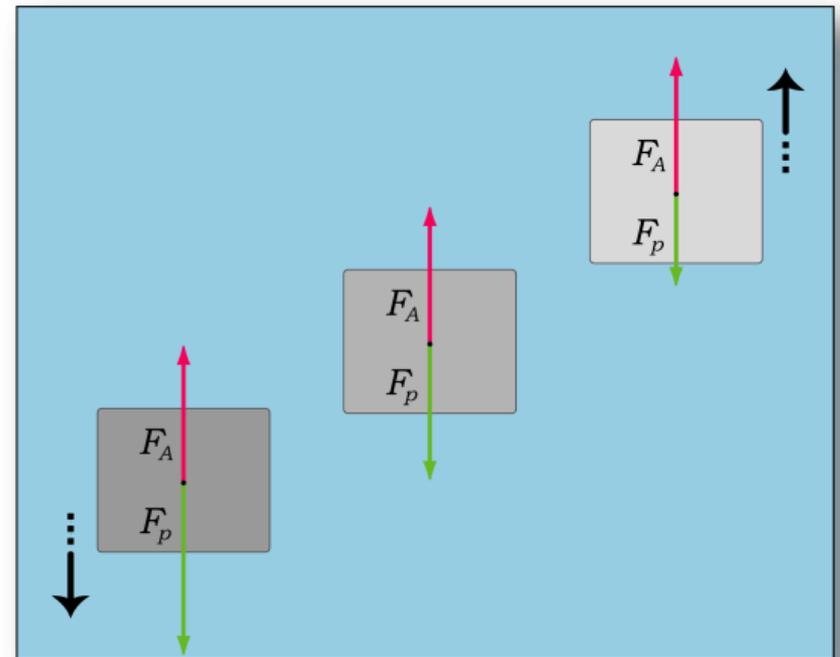
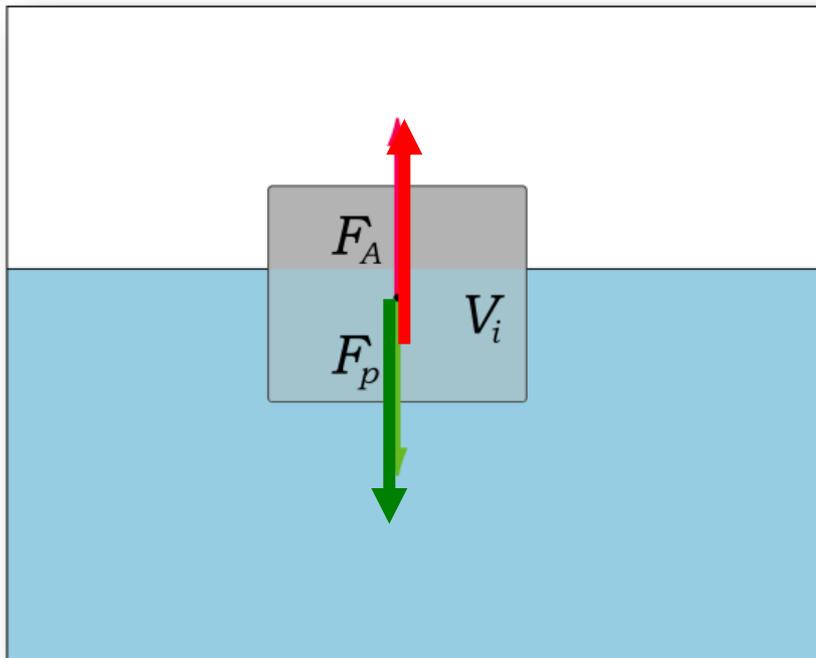


## Spinta idrostatica (2)

- se il c. è immerso solo parzialmente,  $V' = fV$ , si avrà  
$$F_{\text{ris}} = P - \rho V'g = \rho'Vg - \rho fVg = (\rho' - f\rho)Vg$$
con  $0 < f \leq 1$
-  un corpo, immerso anche parzialmente in un fluido, è soggetto ad una spinta uguale e contraria al peso del fluido spostato – si dimostra in modo alternativo considerando le f. di pressione su un c. di geometria semplice, ad es. cilindro verticale (si usa la legge di Stevino)
- c. totalm. immerso: se  $F_{\text{ris}} > (<, =) 0$ , il c. andrà a fondo (salirà a galla, sarà in equilibrio indifferente)
- c. parzialm. immerso: se  $F_{\text{ris}} = 0$  il c. galleggia  
 $f = V'/V = \rho'/\rho$

## Spinta idrostatica (3)

- $F_p$  (P) è applicata nel baricentro del corpo,  $F_A$  ( $F_S$ ) in quello della parte immersa (centro di spinta)



- se il corpo è omogeneo e totalmente immerso, i due punti coincidono

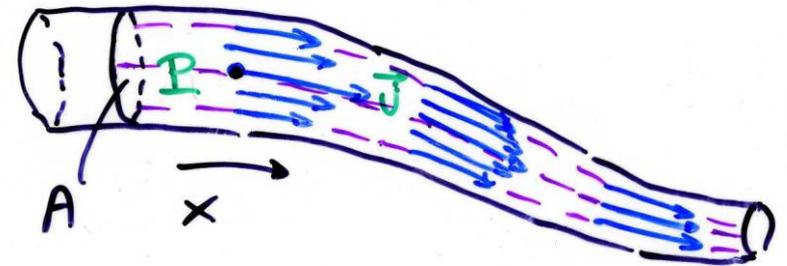


# Dinamica dei fluidi



# Moto stazionario

- Particelle di fluido: in generale si ha un campo di velocità  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P, t)$  – se il moto è stazionario  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P)$  non varia con  $t$



- Linee di corrente: traiettorie descritte dalle particelle fluide (in  $P$   $\mathbf{v}$  è tangente alla l.d.c.)
- Moto laminare: le l.d.c. non si intersecano (linee o strati o filetti “paralleli”)
- Portata:  $Q(x) = A(x)v(x)$  (in volume)



# Fluido ideale o perfetto

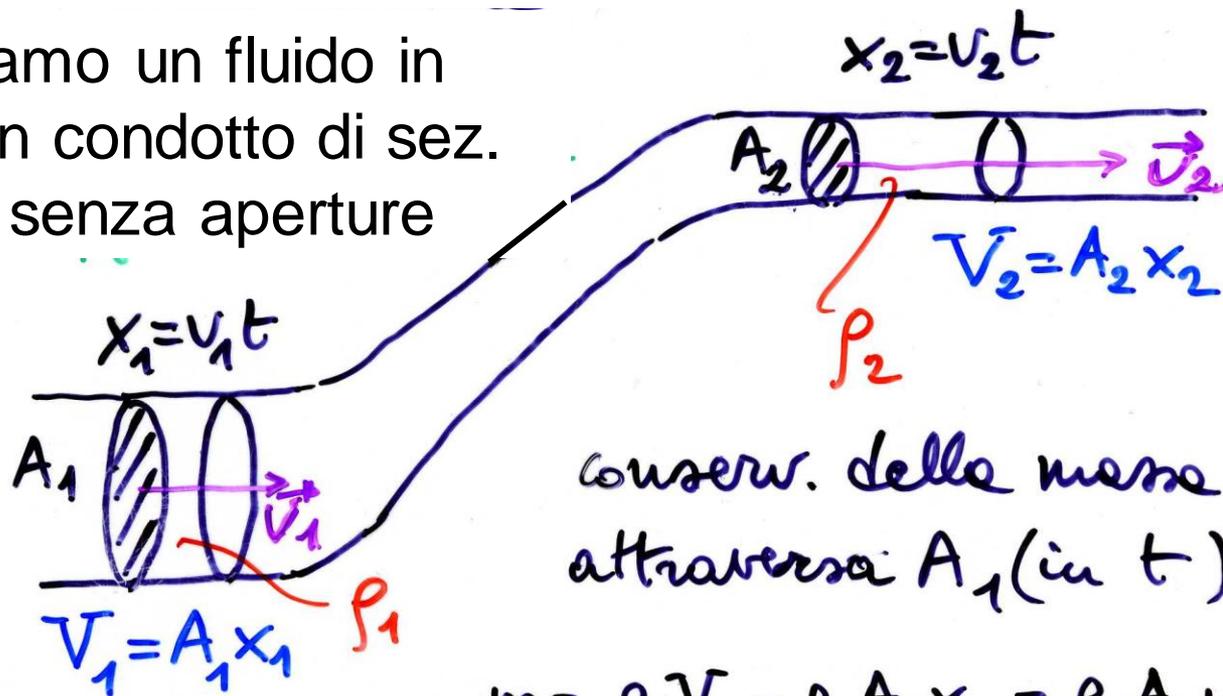
---

- per definire un f. ideale o perfetto sono necessarie **due** condizioni e da queste si ottengono **due** leggi
  1. **incompressibilità** → **conservazione della portata** (ad es. i liquidi sono poco compressibili)
  2. **assenza di viscosità (attrito interno)** → **teorema di Bernoulli, cons. en. meccanica applicata ai f.** (vale per molti liquidi; anche per i gas, se  $v < v_{\text{suono}}$  nel gas; si può usare in prima approssimazione anche per f. viscosi)



# Equazione di continuità(\*)

consideriamo un fluido in moto in un condotto di sez. variabile, senza aperture



conserv. della massa  $\Rightarrow$   
attraverso  $A_1$  (in  $t$ ):

$$m = \rho_1 V_1 = \rho_1 A_1 x_1 = \rho_1 A_1 v_1 t$$

attraverso  $A_2$ : stesmo

$$m = \rho_2 V_2 = \rho_2 A_2 x_2 = \rho_2 A_2 v_2 t$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2} \quad \text{eq. continuità}$$



# Conservazione della portata

- se il f. è incomprimibile ( $\rho = \text{cost}$ ) l'eq. precedente diviene (massa/tempo =)  $\rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2$  ossia

$$A_2 v_2 = A_1 v_1 \quad (\text{conservazione della portata in volume})$$

- fluido non-viscoso e incompressibile (ideale)

$$Q = Av = \text{cost}$$

$v$  è la stessa in tutti i punti di  $A$  (niente attrito)

- fluido viscoso e incompressibile

$$Q = A \underline{v} = \text{cost}$$

$\underline{v} = Q/A$  dove la media delle  $v$ . è sulla sezione  $A$

- in ogni caso, se  $A$  cresce,  $v$  (o  $\underline{v}$ ) diminuisce e viceversa

$$v_2 = v_1 A_1 / A_2$$

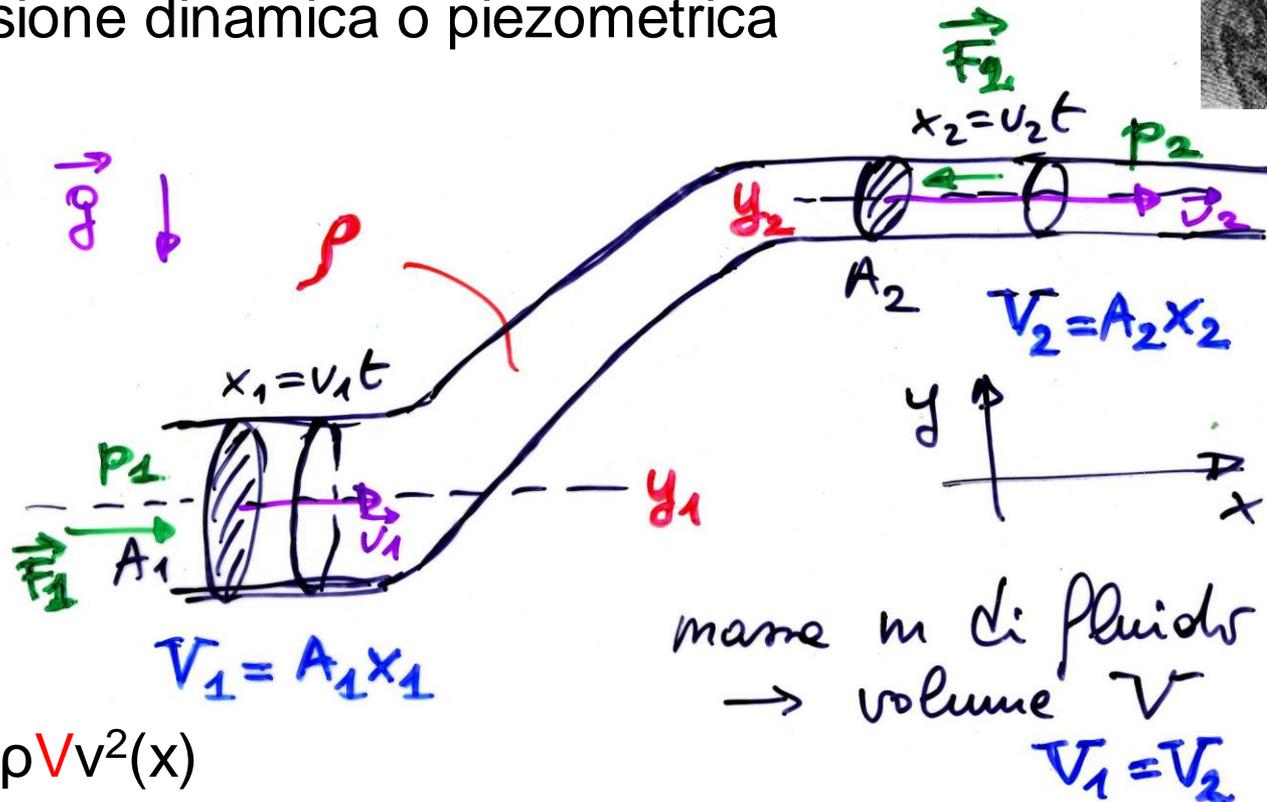


# Teorema di Bernoulli



Daniel Bernoulli  
1700-82

f. ideale, condotto di sez. e quota variabili,  
p è la pressione dinamica o piezometrica



massa  $m$  di fluido  $= \rho V$   
→ volume  $V$   
 $V_1 = V_2$

$$K = \frac{1}{2} \rho V v^2(x)$$

$$W(y) = \rho V g y$$

$$\mathcal{L}_p = p_1 A_1 x_1 - p_2 A_2 x_2 = (p_1 - p_2) V \quad (\text{fluido})$$

(lungo una linea di corrente)



## Teorema di Bernoulli (2)

- usiamo il teorema dell'en. cinetica

$\frac{1}{2}\rho V(v_2^2 - v_1^2) = \rho Vg(y_1 - y_2) + (p_1 - p_2)V$  ottenendo la cons. dell'en. meccanica applicata ad un f.

- semplificando  $V$  e riarrangiando

$$p(x) + \rho gy(x) + \frac{1}{2}\rho v^2(x) = p_1 + \rho gy_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \text{cost}$$

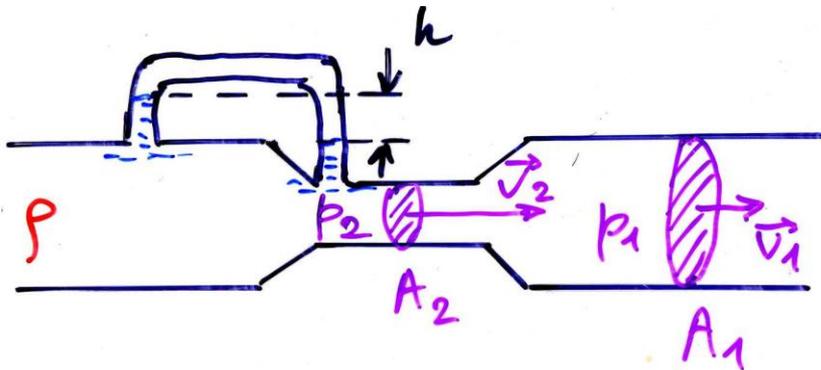
teorema di Bernoulli: la somma della pressione dinamica o piezometrica, della densità di en. potenziale (pressione di gravità) e della densità di en. cinetica (pressione cinetica) è costante ( $=E_0/V$ )

- se il liquido è fermo manca il termine cinetico e si ritrova la legge di Stevino,  $p_1 + \rho gy_1 = p_2 + \rho gy_2$  ossia

$$p_2 = p_1 + \rho g(y_1 - y_2) = p_1 + \rho g(h_2 - h_1)$$



- tubo orizzontale:  $y_1 = y_2 \rightarrow p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost}$
- cons. della portata:  $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow v_2 = v_1 A_1 / A_2 > v_1$
- eq. di Bernoulli:  $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$



**nella strozzatura  $v$  cresce ( $Q=\text{cost}$ )  
e  $p$  diminuisce ( $E_0/V=\text{cost}$ )**

**il manometro usa il fluido  
stesso come f. manometrico**

$$p_1 - p_2 = \rho g h$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho v_1^2 (A_1^2 / A_2^2 - 1) > 0$$

che si può risolvere per  $v_1^2 \rightarrow$  misura della velocità del f.

# Altre applicazioni delle leggi dei fluidi

- aneurisma**

$$A' > A \rightarrow v' < v$$

$$y' = y \rightarrow p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost}$$

$$\rightarrow p' > p$$

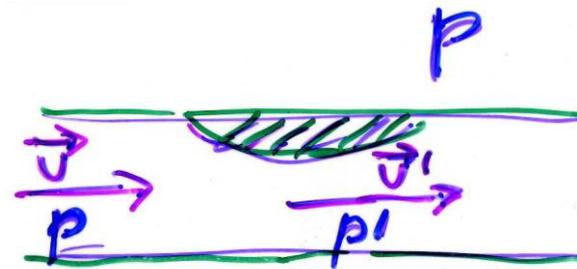
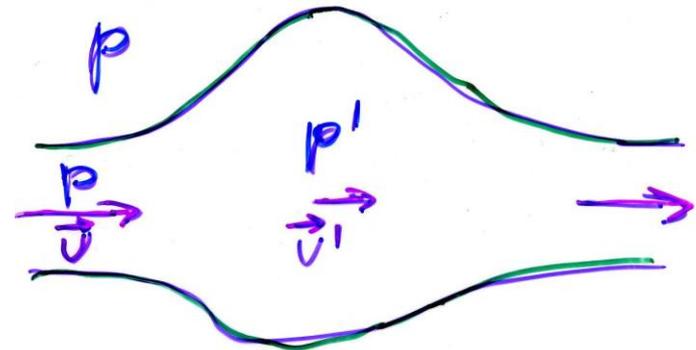
$p' - p > 0$  tende a dilatare ulteriormente il vaso

- stenosi** (anche placche aterosclerotiche, forma comune di arteriosclerosi)

$$A' < A \rightarrow v' > v$$

$$\rightarrow p' < p$$

$p - p' > 0$  tende a chiudere ulteriormente il vaso



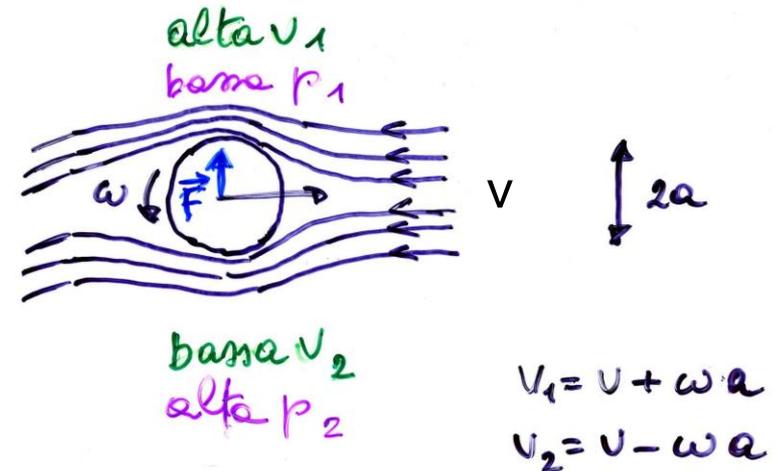
la stenosi si può curare inserendo uno stent:  $A' = A$



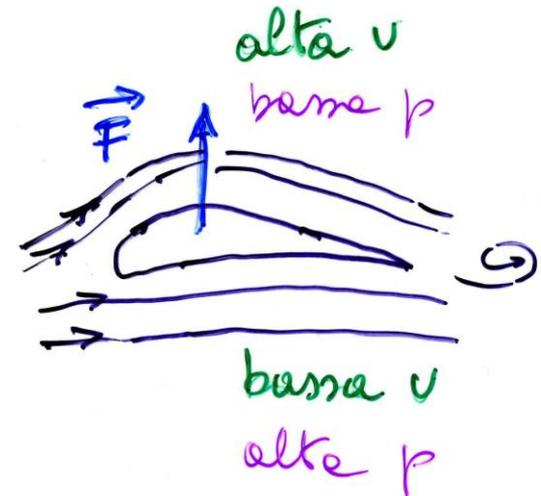
## Altre applicazioni di $\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{cost}$

- effetto Magnus, la rotazione della pallina varia la  $v$ . del fluido intorno

$$v_1 > v_2 \rightarrow p_1 < p_2 \rightarrow \mathbf{F}$$

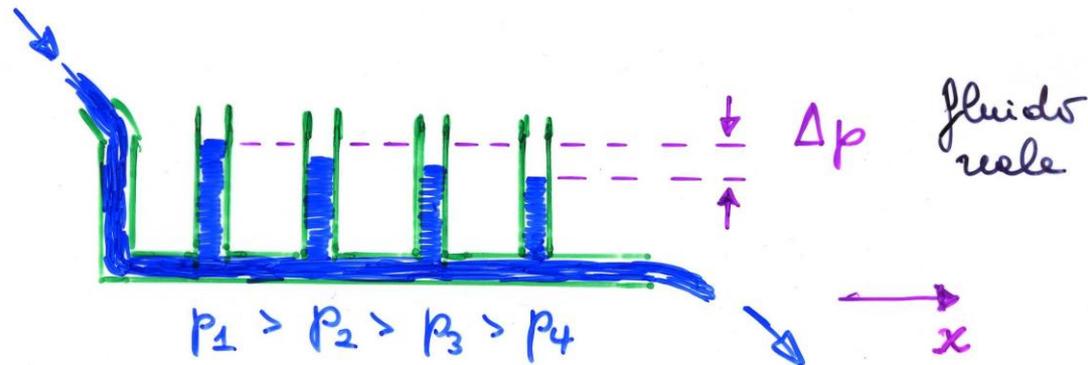


- portanza di un'ala: il profilo è tale che in alto la  $v$ . è maggiore (percorso del f. più lungo in tempo uguale)



# Fluidi reali, viscosità

- se ho un f. in un condotto orizzontale di sez. cost., per l'eq. di Bernoulli la pressione dinamica deve essere costante, *invece* si osserva che per un f. reale la quota piezometrica decresce → una perdita di en. meccanica



- il gradiente  $\Delta p/\Delta x$  misura il tasso di perdita di en. meccanica (**NB**  $v=\text{cost}$ , la pressione cinetica è cost;  $y=\text{cost}$ , la pressione di gravità è cost)



# Coefficiente di viscosità

- applichiamo  $\mathbf{F}$  ad una tavoletta sulla superficie di un f. reale: la reazione  $\mathbf{F}_a$  è dovuta agli attriti e a regime la tav. si muoverà con  $v$  cost. (invece di accelerare con  $\mathbf{F}$ )

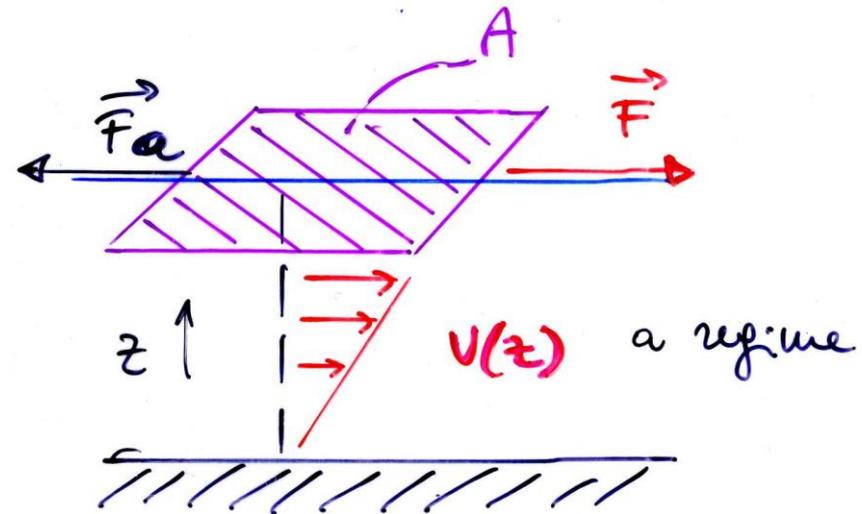
- il coefficiente di viscosità del f.,  $\eta$ , è definito da

$$F/A = \eta \Delta v / \Delta z$$

$$\text{con } [\eta] = [FL/AV] = [ML^{-1}T^{-1}]$$

unità SI: Pa·s

$$\text{CGS: } 1 \text{ g}\cdot\text{cm}^{-1}\text{s}^{-1} = 1 \text{ P(oise)} = 10^{-1} \text{ Pa}\cdot\text{s}$$

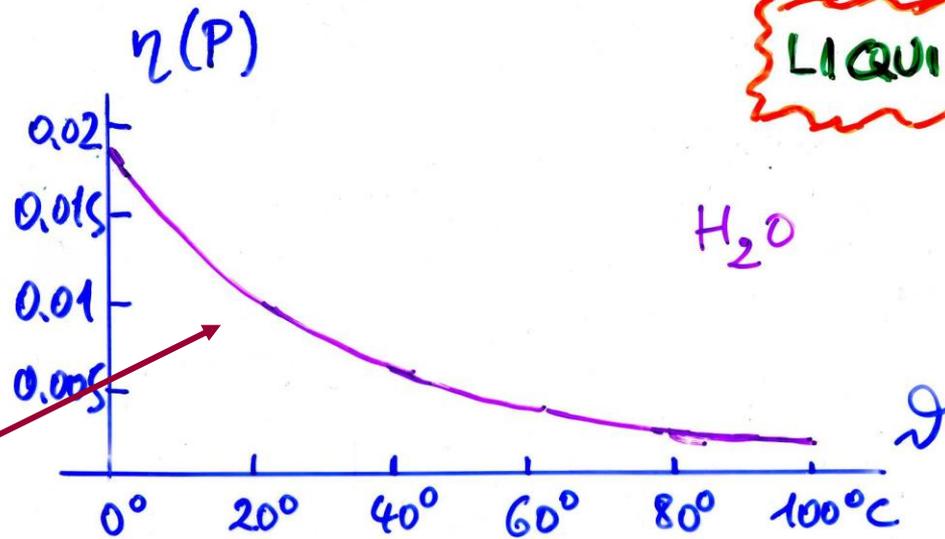




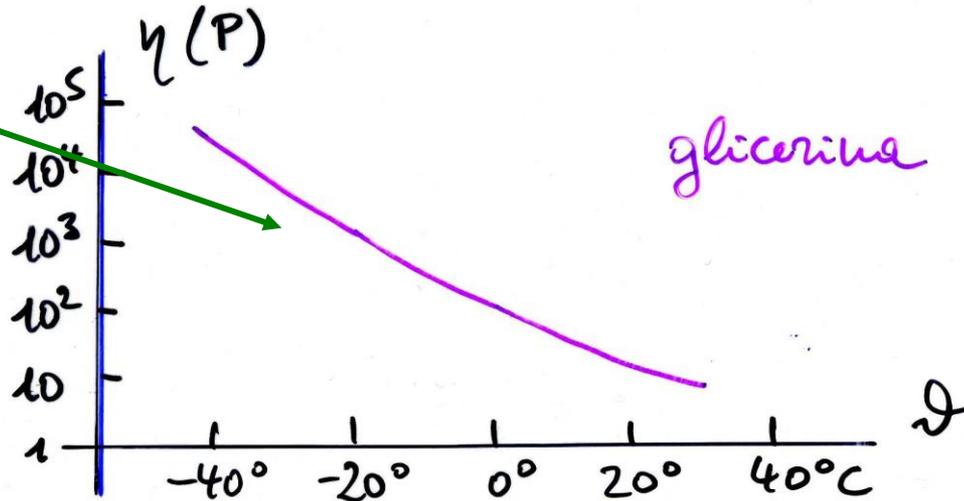
# Viscosità dei liquidi(+)

- dipende molto dalla temper.,  
decrece con la temper.

poco viscosa



molto viscosa



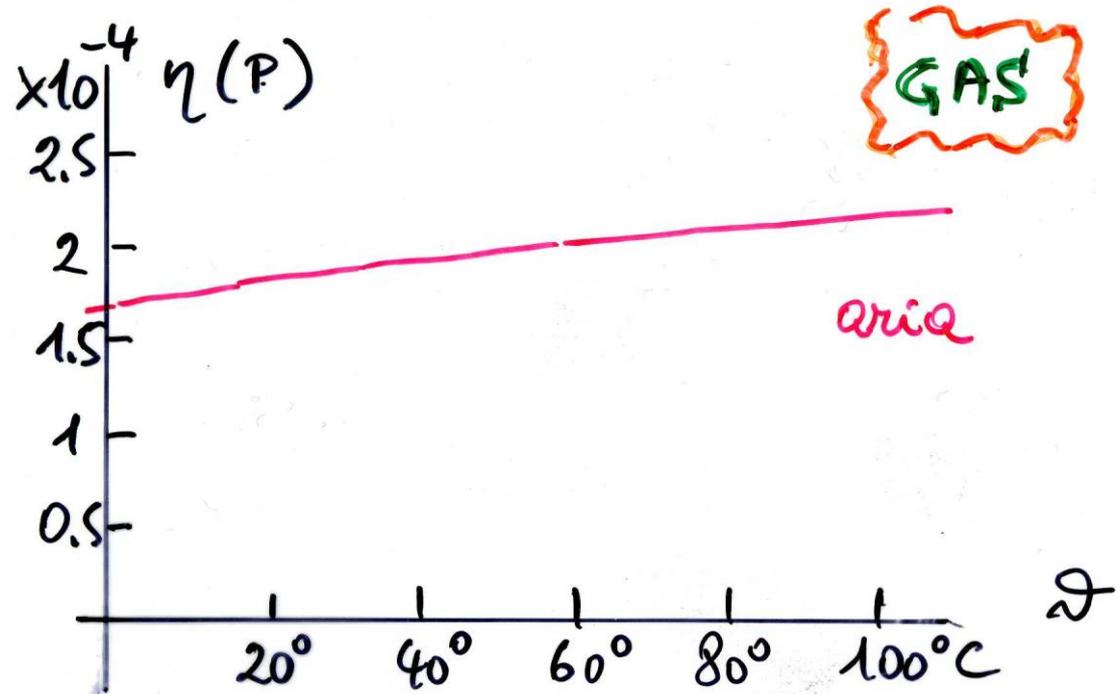
(+) liquido: molecole molto vicine fra loro, l'agitazione termica aiuta lo scorrimento



# Viscosità dei gas(+)

- la viscosità dei gas è molto debole e cresce lievemente con la temperatura

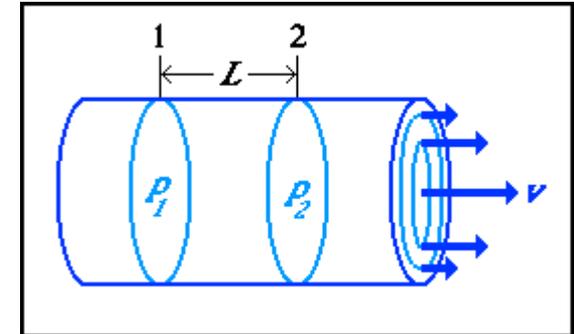
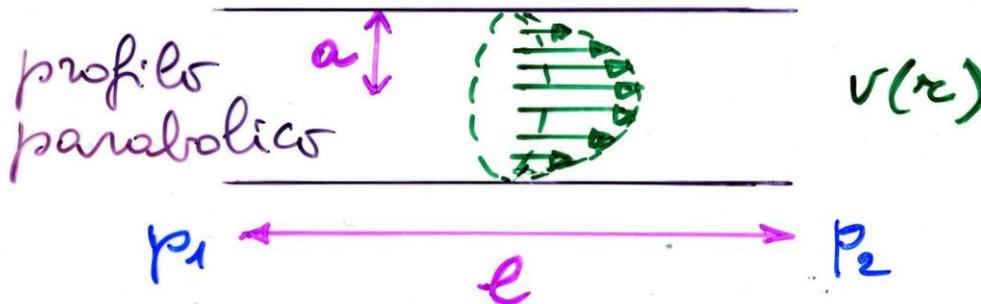
(+) gas: molecole molto lontane fra loro, se aumenta l'agitazione termica, aumenta la possibilità di uno scontro e frena lo scorrimento





# Scorrimento laminare, legge di Poiseuille (1844)

si può mostrare che se il moto è laminare, in un capillare il profilo delle velocità è parabolico con  $v$  max al centro



la portata è  $\propto \Delta p/l$  (gradiente di pressione),  $a^4$ ,  $1/\eta$

$$Q = A\bar{v} = \frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{l}$$

legge di Poiseuille-Hagen

$\bar{v}$  può essere ottenuta da  $Q/(\pi a^2)$

un f. è newtoniano se  $\eta = \text{cost} \quad \forall p \rightarrow Q \propto \Delta p/l$



Poiseuille



## Legge di Poiseuille(2)(\*)

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{l}$$

$\mathcal{R}$ : ciò che si oppone al moto

il fluido viscoso si muove sotto l'azione di una differenza di pressione

$$= 1/\mathcal{R}$$

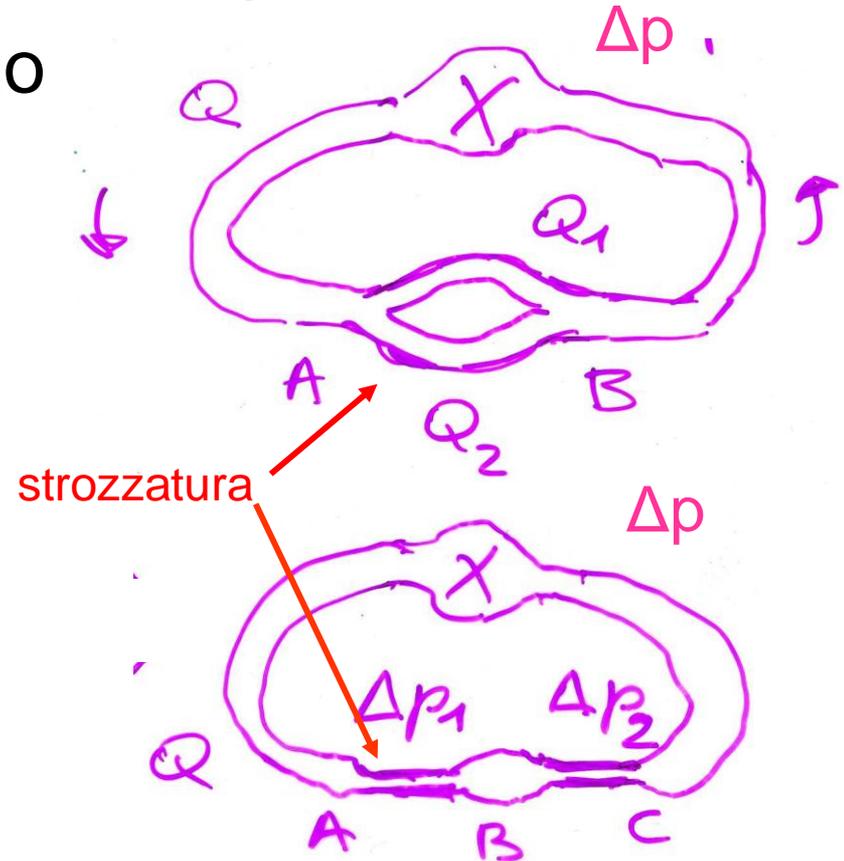
$$Q = (p_1 - p_2)/\mathcal{R} = \Delta p/\mathcal{R}$$

confronta con  $I = (V_1 - V_2)/R = \Delta V/R$   
(correnti elettriche, vedi più avanti,  
legge di Ohm, per R costante)



# Applicazioni(\*)

- per far scorrere un f. reale in un circuito occorrerà una pompa che fornisce la diff. di pressione
- il comportamento è analogo ai circuiti elettrici [in parallelo ( $Q=Q_1+Q_2$ ) ed in serie ( $\mathcal{R}=\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_2$ )] con  $\mathcal{R} = 8\eta l/(\pi a^4)$  e  $Q = \Delta p/\mathcal{R}$  (vedi circolazione del sangue, elettricità)





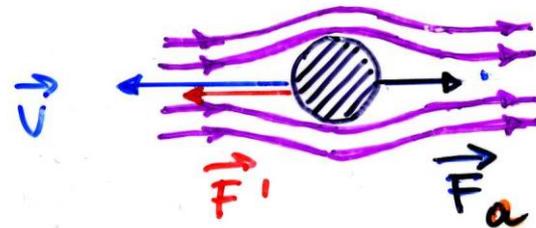
# Moto di un corpo in un fluido, resistenza viscosa



- corpo che si muove sotto l'azione di una  $F'$  in un liquido viscoso (gravità, spinta idrostatica, elettrica etc.): al moto inizialmente accelerato si oppone una  $f.$  di attrito

$$F_a = k\eta v$$

**forza di Stokes**, dove  $k$  dipende dalla forma e  $l$  è una dimensione lineare



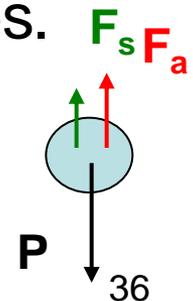
(il moto è relativo)

$2a$

caratteristica del c. ( $6\pi$  e raggio  $a$  per una sfera) – la legge di Stokes è valida per numeri Reynolds piccoli (vedi oltre)

- siccome  $F_a$  cresce con  $v$ , al limite uguaglierà  $F'$ , per es. corpo sotto l'azione del peso e della spinta idrostatica

$$P + F_s + F_a = 0$$





# Sedimentazione

- all'equilibrio (dinamico)  $F_a$  (che cresce) uguaglia la differenza  $P - F_s$  (che è cost.) ed il corpo si muove con  $v$  costante (**I principio m.**)
  - se  $m = \rho'V$ ,  $P = \rho'Vg$  e  $F_s = \rho Vg$   
 $kl\eta v = \rho'Vg - \rho Vg$   
 $v = V(\rho' - \rho)g / kl\eta$  [ $= 2a^2(\rho' - \rho)g / 9\eta$  per un c. sferico]
- è la velocità limite o di sedimentazione con cui il c. va a fondo (se  $\rho' - \rho > 0$ ): frazionamento di un sistema costituito da corpuscoli diversi in sospensione, si rimuove via via il sedimento
- ad es. velocità di eritrosedimentazione v.e.s. → stati patologici ( $v$  di sedimentazione dei globuli rossi)
  - svantaggio:  $g$  fissa,  $t$  lunghi, ad es.  $a = 1\mu\text{m}$ ,  $\rho' = 1050\text{kg/m}^3$  in  $\text{H}_2\text{O}$  a  $20^\circ\text{C}$ ,  $v \sim 10^{-5}\text{cm/s}$  →  $t \sim 10^5\text{s}$  per percorrere  $1\text{cm}$ !



# Centrifugazione

---

- per aumentare  $v$ , occorre sostituire  $P$  con una  $f.$  più grande: si usa  $m\omega^2R$  cui è soggetto un  $c.$  che si muova su una traiettoria circolare di raggio  $R$  ( $f.$  centripeta)

- $F_c = \rho'V\omega^2R$

in parte fornita dal fluido in rotazione:  $p = p_0 + \rho gh + \rho\omega^2R^2/2$  (invece di  $p = p_0 + \rho gh$ , in quiete) –  $p$  varia in funzione di  $R$ , distanza dall'asse di rotazione: il  $c.$  sente una  $f.$  maggiore nei punti più lontani dall'asse, insufficiente a tenerlo su una circonfer. di raggio  $R$  se  $\rho' > \rho$ , la  $f.$  risultante è

$$F' = F_c - F_r = (\rho' - \rho)V\omega^2R$$

diretta verso l'esterno, dove  $F_r$  è la  $f.$  radiale del fluido; al limite  $F'$  sarà equilibrata dalla  $f.$  di Stokes ed il  $c.$  sedimenterà verso l'esterno (della provetta)



## Centrifugazione (2)

- la  $v$  di sedimentazione è ora

$$v' = V(\rho' - \rho)\omega^2 R / k \ln \eta \quad [= 2a^2(\rho' - \rho)\omega^2 R / 9\eta \text{ per un c. sferico}]$$

e si guadagna rispetto alla sedimentazione naturale

$$v'/v = \omega^2 R / g$$

ad es.  $R=10\text{cm}$ ,  $10\text{k giri/min}$ ,  $\omega=2\pi/T=2\pi v=1.05 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ ,

$$\omega^2 R = 1.1 \cdot 10^5 \text{ m/s}^2 \quad \text{e} \quad v'/v = 1.1 \cdot 10^4$$

→ industria chimica/alimentare, medicina/biologia

con  $\sim 100\text{k giri/min}$  (ultracentrifughe) si arriva fino a  $\sim 10^6 \text{ g}$

→ separazione di corpuscoli (ad es.  $a < 1\mu\text{m}$ , virus, macromolecole)

- limitazioni: volumi provette piccoli  $\sim 1\text{cm}^3$ , blindaggio della centrifuga (per via di  $\omega$ ), attriti → raffreddamento/vuoto etc.

# Centrifuga

- ad es.

Impiego fino a **22.600 giri/minuto** con valore di g. preselezionabile fino a **20.000**: preselezione dunque non della velocità di rotazione ma del valore di g che viene raggiunto e mantenuto costante indipendentemente dal tipo di rotore in uso, grazie alla possibilità di preimpostazione del diametro del rotore stesso.

Possibilità di preimpostare il tempo nel quale viene raggiunto il valore di g desiderato; un particolare sistema elettronico provvede a far sì che il tempo di decelerazione al termine del trattamento sia uguale a quello di accelerazione iniziale. Questo contribuisce a rendere i trattamenti di centrifugazione estremamente ripetibili.

## Applicazioni speciali nei seguenti campi:

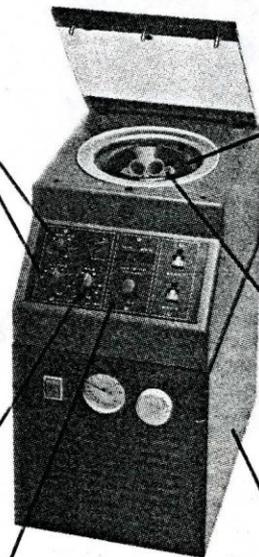
- ricerche sul cancro e sull'AIDS
- separazione di enzimi
- studi di ingegneria genetica e microbiologia
- precipitazione di batteri da colture
- recupero di piccole quantità di sostanza con la tecnica delle «hard pellets»

Rotore collocato in un alloggiamento in acciaio inossidabile, che rende possibile una semplice pulizia mentre permette la necessaria sicurezza.

Vasta gamma di rotori disponibili per provette di capacità compresa tra i 10 e gli 0.25 ml, per un massimo di 48 posti. Importanti i rotori tipo «slide» caratterizzati dall'inserzione orizzontale di provette provviste di tappo; possono accogliere provette di capacità diversa.

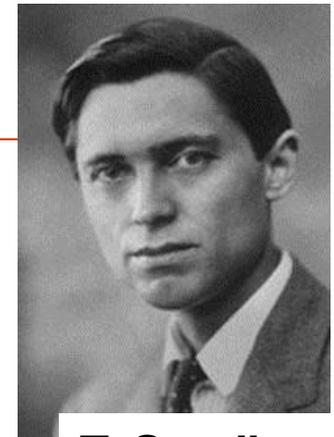
Sistema di refrigerazione di elevata qualità, per un lungo funzionamento senza operazioni di manutenzione, permette di selezionare la temperatura tra i -2° e i +15°, a seconda delle esigenze applicative.

Timer elettronico, preimpostabile tra i **10 secondi** e i **30 minuti**, fornisce istante per istante l'indicazione del tempo mancante al termine del trattamento di centrifugazione.

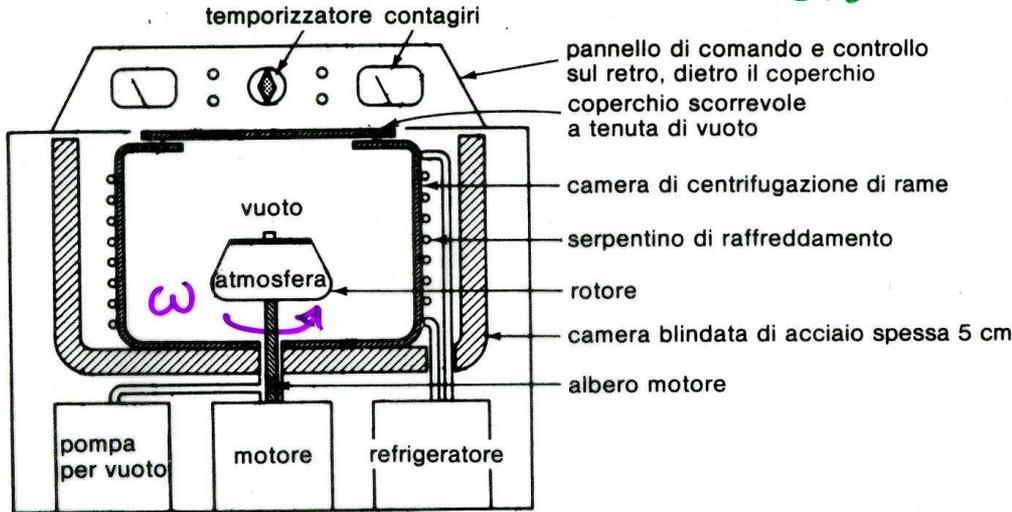




# Centrifuga (2)

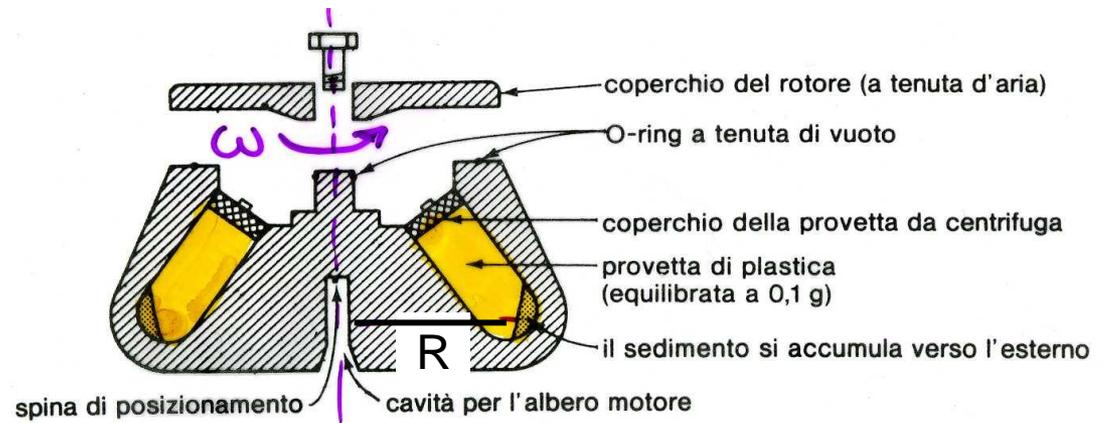


T. Svedberg  
PN chim 1926



per 30k giri/min  
 $\omega^2 R = 1.5 \cdot 10^6 \text{ ms}^{-2}$   
 $m = 1\text{g}$  pesa 1500 N !

Volume utile provetta limitato  $\propto (1/\omega)^2$





## Regimi laminare e turbolento: n.ro di Reynolds

- per  $v$  piccola si ha scorrimento laminare del fluido in un tubo di flusso o relativamente ad un corpo
- per  $v$  grande lo scorrimento diviene turbolento con presenza di scia e vortici
- si costruisce una lunghezza tipica del fluido in moto:  $\eta/\rho v$  dove  $\rho$ ,  $\eta$  sono del fluido,  $v$  è la velocità del corpo o quella media del fluido
- il rapporto fra  $l$ , una lunghezza tipica del corpo o del condotto, e questa lunghezza è **il numero di Reynolds**



$$N_R = \rho v l / \eta \quad (\text{adimensionale})$$

che permette di distinguere i due regimi:  $N_R$  **piccolo** (**grande**) corrisponde al **regime laminare** (**turbolento**), con limiti che sono diversi nei due casi (fluido o corpo in moto)



## Numero di Reynolds (2)

---

- per un corpo in moto nel fluido con  $N_R$  piccolo la f. viscosa è data da  $k\eta l v$ , forza di Stokes; se il c. è sferico  $l=2a$  e  $N_R < 0.4$  corrisponde al regime laminare, mentre  $N_R > 2000$  implica regime turbolento, con una f. resistente  $\propto v^2$ ; per valori intermedi si ha instabilità
- per un fluido che scorre in un condotto di sez. circolare  $l=2a$ , diametro del c., con velocità media  $\underline{v}$ ,

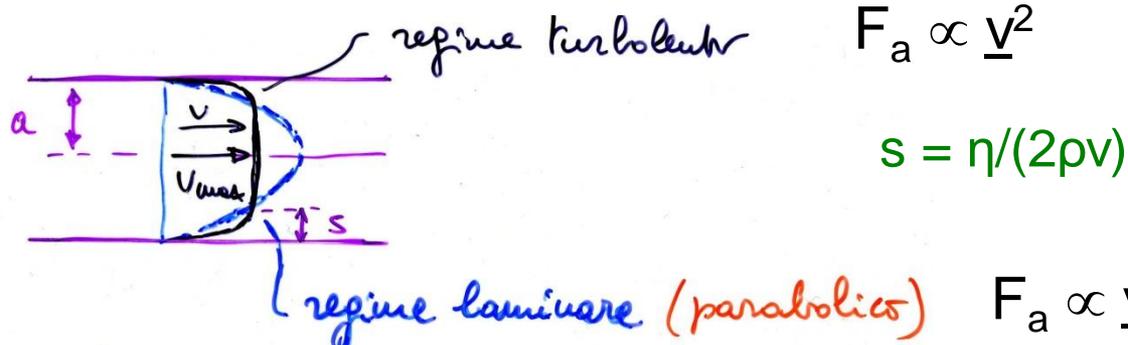
$$N_R = 2\rho \underline{v} a / \eta$$

e si ha moto laminare per  $N_R < 1000$ , mentre il flusso diviene vorticoso per  $N_R > 3000$ ; il valore critico è  $\sim 2300$ , ma per valori fra 1000 e 3000 i risultati sperimentali sono instabili



# Numero di Reynolds (3)[\*]

- $N_R$  può essere visto come rapporto fra f. inerziali e viscosi nel fluido: quando prevale la f. viscosa il regime è laminare e viceversa
- il moto è stazionario,  $v = \text{cost}$ ;  $m/t$  non è altro che  $\rho Q$  e  
$$F_i = \Delta(mv)/\Delta t = v\Delta m/\Delta t \approx v(\rho Av) = \rho Av^2 \quad (\text{forza inerziale})$$
- usando la def. di viscosità (o usando Poiseuille)  
$$F_v \approx A'\eta v/l \quad (\text{forza viscosa})$$
  
con  $l$  lunghezza tipica
- $F_i/F_v \approx \rho Av^2/(A'\eta v/l) \approx \rho vl/\eta = N_R$



[\*] facoltativo



# Un liquido non newtoniano: il sangue

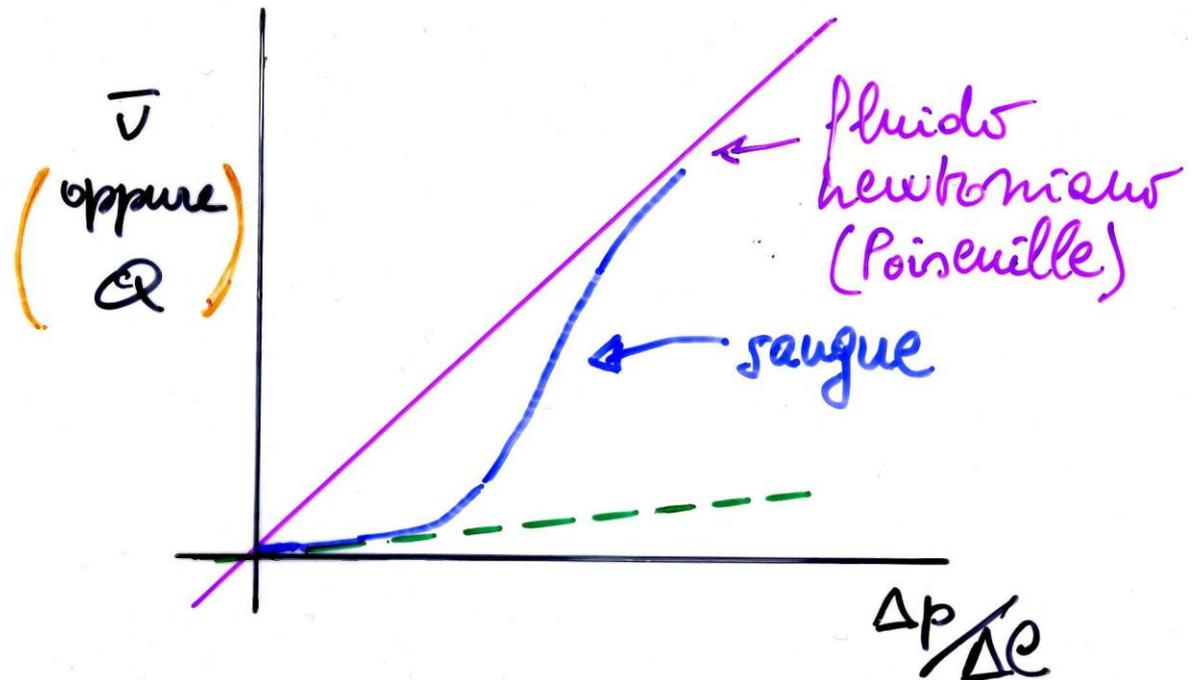
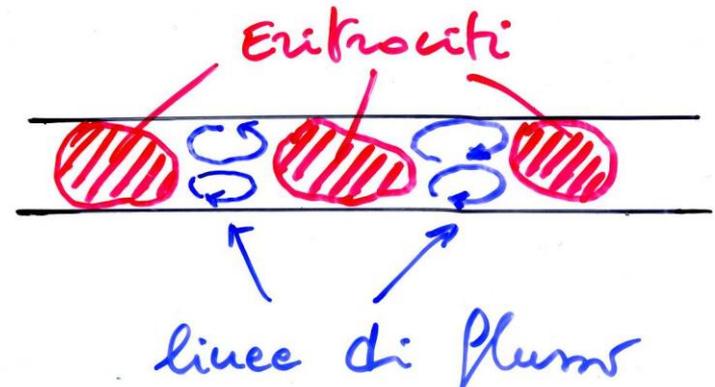
---

- il s. è un liquido complesso, soluzione acquosa di elettroliti e non elettroliti, globuli rossi ( $8 \mu\text{m} \text{ } \emptyset$ ,  $2 \mu\text{m}$  spessore) e bianchi in sospensione, particelle colloidali (proteine)
- $\eta$  decresce poco all'aumentare degli elettroliti, aumenta molto all'aumentare di corpuscoli e part. colloidali
- a  $\theta = 37 \text{ } ^\circ\text{C}$ ,  $\eta_{\text{siero}} \sim 1 \text{ cP}$ ;  $\eta_{\text{sangue}} \sim 4 \text{ cP}$   
(cfr  $\eta_{\text{H}_2\text{O}} = 0.7 \text{ cP}$ )
- $\eta$  decresce con  $\theta$  che aumenta (febbre):  $\sim 3\%/ \text{grado} \rightarrow$  facilita la circolazione
- disordini circolatori e ipertensione:  $\eta \nearrow$ , aumenta  $\mathcal{L}_{\text{cuore}}$
- situazioni patologiche: varia  $\eta \rightarrow$  VES+conteg.corpusc.



# Viscosità del sangue

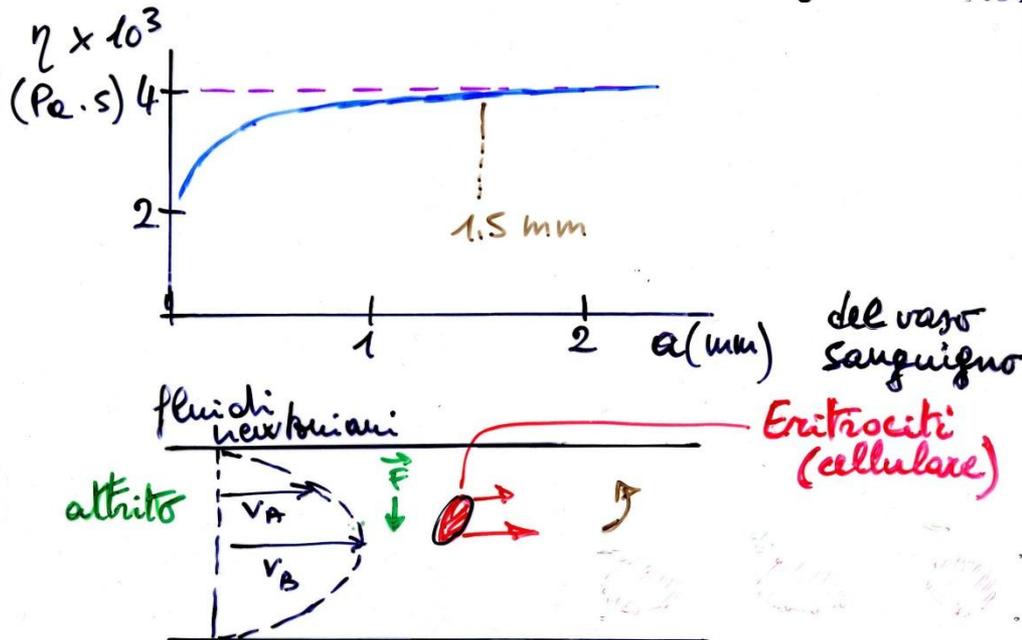
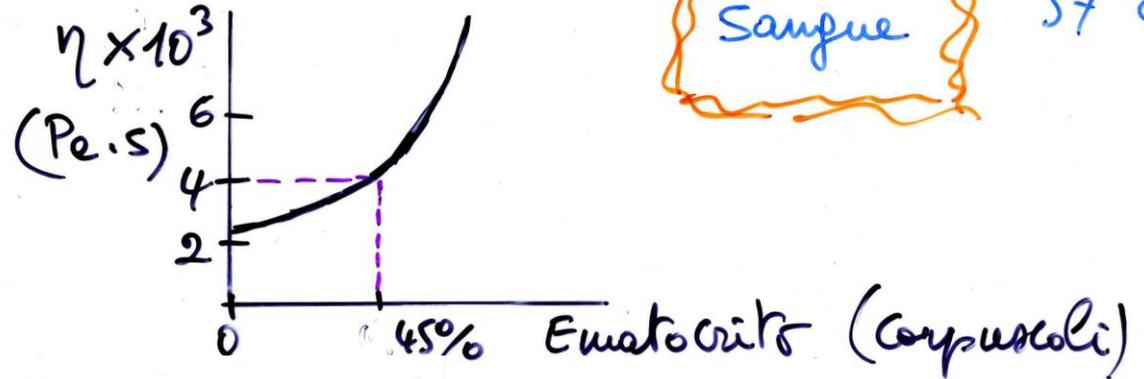
- gli eritrociti passano appena nei capillari, fino a  $\sim 8 \mu\text{m } \emptyset$
- $\eta$  varia al variare del gradiente di pressione a differenza di un fl. newton.





# Viscosità del sangue (2)(\*)

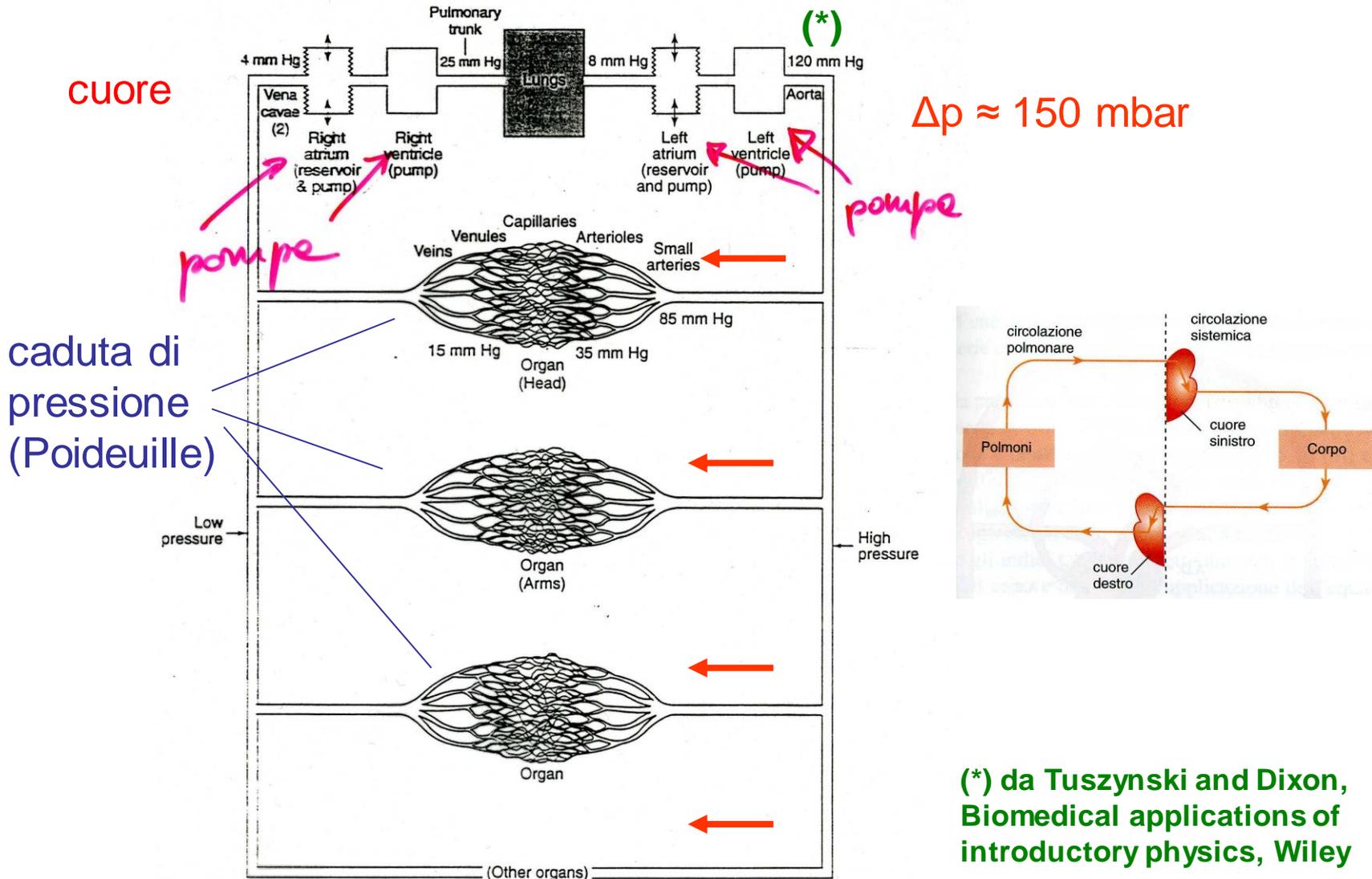
Sangue 37°C



l'allineamento dei corpuscoli giustifica il comportamento di  $\eta$  con la pressione

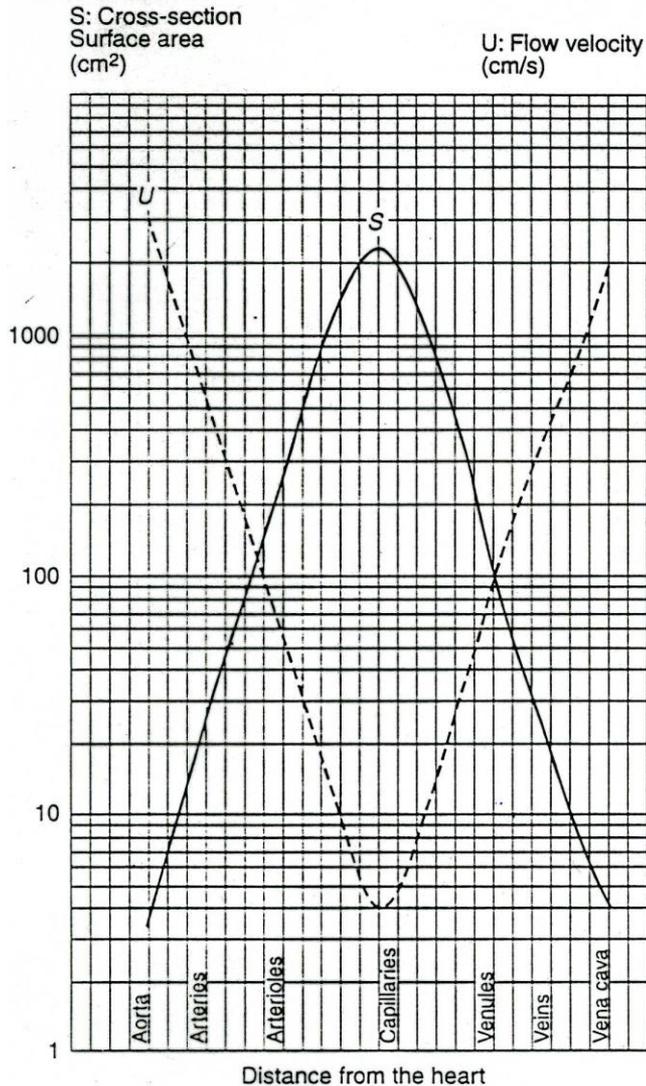


# Circolazione del sangue

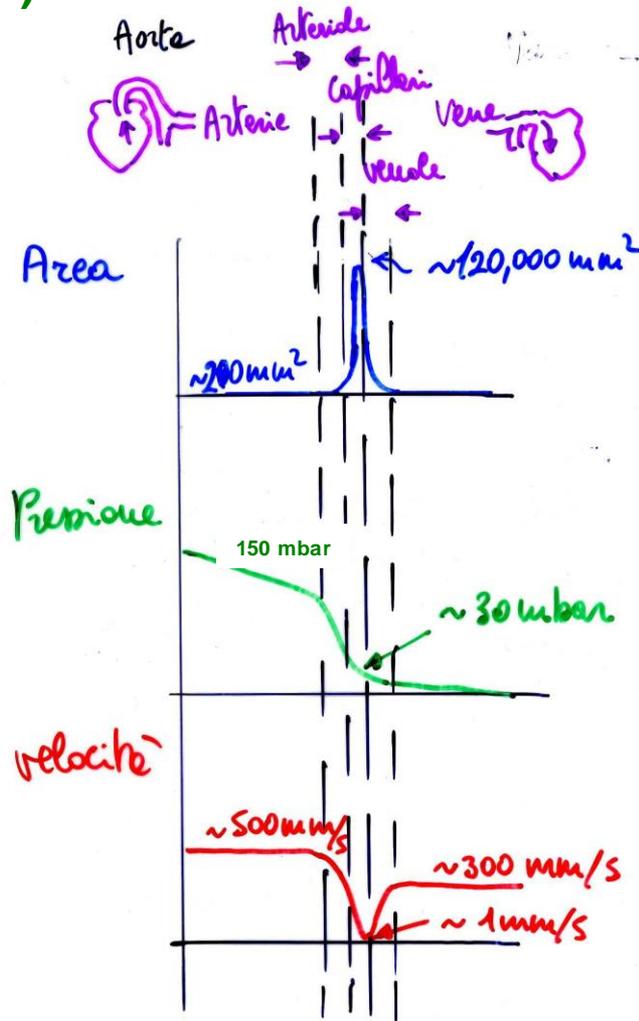




# Circolazione del sangue[+]



(\*)



[+] facoltativo

(\*) da Tuszynski and Dixon, op. cit.

fln mar 12

49



# Pressione arteriosa

---

- i valori di  $p$  sono sempre relativi alla  $p$ . esterna
- in corrispondenza delle arterie del capo, torace e piedi (c,t,p):  $p$  è la stessa per una persona sdraiata, molto diversa se in piedi – trascurando la viscosità si ha:

$$p_c + \rho g y_c + \frac{1}{2} \rho v_c^2 = p_t + \rho g y_t + \frac{1}{2} \rho v_t^2 = p_p + \rho g y_p + \frac{1}{2} \rho v_p^2$$

i termini cinetici  $\frac{1}{2} \rho v^2$  sono piccoli [ $\rho = 1050 \text{ kg/m}^3$ , aorta,  $v \sim 0.3 \text{ m/s}$ ,  $\frac{1}{2} \rho v^2 \sim 47 \text{ Pa} \sim 0.5 \text{ mbar} \ll 150 \text{ mbar}$ ],

quindi

$$p_c + \rho g y_c = p_t + \rho g y_t = p_p + \rho g y_p$$

- se la persona è sdraiata  $p_c \approx p_t \approx p_p$  ( $y_c \approx y_t \approx y_p$ )
- se la persona è in piedi interviene la  $p$  idrostatica



# Pressione arteriosa e lavoro del cuore

- persona in piedi (1 torr = 1 mmHg = 133 Pa)  
 $p_c = p_t + \rho g(y_t - y_c)$ ;  $p_p = p_t + \rho g(y_t - y_p)$   
ad es.  $y_t - y_c = -40$  cm,  $y_t - y_p = +130$  cm  
 $\rho g(y_t - y_c) = -1050 \cdot 9.81 \cdot 0.4$  Pa =  $-4120$  Pa  $\approx -30$  torr  
 $\rho g(y_t - y_p) = +13/4$  30 torr  $\approx +100$  torr  
 $p_t = 100$  torr  $\rightarrow p_c = 70$  torr,  $p_p = 200$  torr
- lavoro del cuore (V pompato nell'aorta e nell'a. polmonare)  
 $\mathcal{L} = Fs = pAs = pV$ ;  $\mathcal{L}' = p'V$ ;  $\mathcal{L}_{\text{tot}} = (p+p')V$   
 $p+p' = 120$  torr =  $1.6 \cdot 10^4$  Pa  
 $Q \approx 5$  l/min  $\rightarrow V = 5$  l/min  $1/75$  min =  $0.07$  l =  $7 \cdot 10^{-5}$  m<sup>3</sup>  
 $\mathcal{L}_{\text{tot}} = 1$  J;  $\mathcal{P} = \mathcal{L}_{\text{tot}}/t = 1$  J/0.8 s =  $1.2$  W  
in realtà il lavoro è maggiore di quello utile calcolato (5.5 W)

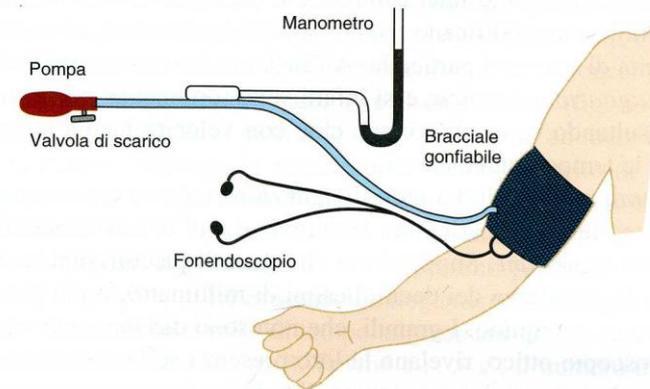
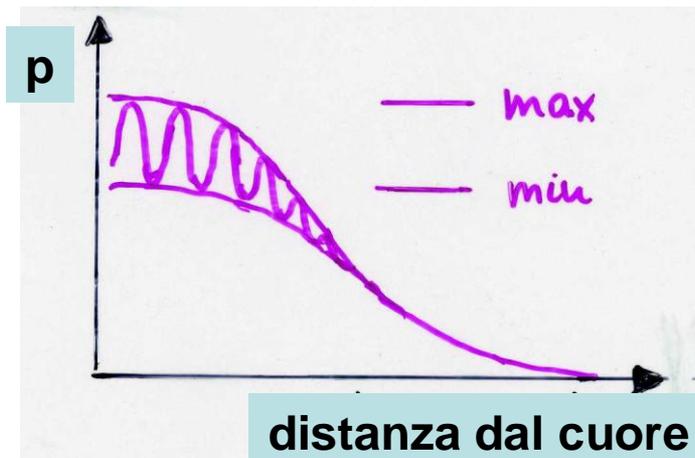


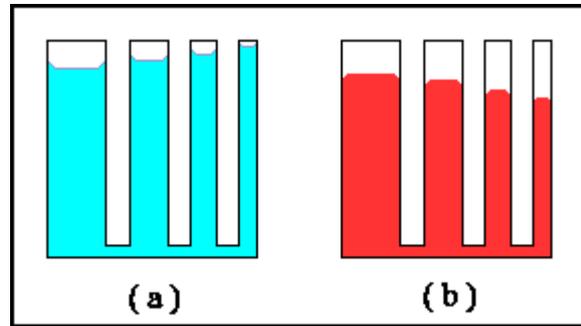
# Misura della pressione arteriosa

- in un'arteria  $N_R = 2\rho v a / \eta = 2\rho Q / (\pi \eta a)$  è  $< 1000$ , flusso laminare, silenzioso
- se aumento  $v$  (riducendo  $a$ , senza ridurre  $Q$ ) aumenta  $N_R \rightarrow$  flusso vorticoso  $\rightarrow$  rumore
- se chiudo l'arteria il rumore cessa – la  $p$  corrisponde a quella sistolica (max)
- lasciando riaprire l'arteria quando il moto ridiviene laminare la  $p$  corrisponde a quella diastolica (min)



Stephen Hales





## Fenomeni molecolari in meccanica dei fluidi

- Diffusione
- Tensione superficiale



# Agitazione termica nei fluidi: diffusione

- ad es. goccia di soluzione colorata in un liquido, il colore diffonde col tempo; gas in un altro gas;  $O_2$  + sostanze nutrienti  $\rightarrow$  cellule  $\rightarrow$  scorie
- diffusione: conseguenza diretta del moto termico casuale delle molecole (vedi teoria cinetica)

$v$  - velocità media termica

$\underline{\ell}$  - cammino libero medio

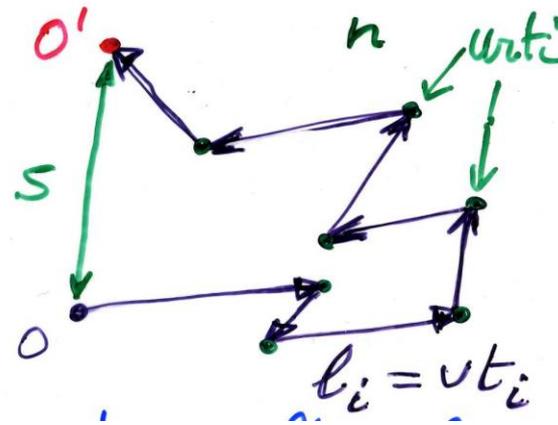
si trova:  $s = \underline{\ell} \sqrt{n}$

$L = \sum_i l_i = n \underline{\ell} = s^2 / \underline{\ell}$

$t = L/v = s^2 / (v \underline{\ell})$

$H_2O$  liq.  $\underline{\ell} \sim 10^{-10}$  m,  $v \sim 10^2$  m/s

$s = 1$  cm  $t = 10^4$  s;  $s = 10^{-3}$  cm  $t = 10^{-2}$  s

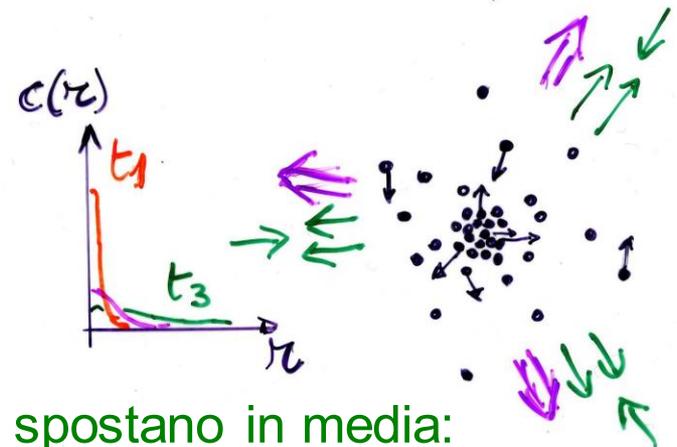


(random walk, ubriaco, moto browniano)



# Concentrazione e diffusione

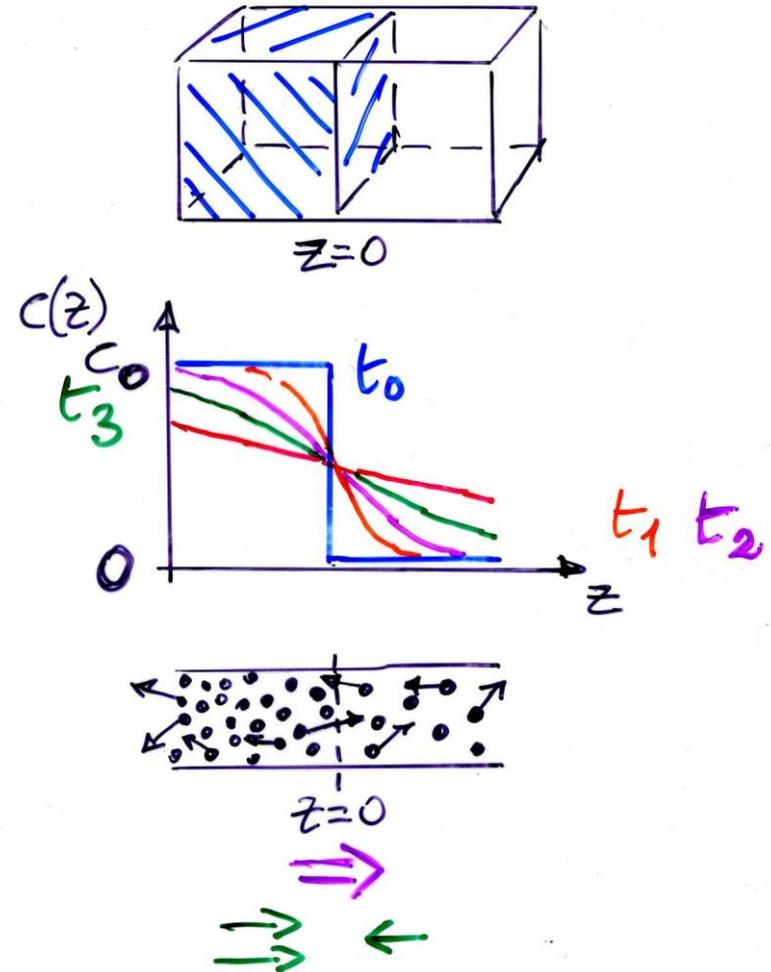
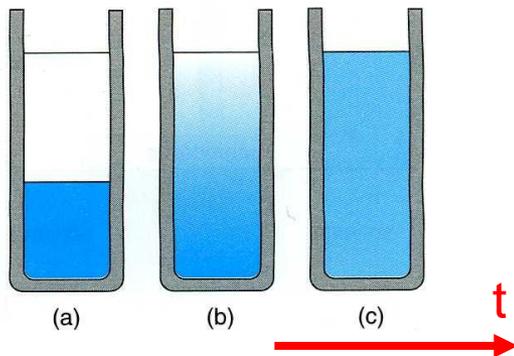
- $c = m/V$  concentrazione (=  $m$  di soluto/ $V$  di soluzione), omogenea con una densità, in  $\text{kg/m}^3$
- la diffusione è evidenziabile quando si parte da una concentrazione non uniforme: al passare di  $t$  c'è la tendenza all'uniformità
- il risultato dipende, fra l'altro, dalla geometria: ad es. una concentrazione 'puntiforme' diffonderà sfericamente: la  $v$  media è la stessa, **le molecole migreranno più numerose da dove  $c$  è maggiore**



→ si spostano in media:  
è un processo statistico

# Concentrazione e diffusione (2)

- cambiando la geometria il fenomeno resta lo stesso ma variano le apparenze
- le molecole migrano tutte casualmente: **quelle che si trovano dove  $c$  è maggiore migrano in maggior numero**
- figure: espansione di un gas nel vuoto, soluzione separata inizialmente dal solvente



le m. si spostano in media:  
è un processo statistico



# Fenomeni di trasporto(\*)

---

1. scorrimento viscoso (à la Poiseuille)
2. diffusione
3. conduzione del calore (vedi oltre)
4. corrente elettrica (vedi oltre)

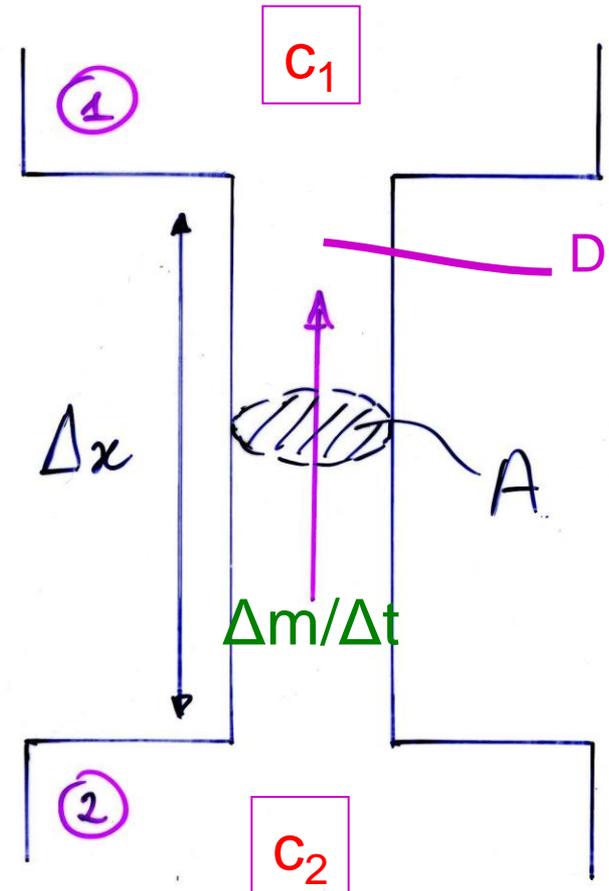
sono tutti fenomeni di trasporto, descrivibili con leggi analoghe: alla radice dei fenomeni c'è un gradiente, variazione per unità di distanza, o una differenza (rispettivamente: **pressione**, **concentrazione**, **temperatura**, **potenziale elettrico**) che genera il trasporto (rispettivamente: **fluido**, **soluto**, **calore**, **carica elettrica**)

- ci limitiamo al caso stazionario, gradienti cost.



# Diffusione: legge di Fick

- diffusione in una soluzione: trasporto di materia fra due regioni a conc. diversa (caso stazionario, valori costanti nel tempo, 'serbatoi'): da  $c_2$ , maggiore, a  $c_1$ , minore
- $D = D(\text{soluzione}, T, c)$  è il coefficiente di diffusione  
[D] = [L<sup>2</sup>T<sup>-1</sup>] unità: m<sup>2</sup>/s
- **legge di Fick (1855)**



$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -DA \frac{\Delta c}{\Delta x}$$

$$\Delta c = c_2 - c_1$$



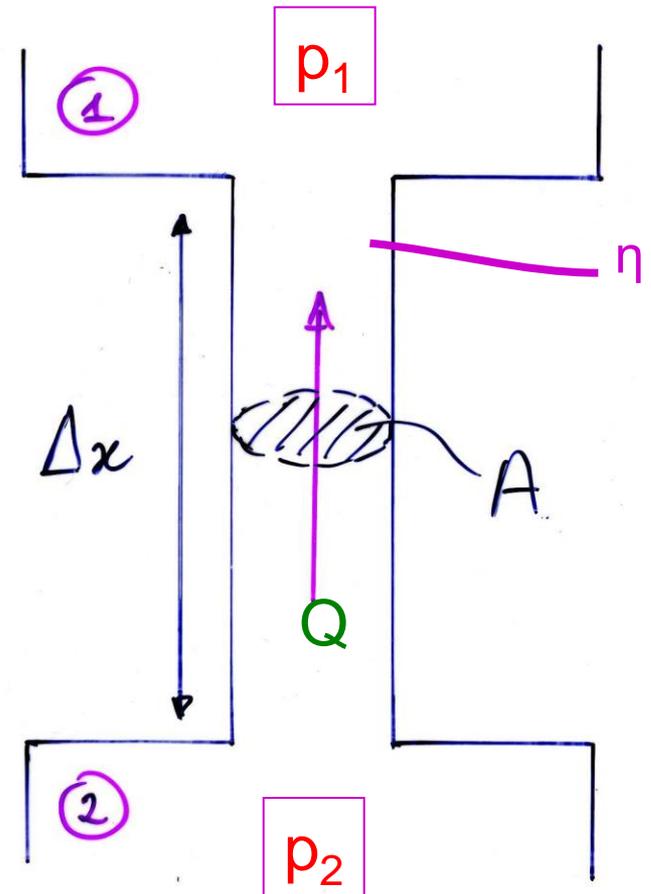
## cfr.: moto di un fluido viscoso

- riscriviamo la legge di Poiseuille (1842) per lo scorrimento viscoso in un capillare di area  $\perp A = \pi a^2$

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{\Delta p}{\Delta x} = \left(\frac{a^2}{8\eta}\right) A \frac{\Delta p}{\Delta x}$$

sono evidenti le analogie con la legge di Fick

- la legge di Poiseuille descrive il trasporto di fluido fra due regioni a  $p$  diversa -  $p_1, p_2$  cost.  
-  $\eta = \eta(\text{fluido}, T, \Delta p)$



$$\Delta p = p_2 - p_1$$



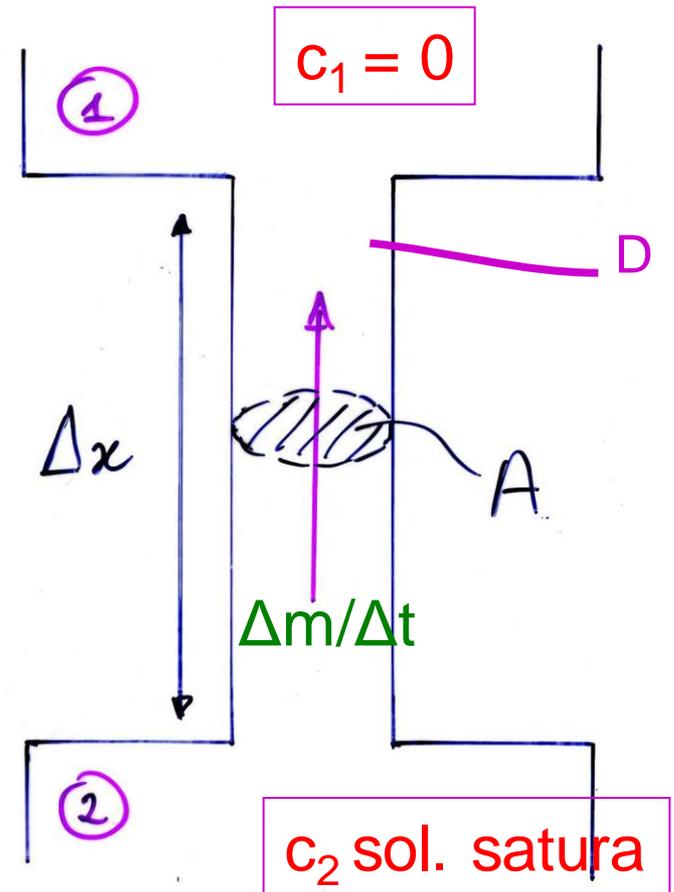
# Un esempio di diffusione stazionaria(\*)

- nella cella di Clack (1924) ad es.,  $c_2$  corrisponde ad una soluzione satura, un sale in equilibrio con la soluzione,  $c_1$  a puro solvente (un flusso di  $H_2O$  che rimuove il soluto)

- $$D = \frac{\Delta m / \Delta t}{\Delta c / \Delta x} \frac{1}{A}$$

$\Delta c / \Delta x$ , costante, si misura con metodi ottici [ $n = n(c)$ ]

(\*) facoltativo



$$\Delta c = c_2 - c_1$$



# Coefficiente di diffusione

- la formula di Stokes-Einstein vale per le soluzioni liquide e dà la dipendenza da T e dal raggio a

$$D = k_B T / (6\pi\eta a)$$

(ma si ricordi che  $\eta = \eta(T)$  !)

- per molecole sferiche di soluto

$$M = 4/3\pi a^3 \rho \propto a^3$$

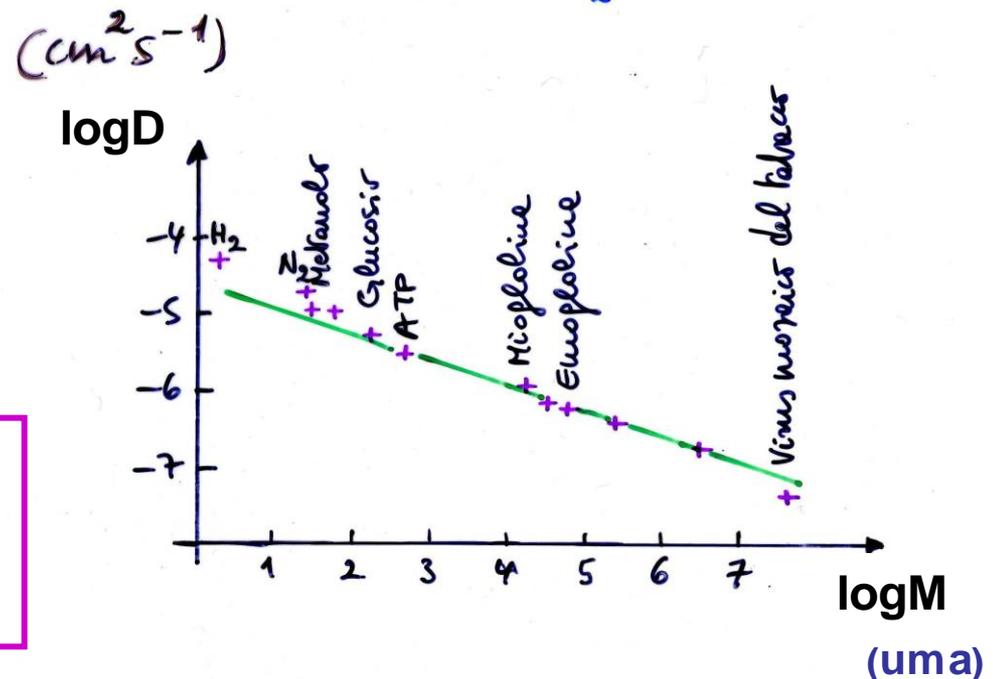
e, a parità di solvente,

$$D \propto (M)^{-1/3}$$

$$\ln D \propto -1/3 \ln M$$

- D in m<sup>2</sup>/s (in H<sub>2</sub>O 20 °C)

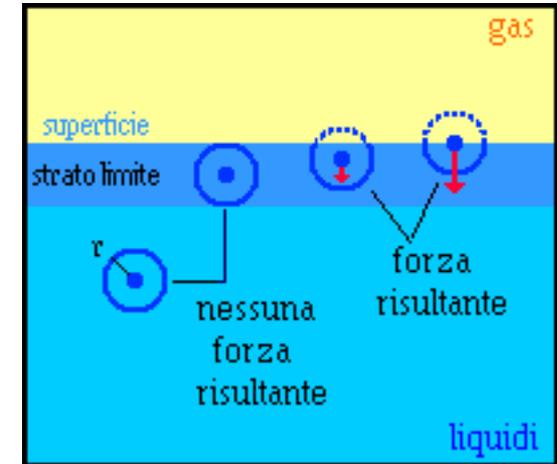
glucosio	180 uma	$5.7 \cdot 10^{-10}$
emoglobina	64 kuma	$6.3 \cdot 10^{-11}$
v.mosaico t.	$4.1 \cdot 10^7$ uma	$4.6 \cdot 10^{-12}$





# Tensione superficiale

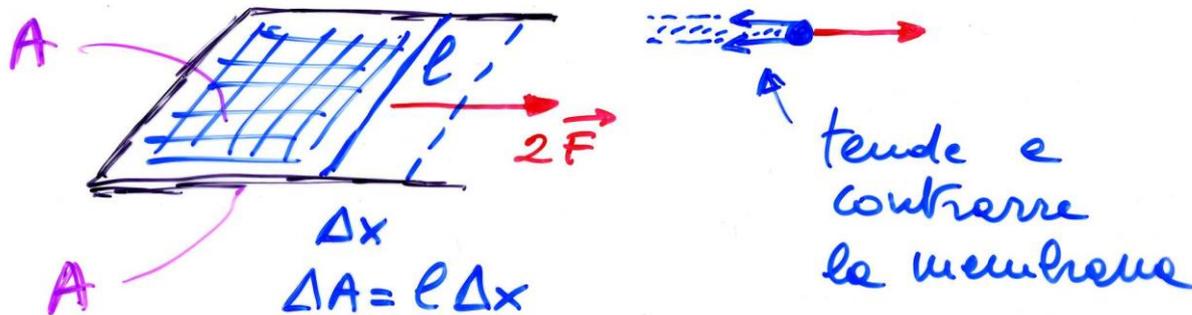
- forze molecolari (di natura el.magn., attrazione)
  - coesione: f. fra mol. della stessa specie
  - adesione: f. fra mol. di specie diverse
- mol. all'interno di un liquido: f. bilanciate (mol. libere di muoversi)
- mol. sulla superficie: risultante diretta all'interno (f. di richiamo, entro il raggio d'azione)
- agitazione termica: mol. in superficie con molta energia possono superare il r. d'azione della sup. ed evaporare
- superf. libera dei liquidi → minima (f. di richiamo)
- ad es. liquidi immiscibili di uguale  $\rho$ : gocce di forma sferica (sfera, solido di minima A fra tutti, a parità di V)





## Tensione superficiale (2)

- lamina liquida in aria (telaio con lato mobile)



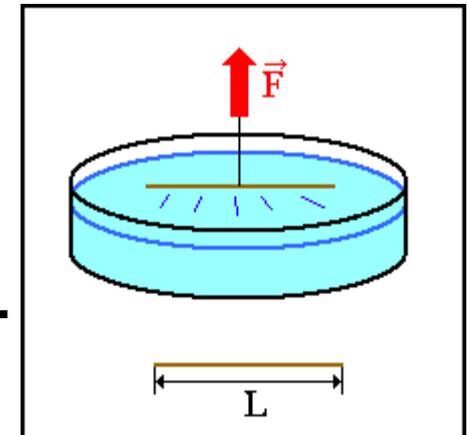
- per aumentare la sup.  $A$  di  $\Delta A$  occorre un lavoro  $\Delta \mathcal{L}$

$$\Delta \mathcal{L} / 2\Delta A = 2F\Delta x / 2\Delta A = F/\ell = \tau$$

tensione superficiale

- altro es. per sollevare un aghetto (o una moneta leggera) appoggiato sulla sup. di un liquido occorre fornire una f.

$$F = mg + 2\tau L > mg$$





## Tensione superficiale (3)

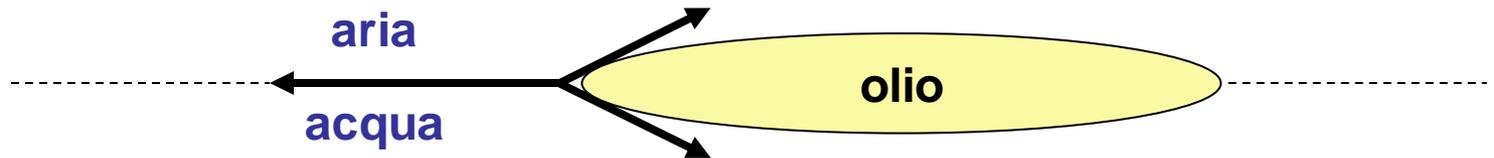
---

- la **tensione superficiale** è quindi **un lavoro per unità di superficie** oppure **una forza per unità di lunghezza**
- $[\tau] = [\mathcal{L}/A] = [F/l] = [MT^{-2}]$
- unità SI:  $1 \text{ N/m} = 1 \text{ J/m}^2$   
CGS:  $1 \text{ dyne/cm} = 1 \text{ erg/cm}^2 =$   
 $= 10^{-7} \text{ J}/10^{-4} \text{ m}^2 = 10^{-3} \text{ J/m}^2$
- $\tau$  dipende da  $T$  e dai fluidi a contatto
  - aria- $\text{H}_2\text{O}$   $20^\circ\text{C}$   $\tau = 0.073 \text{ N/m}$  ( $= \text{J/m}^2$ )
  - aria- $\text{H}_2\text{O}$   $40^\circ\text{C}$   $\tau = 0.069 \text{ N/m}$
  - olio- $\text{H}_2\text{O}$   $20^\circ\text{C}$   $\tau = 0.032 \text{ N/m}$  (bassa, come per altri liquidi organici)



## Tensione superficiale (4)

- $\tau$  dipende dalla purezza del liq. e della sup. (l'aggiunta di tensioattivi, saponi, detersivi, diminuisce molto  $\tau$ )
- lamine sottili: goccia d'olio su  $H_2O$



siccome  $T_{ar-ac} > T_{ar-ol} + T_{ac-ol}$  anche  $F_{ar-ac} > F_{ar-ol} + F_{ac-ol}$ ,  
non c'è equilibrio e la goccia tende a formare una  
macchia molto sottile

- (\*) **semplice esperienza casalinga**: bacinella di  $H_2O$  (pura), talco spruzzato, una goccia d'olio di volume  $V$  (si misura  $r$  con una lente prima di lasciarla cadere), si misura poi il  $R$  della macchia d'olio:  $d(\text{spessore della macchia d'olio}) = V/(\pi R^2)$   
→  $d$  risulta molto piccolo, al limite diametro di una molecola di olio

(\*) facoltativo!!



# Lamine curve: legge di Laplace(\*)

- consideriamo una bolla di acqua saponata ( $\tau = 0.025$  N/m, bolle più facili): la sup. tenderà a contrarsi  $\rightarrow$   
 $p_c = p_i - p_e$  che si trova dal lavoro necessario per gonfiare la bolla di  $\Delta V = A\Delta r$

$$\Delta \mathcal{L} = F\Delta r = p_c A\Delta r = p_c 4\pi r^2 \Delta r$$

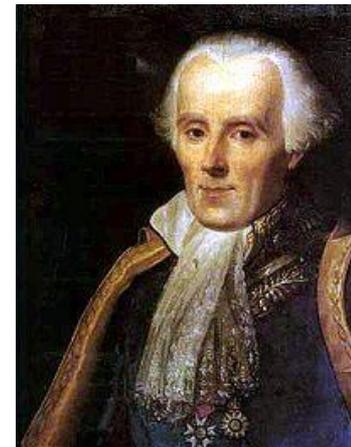
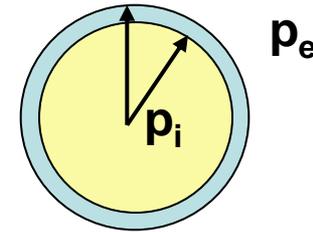
ma anche (2 sup.)

$$\Delta \mathcal{L} = 2 \tau [4\pi(r+\Delta r)^2 - 4\pi r^2] \sim 16 \tau \pi r \Delta r \quad (\Delta r \ll r)$$

da cui

$$p_c = 4 \tau / r$$

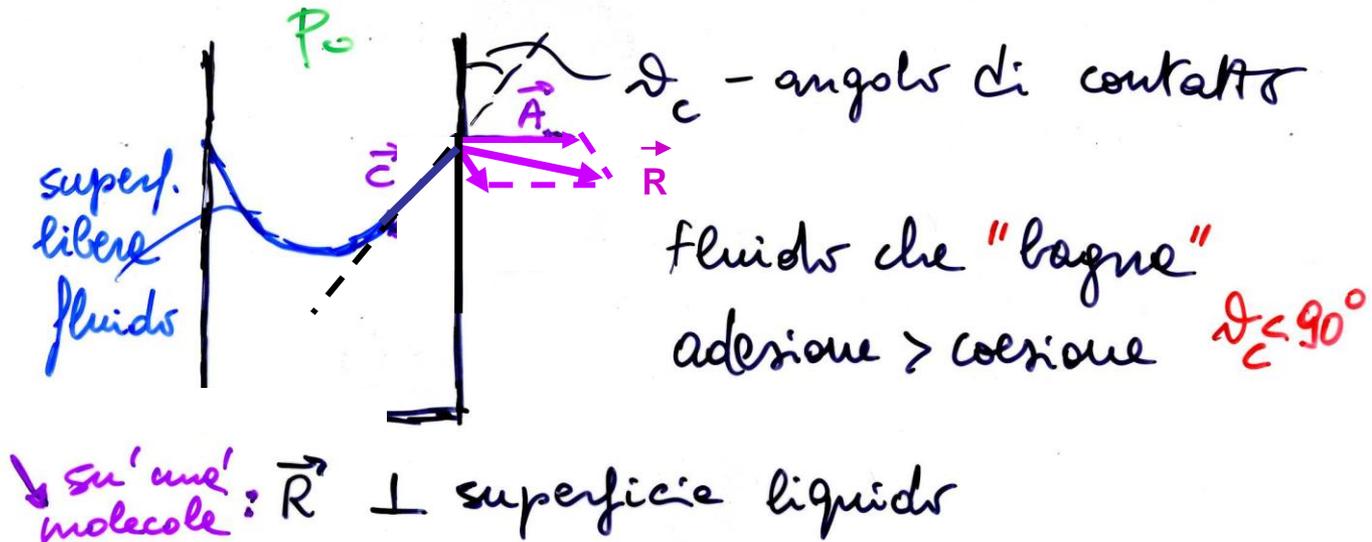
( $p_c = 2 \tau / r$ , pressione di curvatura, per una superficie sola) legge di Laplace



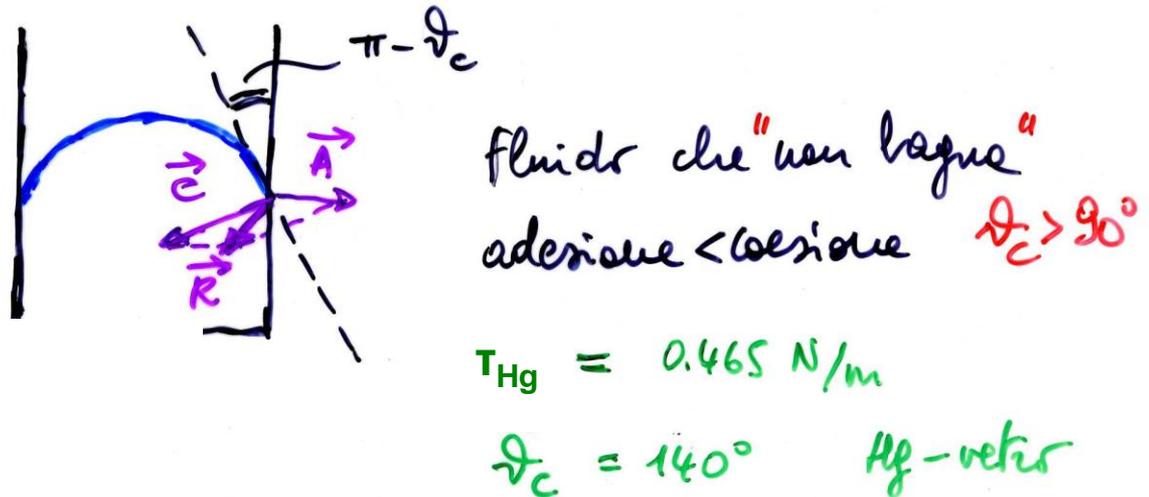


# Forze di adesione e di coesione(\*)

- liquido a contatto con una parete: le mol. saranno soggette a f. di adesione ( $\vec{A}$ ) oltre che di coesione ( $\vec{C}$ )



- alternativamen. si possono considerare le  $T_{\text{liq-sol}}$ ,  $T_{\text{sol-gas}}$  e  $T_{\text{liq-gas}}$ : se  $T_{\text{sg}} > T_{\text{sl}}$  (Ades. > Coes.)  $\rightarrow \theta_c < 90^\circ$  etc.





# Fenomeni capillari, legge di Borelli-Jurin



G.A. Borelli

- in un capillare, se il liquido bagna le pareti, acqua, (non bagna, Hg) → innalzamento (abbassamento)
- si usa la legge di Laplace (1 sup.)

$$p_0 - p_1 = 2\tau/a = 2\tau \cos\theta_c / r$$

che uguaglia la  $p$  idrostatica

$$\rho gh = 2\tau \cos\theta_c / r$$

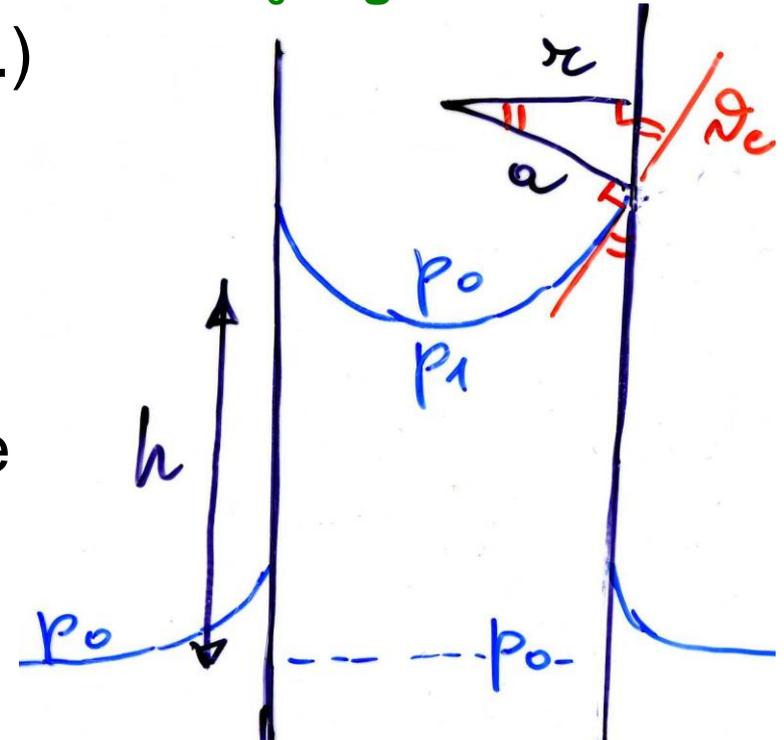
per cui l'innalza/abbassamento è

$$h = 2\tau \cos\theta_c / \rho gr$$

**legge di Borelli-Jurin**

$$a = r / \cos\theta_c$$

$\theta_c$  angolo di contatto





**Fine della meccanica dei fluidi**