Meccanica dei Fluidi

Corso di Fisica per Farmacia Rimini

AA 2010/11

Fluidi

- i fluidi sono pensati come sistemi continui
- non hanno forma propria e non sostengono sforzi tangenziali (staticamente)
- per trattarli dovremo sostituire alle grandezze massa, lavoro, energia ... le corrispondenti densità
  - densità (di massa) media

    $\rho = m/V$
  - pressione $p = \frac{F}{A} \left(= \frac{F \times s}{A \times s} = \frac{\mathcal{L}}{V}\right)$ (densità di lavoro-energia)(+)
  - densità di energia potenziale $\frac{mgh}{V} = \rho gh$
  - densità di energia cinetica $\frac{1/2\, mv^2}{V} = \frac{1}{2}\rho v^2$

(+) F•spostamento=lavoro
A•spostamento=volume

Densità (di massa)

- **densità assoluta**

  $\rho = m/V$ **(massa divisa il V che occupa, media)**

  $\Rightarrow m = \rho V \quad e \quad V = m/\rho$

  $[\rho] = [M/V] = [ML^{-3}]$

  unità SI: kg/m^3

  CGS: g/cm^3

  $1\ g/cm^3 = 10^3\ kg/m^3$

  altre unità: $kg/l = g/cm^3$; $g/l = kg/m^3$ ... $(1\ l = 10^{-3}\ m^3 = 10^3\ cm^3)$

- **densità relativa**

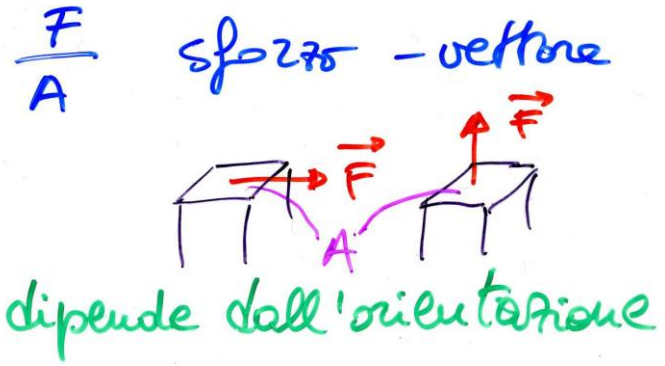
  $d_r = \rho/\rho_{rif}$ *(numero puro)*

  (riferimento: H_2O distillata a 4° C, $\rho_{H2O} = 10^3\ kg/m^3$)

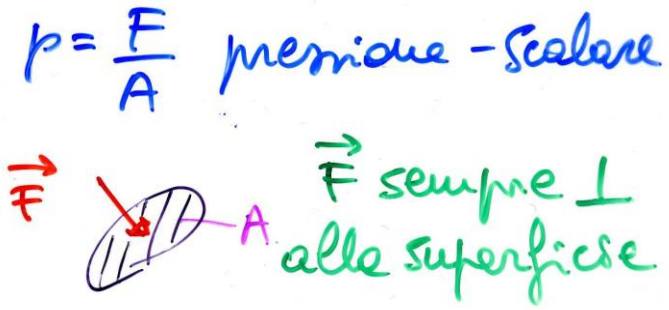
  $\Rightarrow \rho = d_r\rho_{rif} = d_r\rho_{H2O}$

Sforzo e pressione

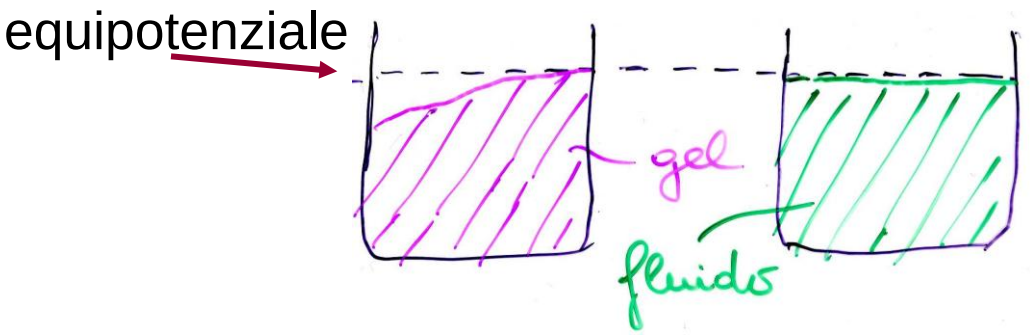
- solidi
  (forma propria)



- fluidi
  (senza forma propria)



- gel
  (~ senza f.p.)



Pressione

- la pressione (in un fluido) è una grandezza scalare, non dipende dall'orientazione della superficie su cui la forza è applicata – basta prendere **un punto di un fluido in quiete: risultante nulla** → p = F/A è uguale in tutte le direzioni
- $[p] = [F/A] = [ML^{-1}T^{-2}]$

  unità SI: N/m^2 ovvero pascal (Pa)

  CGS: $1\ dyne/cm^2 = 10^{-5}\ N/10^{-4}\ m^2 = 0.1\ Pa$ (baria)

  altre unità: $1\ atm = 1.01325\ 10^5\ Pa$

  $1\ bar = 10^5\ Pa$

  $1\ millibar = 10^2\ Pa$

  $1\ mmHg = 1\ torr = 1/760\ atm = 1.33\ 10^2\ Pa$

  (vedi definizioni successive per atm, mmHg)

Pressione (2)

- altri esempi di pressione:
  - un blocco di massa m e peso **F (**= **P)** = m**g** appoggiato sulla base di area A esercita una pressione p

    p = F/A

    (anche una persona esercita sul pavimento una pressione)
- se conosciamo la pressione p e l'area A possiamo calcolare la forza F corrispondente

  F = pA

  quindi, per una data pressione, la forza aumenta in modo $\propto$ area

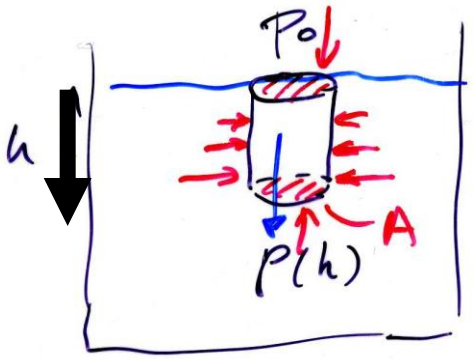
Fluidostatica

Liquidi e gas

- nei fluidi lo sforzo ha carattere di pressione
- i liquidi sono poco compressibili (vedi Meccanica pag. 107, tabella dei moduli di elasticità): $B_{liq} \sim B_{sol}$ – cioè servono grandi sforzi per piccole variazioni di volume: $\Delta V/V = - (F/A)/B = -\Delta p/B$ (nei liquidi le molecole sono vicine ~ come nei solidi e $\rho \sim$ cost., indipendente da p)
- i gas invece sono molto compressibili, B_{gas} è molto piccolo (le molecole del gas sono lontane fra loro, il volume occupato è quasi vuoto e ρ dipende da p, cioè può variare)

La pressione nei liquidi: legge di Stevino

- consideriamo un cilindro di fluido (liquido) in equilibrio
  - lungo la verticale $\Sigma_i F_i = 0 = p_0 A + \rho h A g - p(h) A$ (*)
    dove $m = \rho V = \rho h A$ è la massa del fluido
    e h è la profondità nel fluido (+va verso il basso)
  - la forze sul mantello si elidono a due a due:
    prendendo due piccole aree uguali laterali
    alla stessa h si ha $F = p\Delta A = p'\Delta A = F'$
    da cui $p' = p$

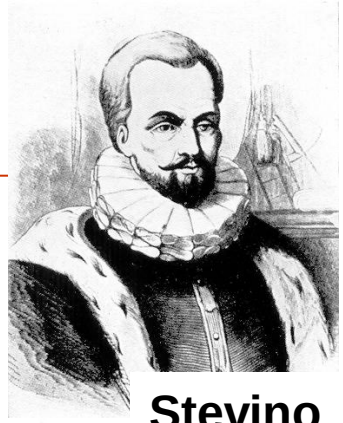


- eliminando A nella (*) e risolvendo per p(h) si ottiene la legge di Stevino in forma integrale

$$p(h) = p_0 + \rho g h$$

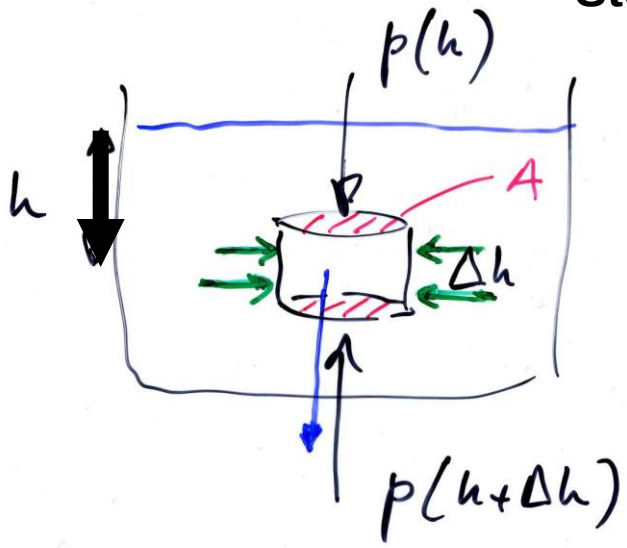
dove p_0 è la pressione sulla superficie superiore (se è la sup. libera del liquido, p_0 = p atmosf.): p aumenta con h

Legge di Stevino (2)


Stevino

- in generale consideriamo un volumetto in equilibrio all'interno di un fluido ($\Sigma_i \mathbf{F}_i = 0$)
  - f. orizzontali si elidono a 2 a 2
  - f. verticali

    $Ap(h+\Delta h) = Ap(h) + A\rho g\Delta h$



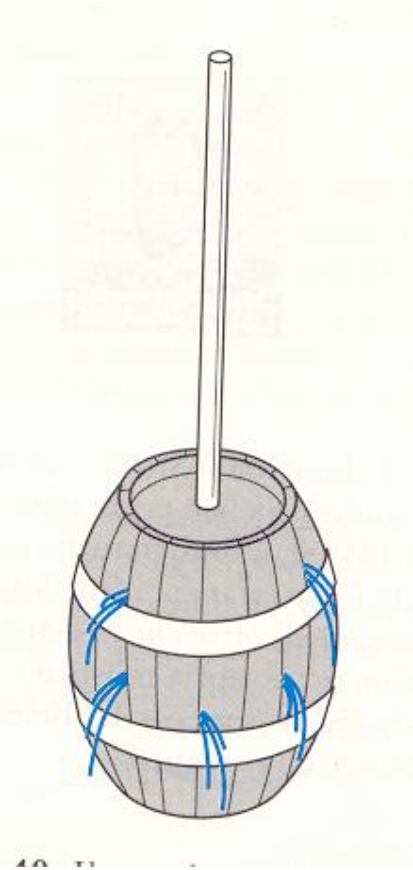
- ossia

$$\Delta p = p(h+\Delta h) - p(h) = \rho g \Delta h$$

che, al limite per $\Delta h \rightarrow dh$, è la legge di Stevino in forma differenziale e vale anche per i gas (ad es. con $\rho_{\text{gas perfetto}} = [M/(RT)]p$, vedi più avanti)

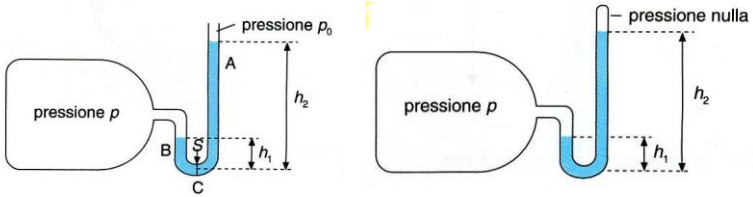
Pressione idrostatica

- pressione idrostatica: la pressione esercitata sulla base da una colonna di fluido in quiete ($\rho g \Delta h$)
- non dipende dalla forma del contenitore
- per un liquido dipende solo da Δh non dalla profondità nel fluido
- non dipende dalla m del fluido – ad es.1 un tubicino sufficientemente lungo inserito in una botte sigillata e riempito di liquido la fa scoppiare! – ad es.2 un cuscino d'aria alla p di 20 bar sostiene una colonna di Fe di ugual sezione ed alta 25.4 m

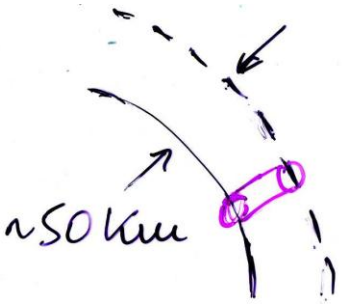


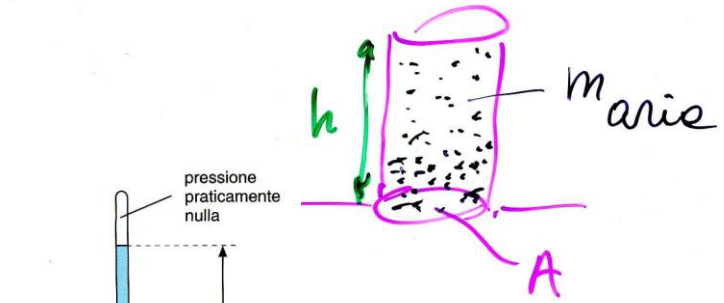
Misura della pressione, pressione atmosferica

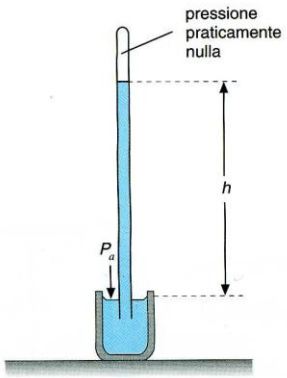
- p si misura con manometri (ad H_2O, per piccole Δp [$=\rho g \Delta h$], altrimenti a Hg), elettromanometri



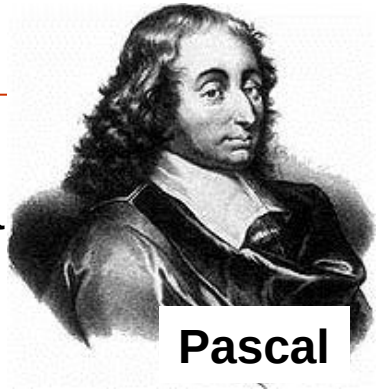
- pressione atmosferica p_0 (cfr. esperienza di Torricelli, barometro: la pressione dell'aria è ~ quella di 76 cm di Hg) – la "pressione normale" dell'aria è quella di 76.0 cm di Hg a 0 m s.l.m., 45° di latitudine e 0 °C, p_0 = 101325 Pa = 1 atm
- l'atmosfera è spessa ~ 50 km
- la densità decresce con h
- $p_{aria}/A = m_{aria}g/A$
- $p \sim \frac{1}{2}\, p_0$ per h ~ 5400 m







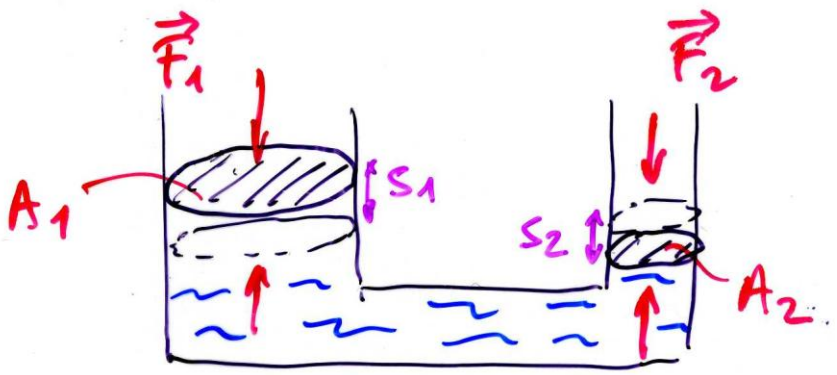
Legge di Pascal



- dalla legge di Stevino, se la pressione esterna varia di $\Delta p_0 = p_0' - p_0$, varierà anche la pressione all'interno di un liquido di $\Delta p = \Delta p_0$
- in genere per un fluido incompressibile una variazione di p esterna si trasmette inalterata a tutto il fluido ("principio" di Pascal)
- ad es. pressa o torchio idraulico

$$\Delta p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$F_1 = F_2 \frac{A_1}{A_2} > F_2$$



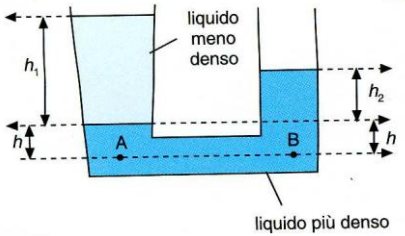
(ma il lavoro è: $F_1 s_1 = F_2 s_2$!)

Altre conseguenze della legge di Stevino

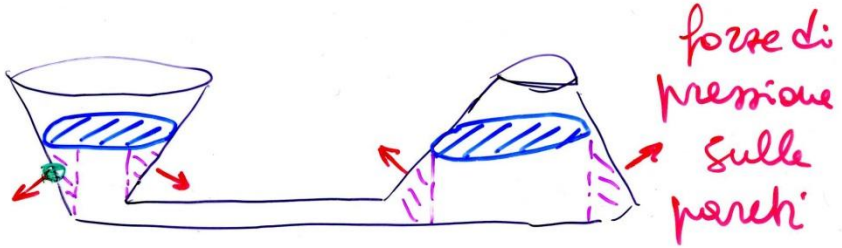
- es. 1 due fluidi immiscibili con $\rho_1 \neq \rho_2$ in recipienti comunicanti: sia h_1 l'altezza del meno denso rispetto alla sup. di separazione e h_2 quella del più denso, si avrà

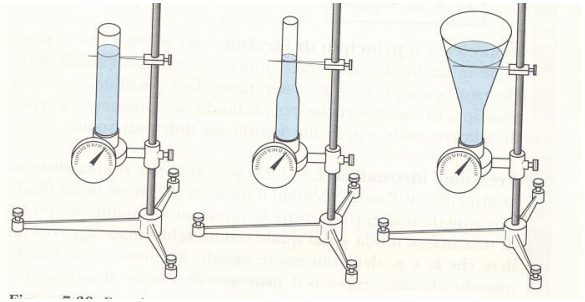
  $p_0 + \rho_1 g h_1 = p_0 + \rho_2 g h_2$; $\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2$

  $h_1/h_2 = \rho_2/\rho_1$



- es. 2 "paradosso idrostatico": p dipende solo dalla profondità h
  - le pareti "sostengono " il fluido
  - il fluido "sostiene" le pareti
  - indipendenza dalla forma del contenitore



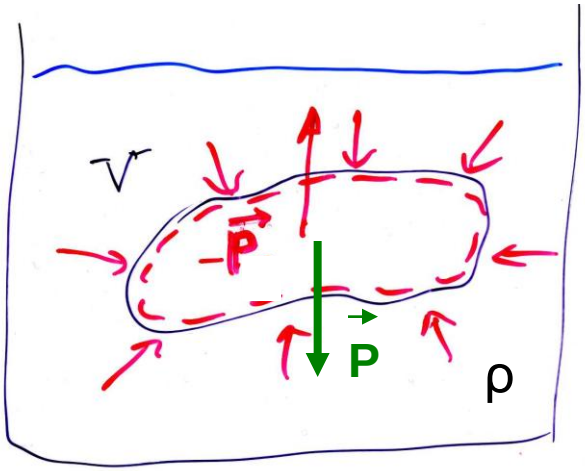


Spinta idrostatica

- prendiamo un volume V di fluido (liquido o gas) in quiete, il suo peso **P** = m**g** = ρV**g** dovrà essere equilibrato da una f. – **P** dovuta al resto del fluido
- sostituiamo il fluido con un corpo di uguale V, esso subirà quindi una spinta diretta verso l'alto

  $F_S = -\rho V g$

  dovuta al fluido circostante (spinta idrostatica)



- sul corpo agisce quindi (ρ' densità del c.) una f. totale

$$F_{ris} = P + F_S = P - \rho V g = \rho' V g - \rho V g = (\rho' - \rho) V g$$

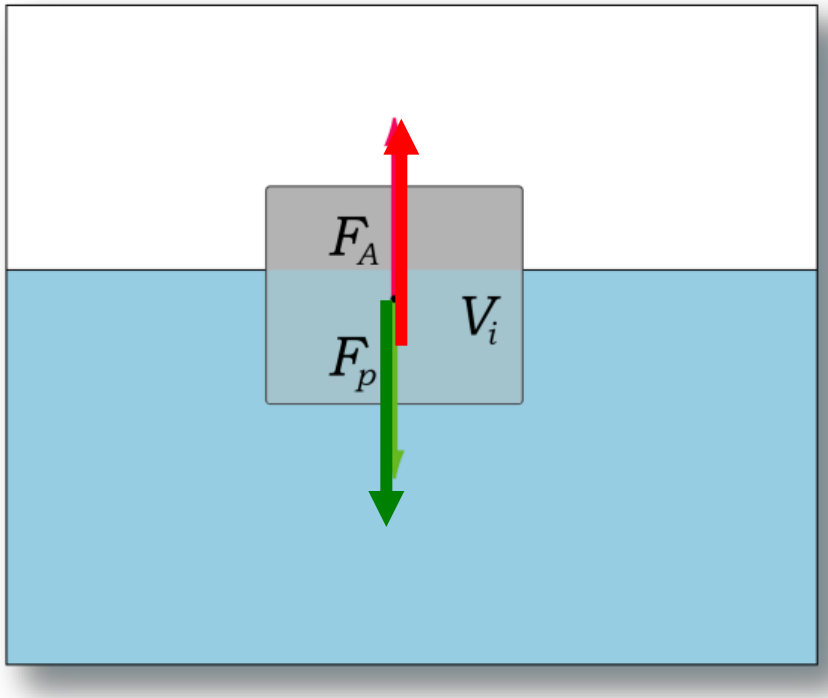
“Tipica” spinta idrostatica:
corpi parzialmente
immersi nel Mar Morto,
ρ ~ 1.24 10³ kg/m³ (cfr.
con acqua di mare aperto,
ρ ~ 1.02-1.03 10³ kg/m³)

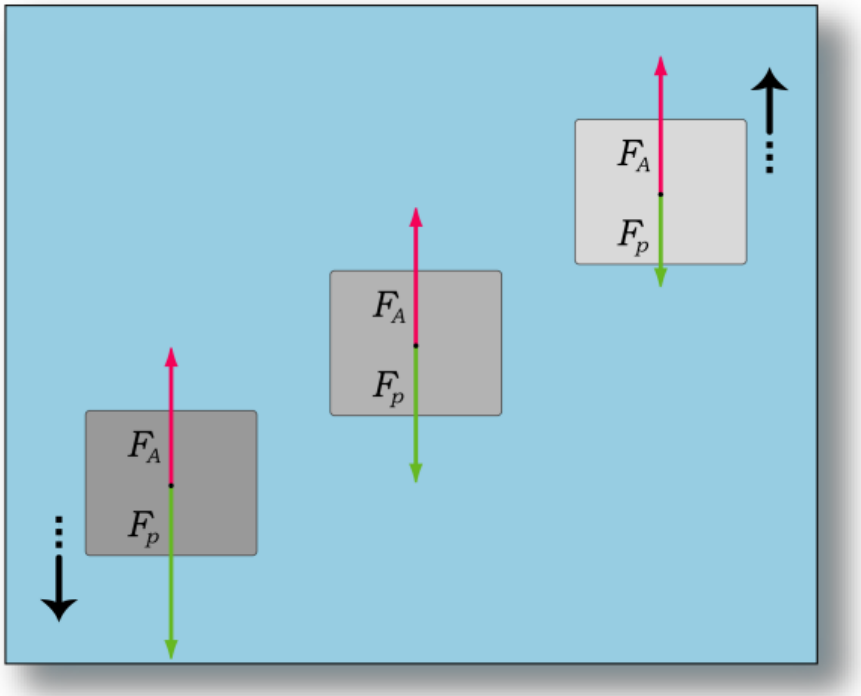
Spinta idrostatica (2)

- se il c. è immerso solo parzialmente, V’ = fV, si avrà
  $F_{ris} = P – \rho V’g = \rho’Vg – \rho fVg = (\rho’ – f\rho)Vg$
  con $0 < f \leq 1$
- ⇒ un corpo, immerso anche parzialmente in un fluido, è soggetto ad una spinta uguale e contraria al peso del fluido spostato – si dimostra in modo alternativo considerando le f. di pressione su un c. di geometria semplice, ad es. cilindro verticale (si usa la legge di Stevino)
- c. totalm. immerso: se $F_{ris} > (<, =) 0$, il c. andrà a fondo (salirà a galla, sarà in equilibrio indifferente)
- c. parzialm. immerso: se $F_{ris} = 0$ il c. galleggia
  $f = V’/V = \rho’/\rho$

Spinta idrostatica (3)

- F_P (P) è applicata nel baricentro del corpo, F_A (F_S) in quello della parte immersa (centro di spinta)



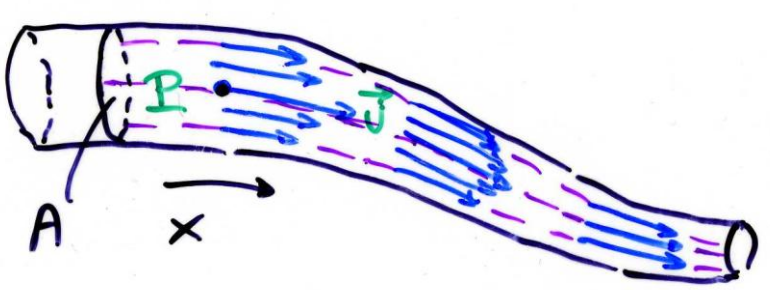


- se il corpo è omogeneo e totalmente immerso, i due punti coincidono

Dinamica dei fluidi

Moto stazionario

- Particelle di fluido: in generale si ha un campo di velocità $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P,t)$ – se il moto è stazionario $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P)$ non varia con t



- Linee di corrente: traiettorie descritte dalle particelle fluide (in P **v** è tangente alla l.d.c.)
- Moto laminare: le l.d.c. non si intersecano (linee o strati o filetti “paralleli”)
- Portata: $Q(x) = A(x)v(x)$ (in volume)

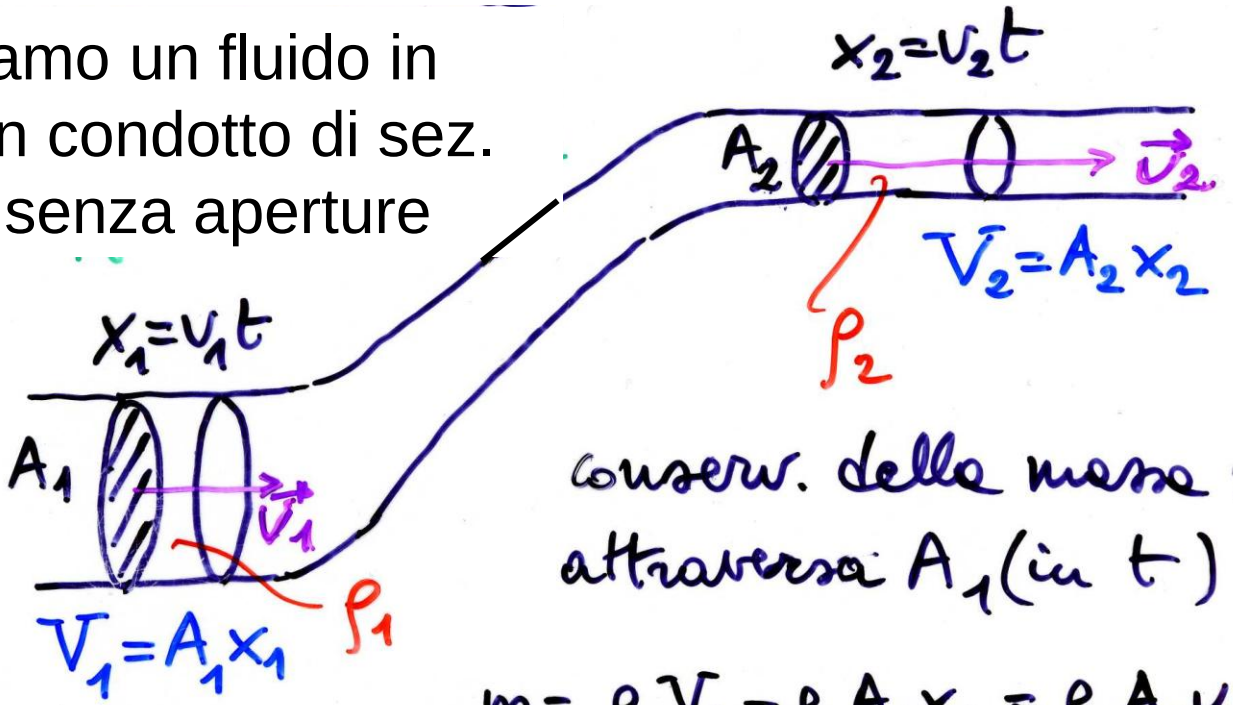
Fluido ideale o perfetto

- per definire un f. ideale o perfetto sono necessarie ***due*** condizioni e da queste si ottengono ***due*** leggi

1. incompressibilità → conservazione della portata (ad es. i liquidi sono poco compressibili)
2. assenza di viscosità (attrito interno) → teorema di Bernoulli, cons. en. meccanica applicata ai f. (vale per molti liquidi; anche per i gas se $v < v_{suono}$ nel gas; si può usare in prima approssimazione anche per f. viscosi)

Equazione di continuità(*)

consideriamo un fluido in moto in un condotto di sez. variabile, senza aperture



conserv. della massa $\Rightarrow$

attraverso A_1 (in t):

$$m = \rho_1 V_1 = \rho_1 A_1 x_1 = \rho_1 A_1 v_1 t$$

attraverso A_2: stessa

$$m = \rho_2 V_2 = \rho_2 A_2 x_2 = \rho_2 A_2 v_2 t$$

$$\Rightarrow \boxed{\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2}$$ eq. continuità

(*) dimostrazione facoltativa

Conservazione della portata

- se il f. è incomprimibile (ρ = cost) l'eq. precedente diviene

  (m/t =) $\rho A_1 v_1 = \rho A_2 v_2$ ossia

  $A_2 v_2 = A_1 v_1$ (conservazione della portata in volume)
- fluido non-viscoso e incompressibile (ideale)

  $Q = Av = cost$

  v è la stessa in tutti i punti di A (niente attrito)
- fluido viscoso e incompressibile

  $Q = A\underline{v} = cost$

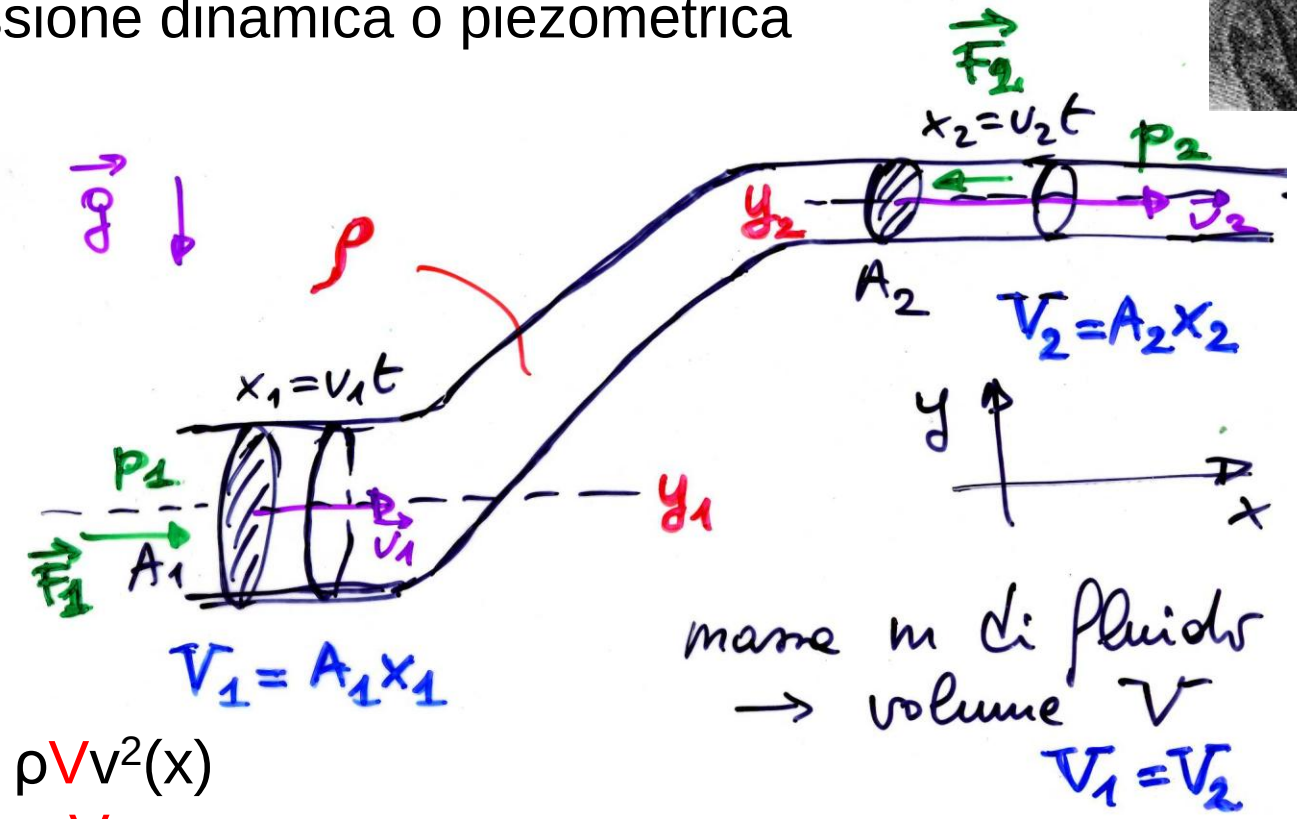
  $\underline{v} = Q/A$ dove la media delle v. è sulla sezione A
- in ogni caso, se A cresce, v (o $\underline{v}$) diminuisce e viceversa

  $v_2 = v_1 A_1 / A_2$

Teorema di Bernoulli

Daniel Bernoulli 1700-82

f. ideale, condotto di sez. e quota variabili,
p è la pressione dinamica o piezometrica



$K = \frac{1}{2}\,\rho V v^2(x)$

$W(y) = \rho V g y$

$\mathcal{L}_p = p_1 A_1 x_1 - p_2 A_2 x_2 = (p_1 - p_2)V$ (fluido)

(lungo una linea di corrente)

Teorema di Bernoulli (2)

- usiamo il teorema dell'en. cinetica

  $\frac{1}{2}\rho V(v_2^2-v_1^2) = \rho V g(y_1-y_2) + (p_1-p_2)V$ ottenendo la cons. dell'en. meccanica applicata ad un f.

- semplificando e riarrangiando

  $$p(x) + \rho g y(x) + \frac{1}{2}\rho v^2(x) = p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \text{cost}$$

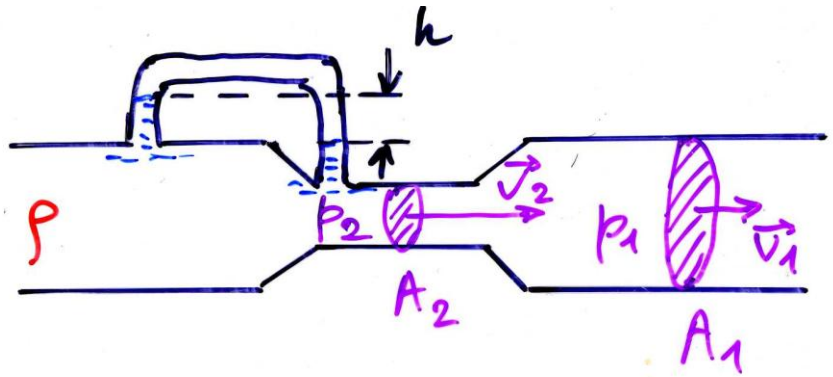
  teorema di Bernoulli: la somma della pressione dinamica o piezometrica, della densità di en. potenziale (pressione di gravità) e della densità di en. cinetica (pressione cinetica) è costante $(=E_0/V)$

- se il liquido è fermo manca il termine cinetico e si ritrova la legge di Stevino, $p_1+\rho g y_1 = p_2+\rho g y_2$ ossia

  $$p_2 = p_1 + \rho g(y_1-y_2) = p_1 + \rho g(h_2-h_1)$$

Applicazioni: tubo di Venturi(*)

- tubo orizzontale: $y_1 = y_2 \rightarrow p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost}$
- cons. della portata: $Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 \rightarrow v_2 = v_1 A_1/A_2 > v_1$
- eq. di Bernoulli: $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$



nella strozzatura v cresce (Q=cost) e p diminuisce (E_0/V=cost)

il manometro usa il fluido stesso come f. manometrico

$p_1 - p_2 = \rho g h$

$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}\rho v_1^2(A_1^2/A_2^2 - 1) > 0$

che si può risolvere per v_1^2 → misura della velocità del f.

(*) facoltativo

Altre applicazioni delle leggi dei fluidi

- aneurisma

  $A' > A \rightarrow v' < v$

  $y' = y \rightarrow p + 1/2\rho v^2 = \text{cost}$

  $\rightarrow p' > p$

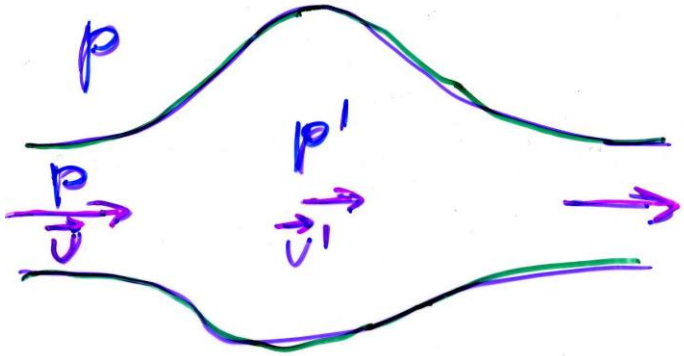
  $p'-p > 0$ tende a dilatare ulteriormente il vaso

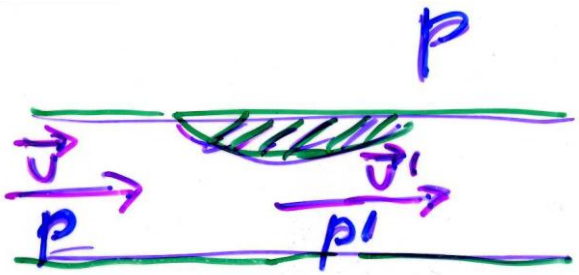
- stenosi (anche placche aterosclerotiche, forma comune di arteriosclerosi)

  $A' < A \rightarrow v' > v$

  $\rightarrow p' < p$

  $p-p' > 0$ tende a chiudere ulteriormente il vaso

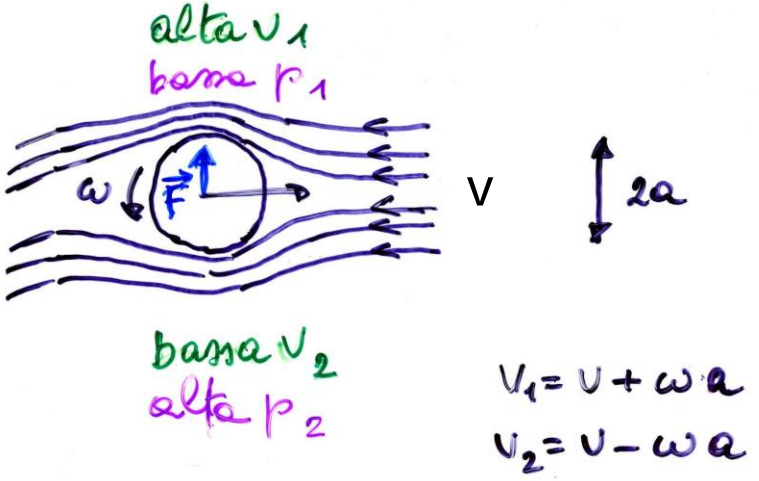




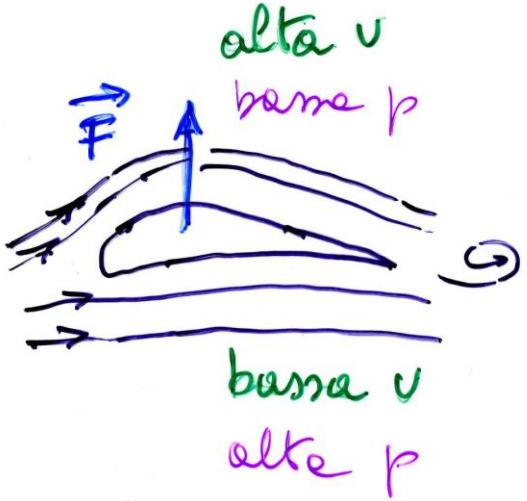
la stenosi si può curare inserendo uno stent: A' = A

Altre applicazioni di $\frac{1}{2}\rho v^2 + p = cost$(*)

- effetto Magnus, la rotazione della pallina varia la v. del fluido intorno
  $v_1 > v_2 \rightarrow p_1 < p_2 \rightarrow$ **F**



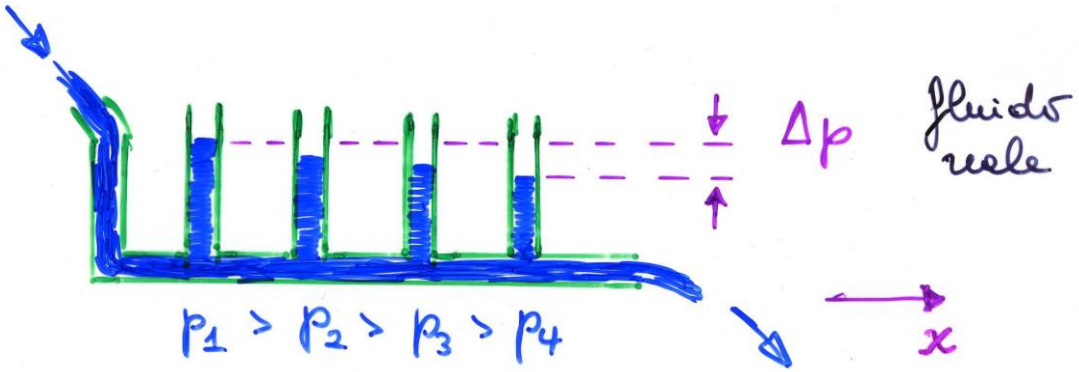
- portanza di un'ala: il profilo è tale che in alto la v. è maggiore (percorso del f. più lungo in tempo uguale)



(*) facoltativo

Fluidi reali, viscosità

- se ho un f. in un condotto orizzontale di sez. cost., per l'eq. di Bernoulli la pressione dinamica deve essere costante, *invece* si osserva che per un f. reale la quota piezometrica decresce → una perdita di en. meccanica



- il gradiente Δp/Δx misura il tasso di perdita di en. meccanica (**NB** v=cost, la pressione cinetica è cost; y=cost, la pressione di gravità è cost)

Coefficiente di viscosità

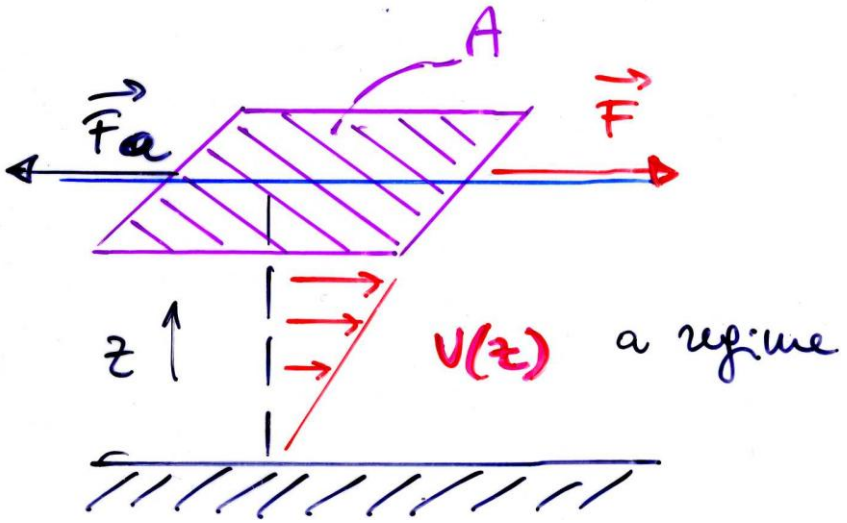
- applichiamo **F** ad una tavoletta sulla superficie di un f. reale: la reazione $\mathbf{F_a}$ è dovuta agli attriti e a regime la tav. si muoverà con v cost. (invece di accelerare con **F**)
- il coefficiente di viscosità del f., η, è definito da

$$F/A = \eta \Delta v/\Delta z$$

con $[\eta] = [FL/AV] = [ML^{-1}T^{-1}]$

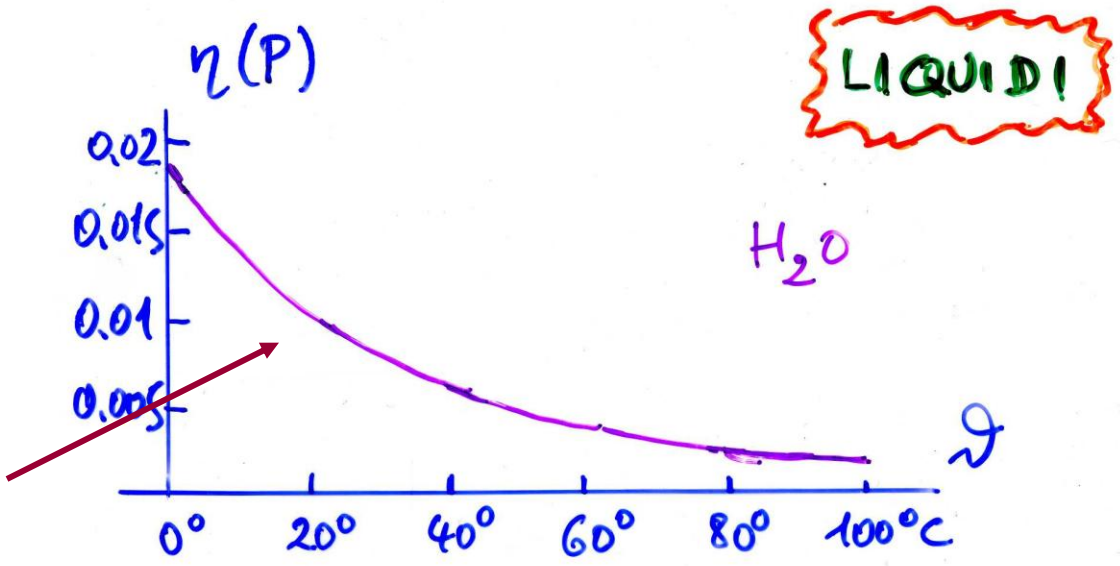
unità SI: Pa·s

CGS: 1 $g \cdot cm^{-1}s^{-1}$ = 1 P(oise) = 10^{-1} Pa·s



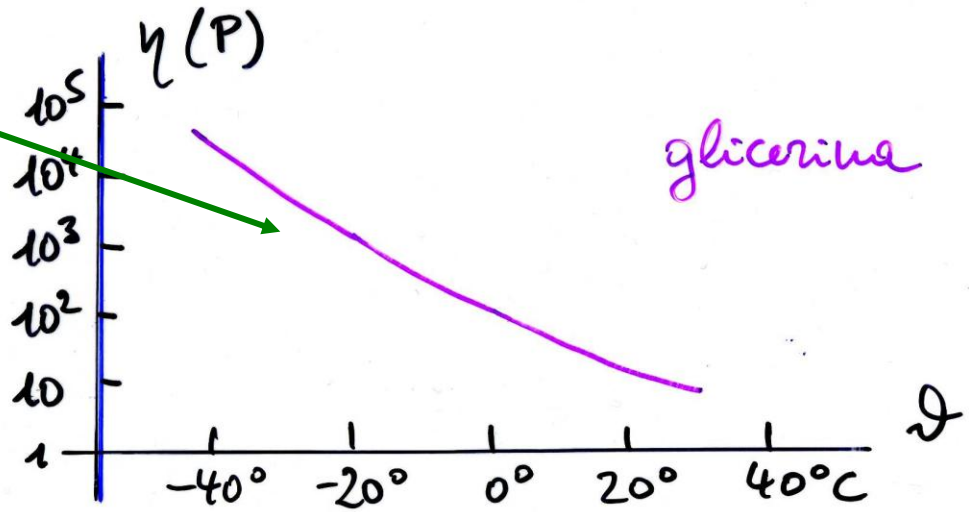
Viscosità dei liquidi(+)

- dipende molto dalla temper., decresce con la temper.



poco viscosa

molto viscosa

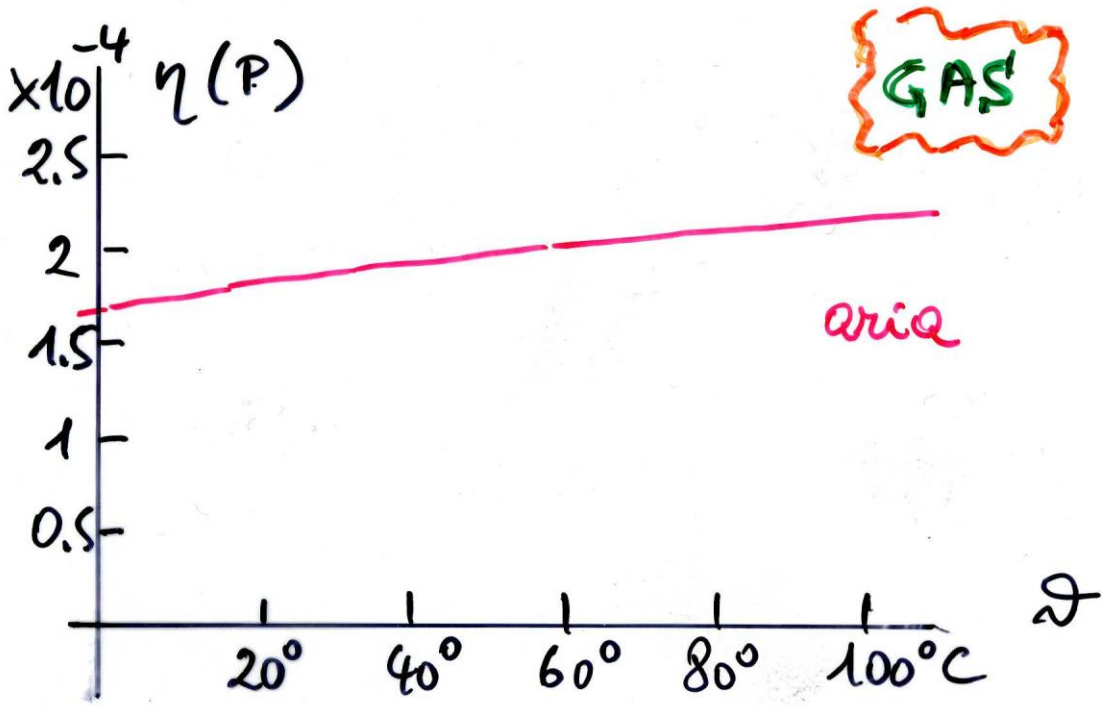


(+) liquido: molecole molto vicine fra loro, l'agitazione termica aiuta lo scorrimento

Viscosità dei gas(+)

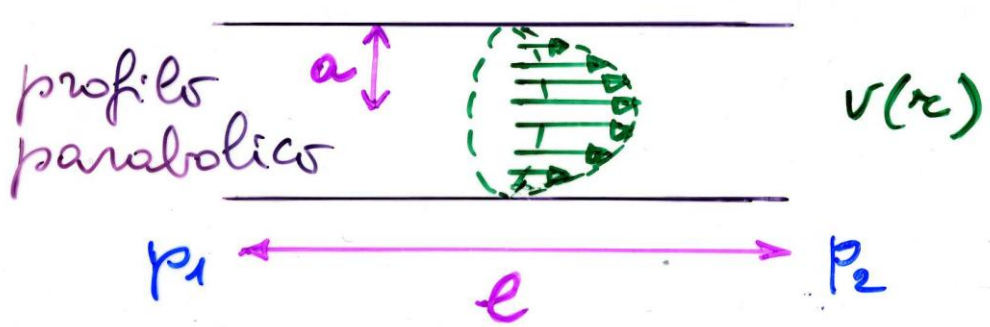
- la viscosità dei gas è molto debole e cresce lievemente con la temperatura

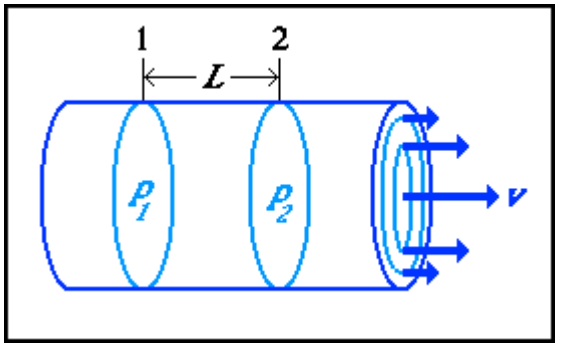
(+) gas: molecole molto lontane fra loro, se aumenta l'agitazione termica, aumenta la possibilità di uno scontro e frena lo scorrimento



Scorrimento laminare, legge di Poiseuille (1844)

si può mostrare che se il moto è laminare, in un capillare il profilo delle velocità è parabolico con v max al centro





la portata è $\propto \Delta p/l$ (gradiente di pressione), a^4, $1/\eta$

$$Q = A\bar{v} = \frac{\pi a^4}{8\eta}\frac{p_1 - p_2}{l}$$

legge di Poiseuille-Hagen

$\bar{v}$ può essere ottenuta da $Q/(\pi a^2)$

un f. è newtoniano se η=cost $\forall p \rightarrow Q \propto \Delta p/l$

Poiseulle

Legge di Poiseuille(2)(*)

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{l}$$

$\mathcal{R}$: ciò che si oppone al moto

il fluido viscoso si muove sotto l'azione di una differenza di pressione

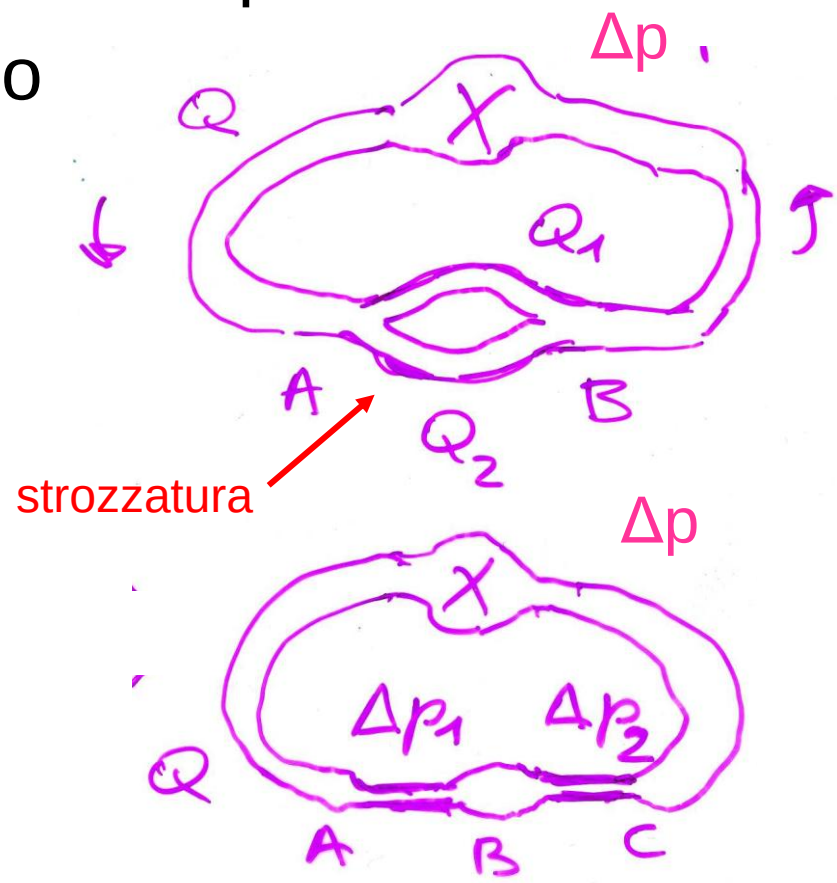
$=1/\mathcal{R}$ ⇢ $Q = (p_1-p_2)/\mathcal{R} = \Delta p/\mathcal{R}$

confronta con $I = (V_1-V_2)/R = \Delta V/R$
(correnti elettriche, vedi più avanti,
legge di Ohm, per R costante)

(*) facoltativo

Applicazioni(*)

- per far scorrere un f. reale in un circuito occorrerà una pompa che fornisce la diff. di pressione
- il comportamento è analogo ai circuiti elettrici [in parallelo ($Q=Q_1+Q_2$) ed in serie ($\mathcal{R}=\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_2$)] con $\mathcal{R} = 8\eta l/(\pi a^4)$ e $\boxed{Q = \Delta p/\mathcal{R}}$ (vedi circolazione del sangue, elettricità)



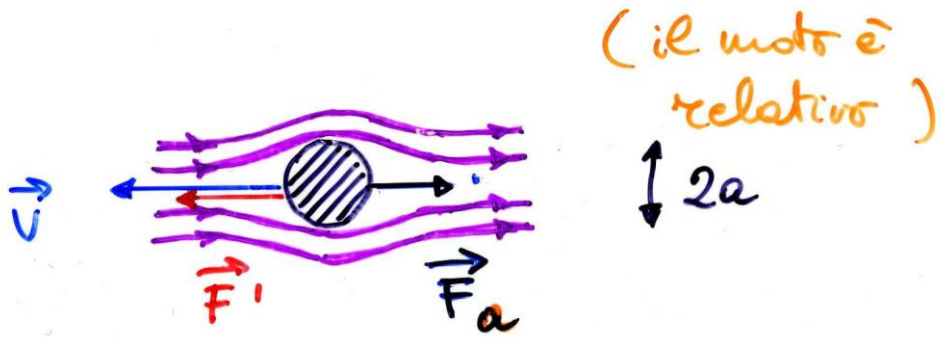
(*) facoltativo

Moto di un corpo in un fluido, resistenza viscosa

- corpo che si muove sotto l'azione di una F' in un liquido viscoso (gravità, spinta idrostatica, elettrica etc.): al moto inizialmente accelerato si oppone una f. di attrito

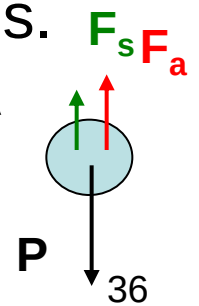
  $F_a = klη v$

  forza di Stokes, dove k dipende dalla forma e l è una dimensione lineare caratteristica del c. (6π e raggio a per una sfera) – la legge di Stokes è valida per numeri Reynolds piccoli (vedi oltre)



- siccome F_a cresce con v, al limite uguaglierà F', per es. corpo sotto l'azione del peso e della spinta idrostatica

  $\mathbf{P} + \mathbf{F_s} + \mathbf{F_a} = 0$



Sedimentazione

- all'equilibrio (dinamico) F_a (che cresce) uguaglia la differenza $P-F_s$ (che è cost.) ed il corpo si muove con v costante (I principio)
- se $m = \rho' V$, $P = \rho' V g$ e $F_s = \rho V g$

  $kl\eta v = \rho' V g - \rho V g$

  $v = V(\rho'-\rho)g/kl\eta$ [$= 2a^2(\rho'-\rho)g/9\eta$ per un c. sferico]

  è la velocità limite o di sedimentazione con cui il c. va a fondo (se $\rho'-\rho>0$): frazionamento di un sistema costituito da corpuscoli diversi in sospensione, si rimuove via via il sedimento
- ad es. velocità di eritrosedimentazione v.e.s. → stati patologici (v di sedimentazione dei globuli rossi)
- svantaggio: g fissa, t lunghi, ad es. a=1μm, $\rho'=1050 kg/m^3$ in H_2O a 20 °C, $v \sim 10^{-5} cm/s$ → $t \sim 10^5 s$ per percorrere 1cm!

Centrifugazione

- per aumentare v, occorre sostituire P con una f. più grande: si usa $m\omega^2R$ cui è soggetto un c. che si muova su una traiettoria circolare di raggio R (f. centripeta)
- $F_c = \rho' V\omega^2R$

  in parte fornita dal fluido in rotazione: $p = p_0+\rho gh+\rho\omega^2R^2/2$ (invece di $p = p_0+\rho gh$, in quiete) – p varia in funzione di R, distanza dall'asse di rotazione: il c. sente una f. maggiore nei punti più lontani dall'asse, insufficiente a tenerlo su una circonf. di raggio R se $\rho'>\rho$, la f. risultante è

  $F' = F_c-F_r = (\rho'-\rho)V\omega^2R$

  diretta verso l'esterno, dove F_r è la f. radiale del fluido; al limite F' sarà equilibrata dalla f. di Stokes ed il c. sedimenterà verso l'esterno (della provetta)

Centrifugazione (2)

- la v di sedimentazione è ora

  $v' = V(\rho'-\rho)\omega^2 R/k\eta$ [= $2a^2(\rho'-\rho)\omega^2 R/9\eta$ per un c. sferico]

  e si guadagna rispetto alla sedimentazione naturale

  $v'/v = \omega^2 R/g$

  ad es. R=10cm, 10k giri/min, $\omega=2\pi/T=2\pi\nu=1.05\ 10^3\ s^{-1}$,

  $\omega^2 R=1.1\ 10^5\ m/s^2$ e $v'/v = 1.1\ 10^4$

  → industria chimica/alimentare, medicina/biologia

  con ~100k giri/min (ultracentrifughe) si arriva fino a ~10^6 g

  → separazione di corpuscoli (ad es. a < 1μm, virus, macromolecole)
- limitazioni: volumi provette piccoli ~$1cm^3$, blindaggio della centrifuga (per via di ω), attriti → raffreddamento/vuoto etc.

Centrifuga

- ad es.

Applicazioni speciali nei seguenti campi:
— ricerche sul cancro e sull'AIDS
— separazione di enzimi
— studi di ingegneria genetica e microbiologia
— precipitazione di batteri da colture
— recupero di piccole quantità di sostanza con la tecnica delle «hard pellets»

Impiego fino a 22.600 giri/minuto con valore di g. preselezionabile fino a 20.000: preselezione dunque non della velocità di rotazione ma del valore di g che viene raggiunto e mantenuto costante indipendentemente dal tipo di rotore in uso, grazie alla possibilità di preimpostazione del diametro del rotore stesso.

Rotore collocato in un alloggiamento in acciaio inossidabile, che rende possibile una semplice pulizia mentre permette la necessaria sicurezza.

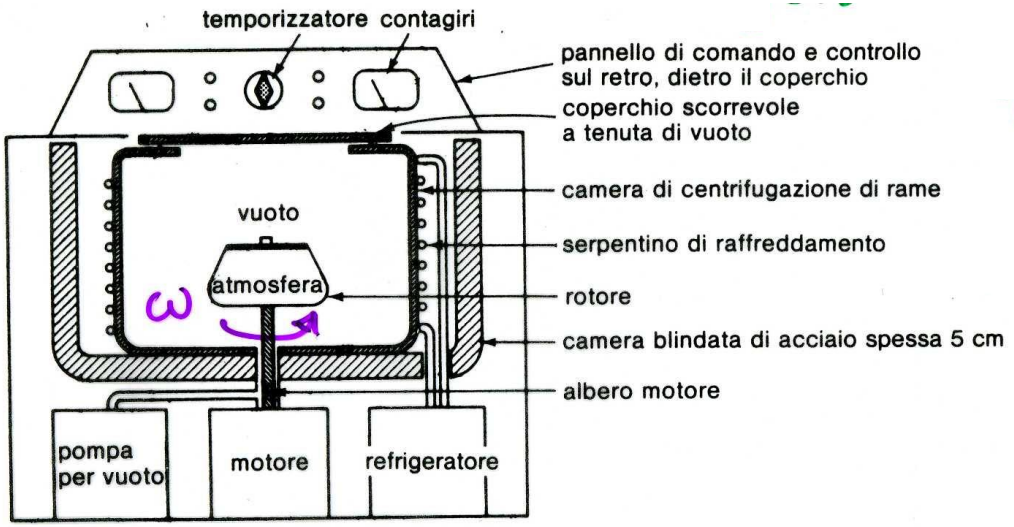
Vasta gamma di rotori disponibili per provette di capacità compresa tra i 10 e gli 0.25 ml, per un massimo di 48 posti. Importanti i rotori tipo «slide» caratterizzati dall'inserzione orizzontale di provette provviste di tappo; possono accogliere provette di capacità diversa.

Possibilità di preimpostare il tempo nel quale viene raggiunto il valore di g desiderato; un particolare sistema elettronico provvede a far si che il tempo di decelerazione al termine del trattamento sia uguale a quello di accelerazione iniziale. Questo contribuisce a rendere i trattamenti di centrifugazione estremamente ripetibili.

Sistema di refrigerazione di elevata qualità, per un lungo funzionamento senza operazioni di manutenzione, permette di selezionare la temperatura tra i -2° e i +15°, a seconda delle esigenze applicative.

Timer elettronico, preimpostabile tra i 10 secondi e i 30 minuti, fornisce istante per istante l'indicazione del tempo mancante al termine del trattamento di centrifugazione.

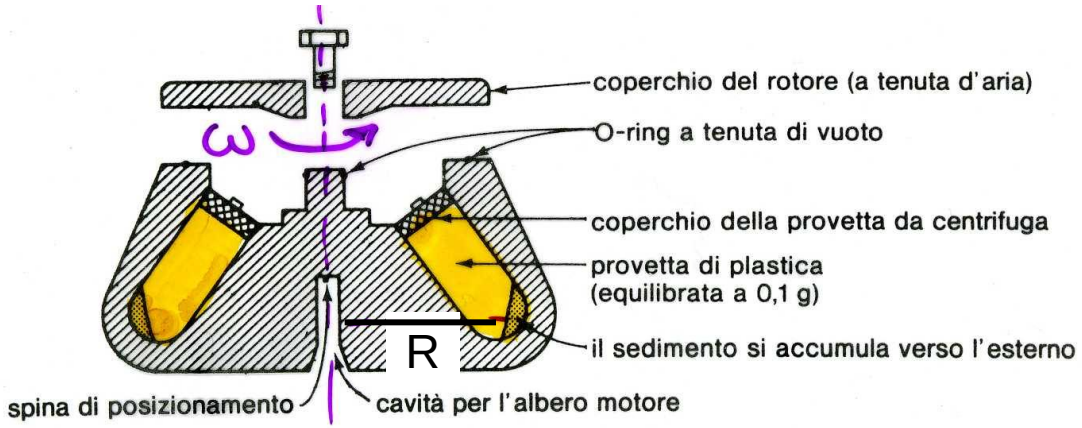
Centrifuga (2)



T. Svedberg
PN chim 1926

per 30k giri/min
$\omega^2 R = 1.5\ 10^6\ ms^{-2}$
m=1g pesa 1500 N !

Volume utile provetta limitato $\propto (1/\omega)^2$



Regimi laminare e turbolento: n.ro di Reynolds

- per v piccola si ha scorrimento laminare del fluido in un tubo di flusso o relativamente ad un corpo
- per v grande lo scorrimento diviene turbolento con presenza di scia e vortici
- si costruisce una lunghezza tipica del fluido in moto: $\eta/\rho v$ dove ρ, η sono del fluido, v è la velocità del corpo o quella media del fluido
- il rapporto fra l, una lunghezza tipica del corpo o del condotto, e questa lunghezza è il numero di Reynolds

$N_R = \rho v l/\eta$ (adimensionale)

che permette di distinguere i due regimi: N_R piccolo (grande) corrisponde al regime laminare (turbolento), con limiti che sono diversi nei due casi (fluido o corpo in moto)

Numero di Reynolds (2)

- per un corpo in moto nel fluido con N_R piccolo la f. viscosa è data da kηlv, forza di Stokes; se il c. è sferico l=2a e $N_R < 0.4$ corrisponde al regime laminare, mentre $N_R > 2000$ implica regime turbolento, con una f. resistente $\propto v^2$; per valori intermedi si ha instabilità
- per un fluido che scorre in un condotto di sez. circolare l=2a, diametro del condotto, con velocità media $\underline{v}$,

  $N_R = 2\rho \underline{v} a/\eta$

  e si ha moto laminare per $N_R < 1000$, mentre il flusso diviene vorticoso per $N_R > 3000$; il valore critico è ~2300, ma per valori fra 1000 e 3000 i risultati sperimentali sono instabili

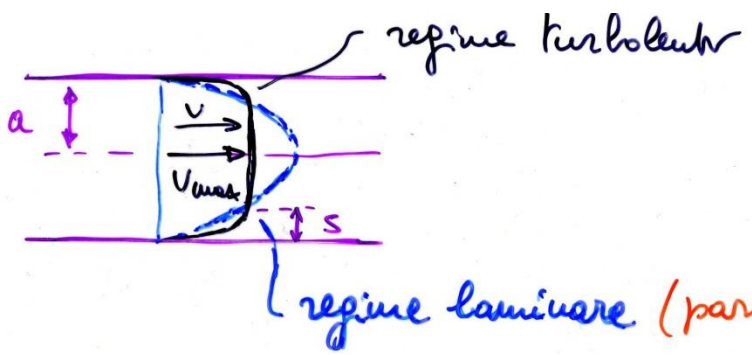
Numero di Reynolds (3)[*]

- N_R può essere visto come rapporto fra f. inerziali e viscose nel fluido: quando prevale la f. viscosa il regime è laminare e viceversa
- il moto è stazionario, v = cost; m/t non è altro che ρQ e

  $F_i = \Delta(mv)/\Delta t = v\Delta m/\Delta t \approx v(\rho A v) = \rho A v^2$ (forza inerziale)
- usando la def. di viscosità (o usando Poiseuille)

  $F_v \approx A'\eta v/l$ (forza viscosa)

  con l lunghezza tipica
- $F_i/F_v \approx \rho A v^2/(A'\eta v/l) \approx \rho v l/\eta = N_R$



$F_a \propto \underline{v}^2$

$s = \eta/(2\rho v)$

$F_a \propto \underline{v}$

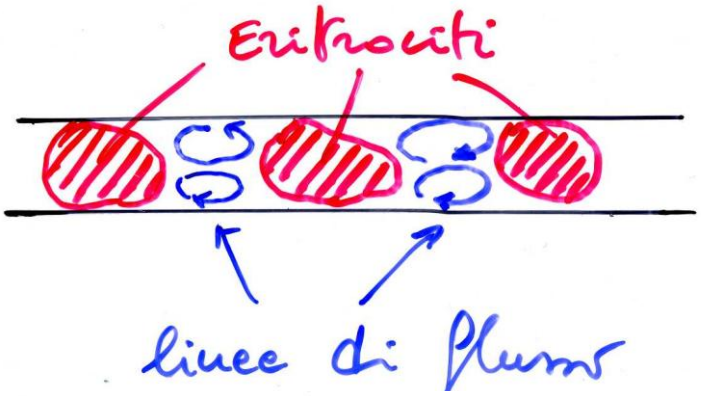
[*] facoltativo

Un liquido non newtoniano: il sangue

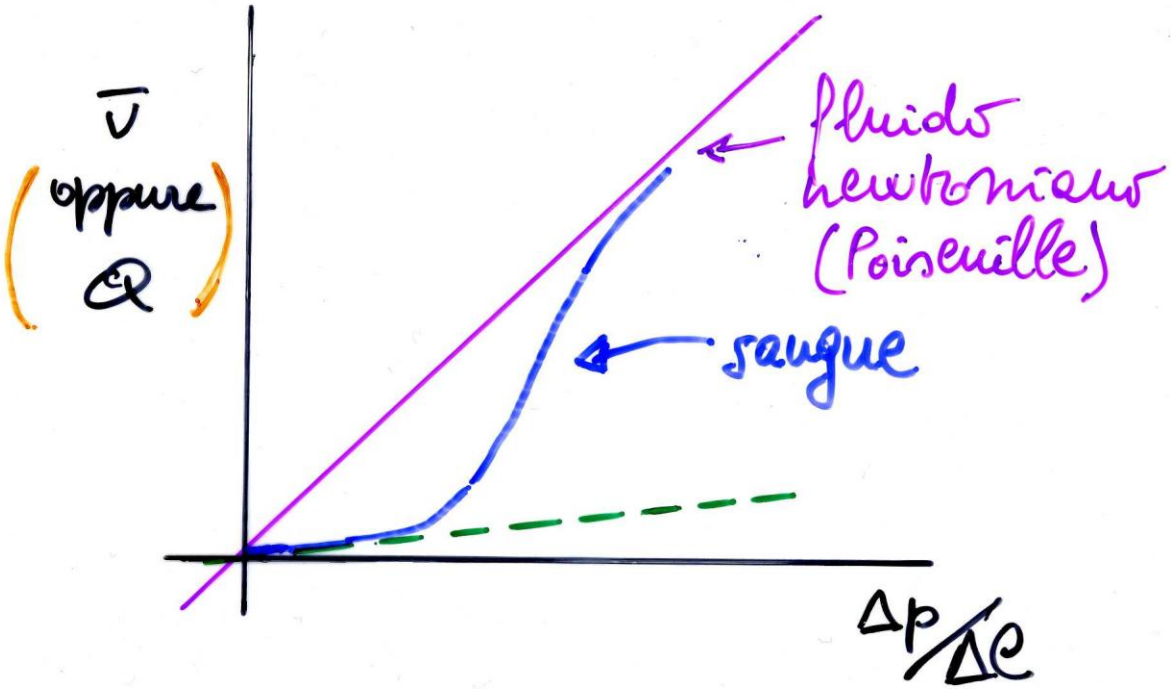
- il s. è un liquido complesso, soluzione acquosa di elettroliti e non elettroliti, globuli rossi (8 μm Ø, 2 μm spessore) e bianchi in sospensione, particelle colloidali (proteine)
- η decresce poco all'aumentare degli elettroliti, aumenta molto all'aumentare di corpuscoli e part. colloidali
- a θ = 37 °C, $\eta_{\mathbf{siero}}$ ~ 1 cP; η_{sangue} ~ 4 cP
  (cfr η_{H2O} = 0.7 cP)
- η decresce con θ che aumenta (febbre): ~3%/grado → facilita la circolazione
- disordini circolatori e ipertensione: η ↗, aumenta $\mathcal{L}_{cuore}$
- situazioni patologiche: varia η → VES+conteg.corpusc.

Viscosità del sangue

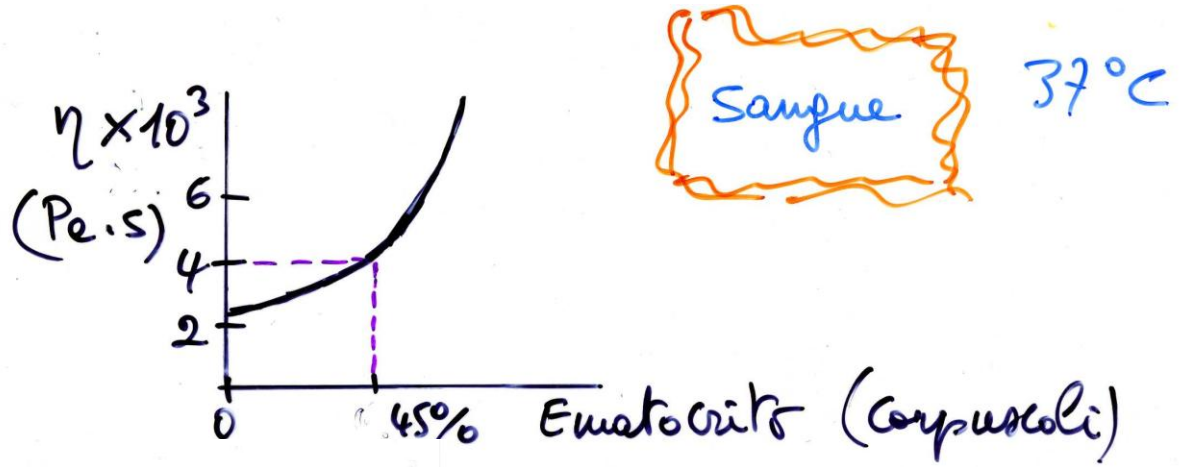
- gli eritrociti passano appena nei capillari, fino a ~8 μm Ø

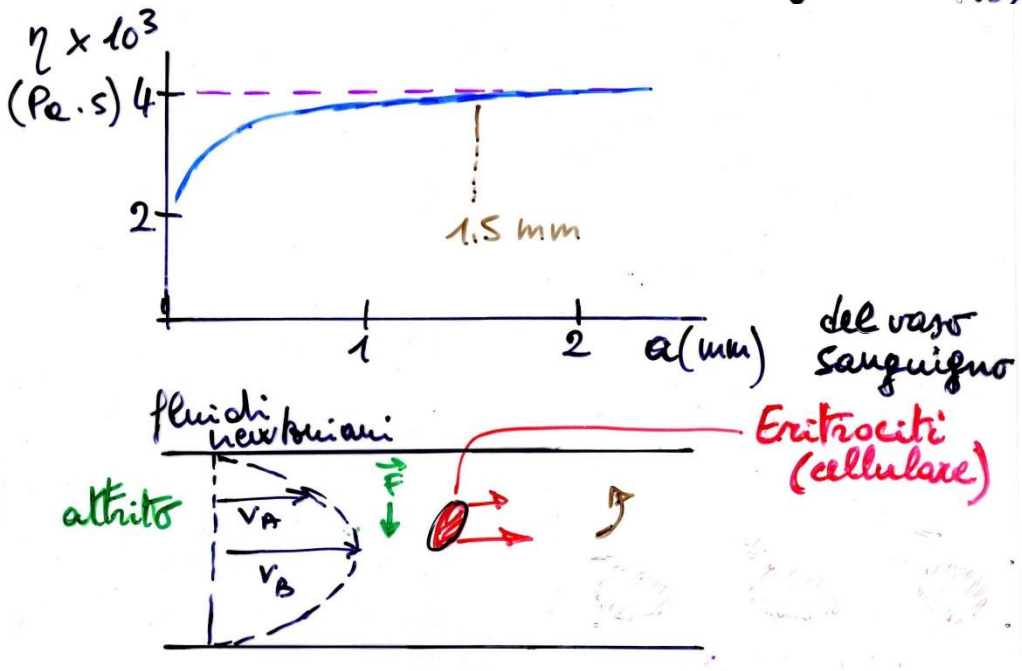


- η varia al variare del gradiente di pressione a differenza di un fl. newton.



Viscosità del sangue (2)(*)

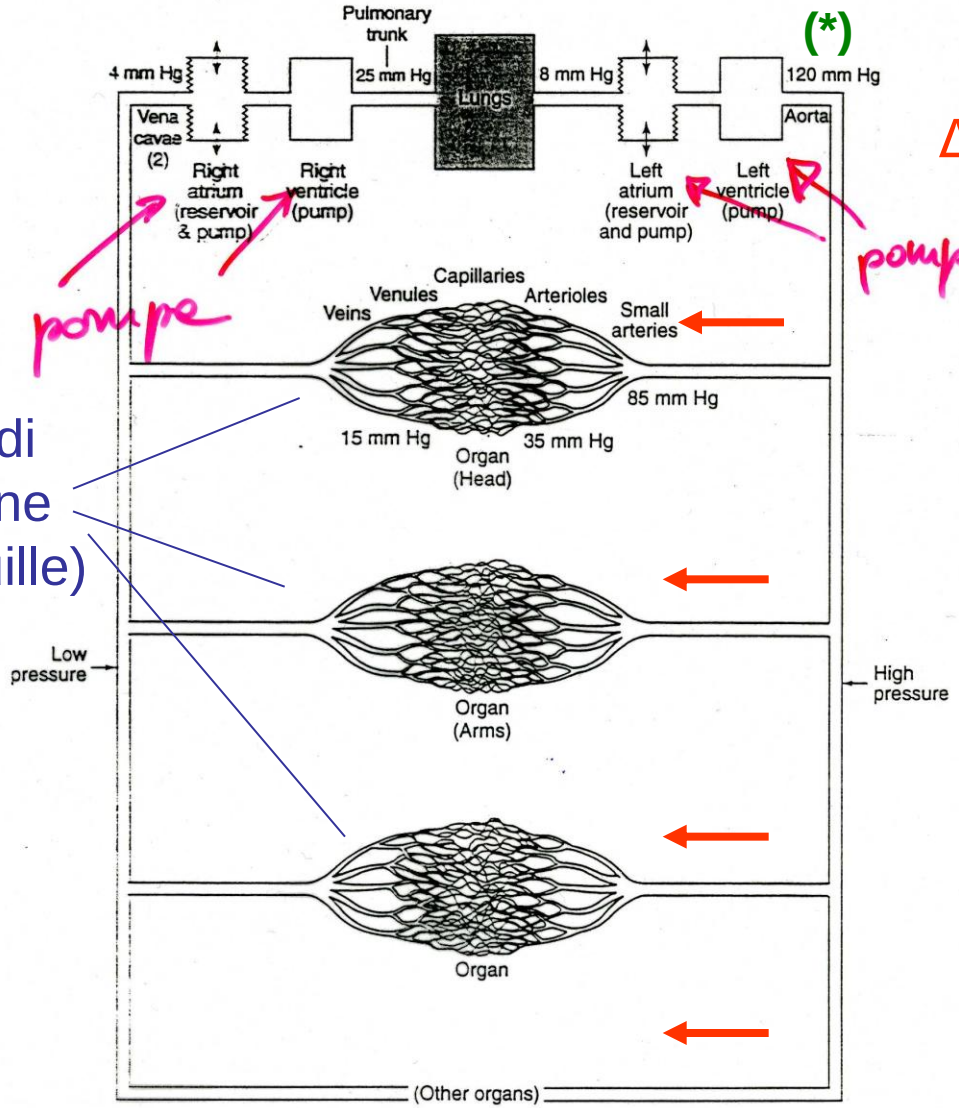




l'allineamento dei corpuscoli giustifica il comportamento di η con la pressione

(*) facoltativo

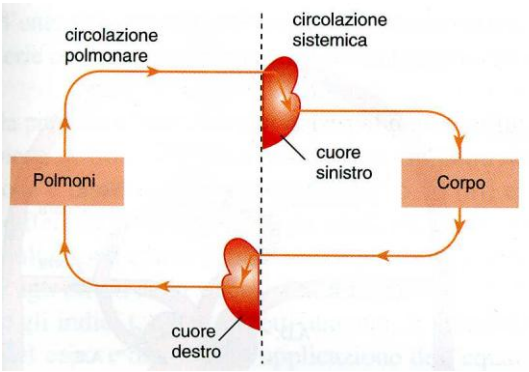
Circolazione del sangue(*)



(*)

$\Delta p \approx 150$ mbar

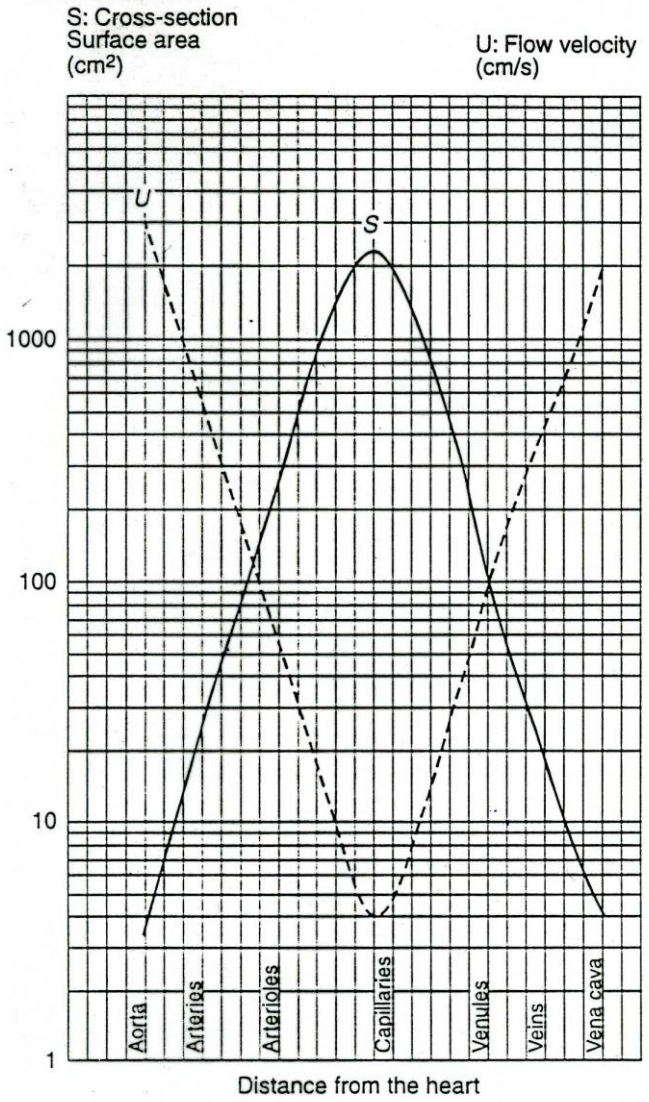
caduta di pressione (Poideuille)



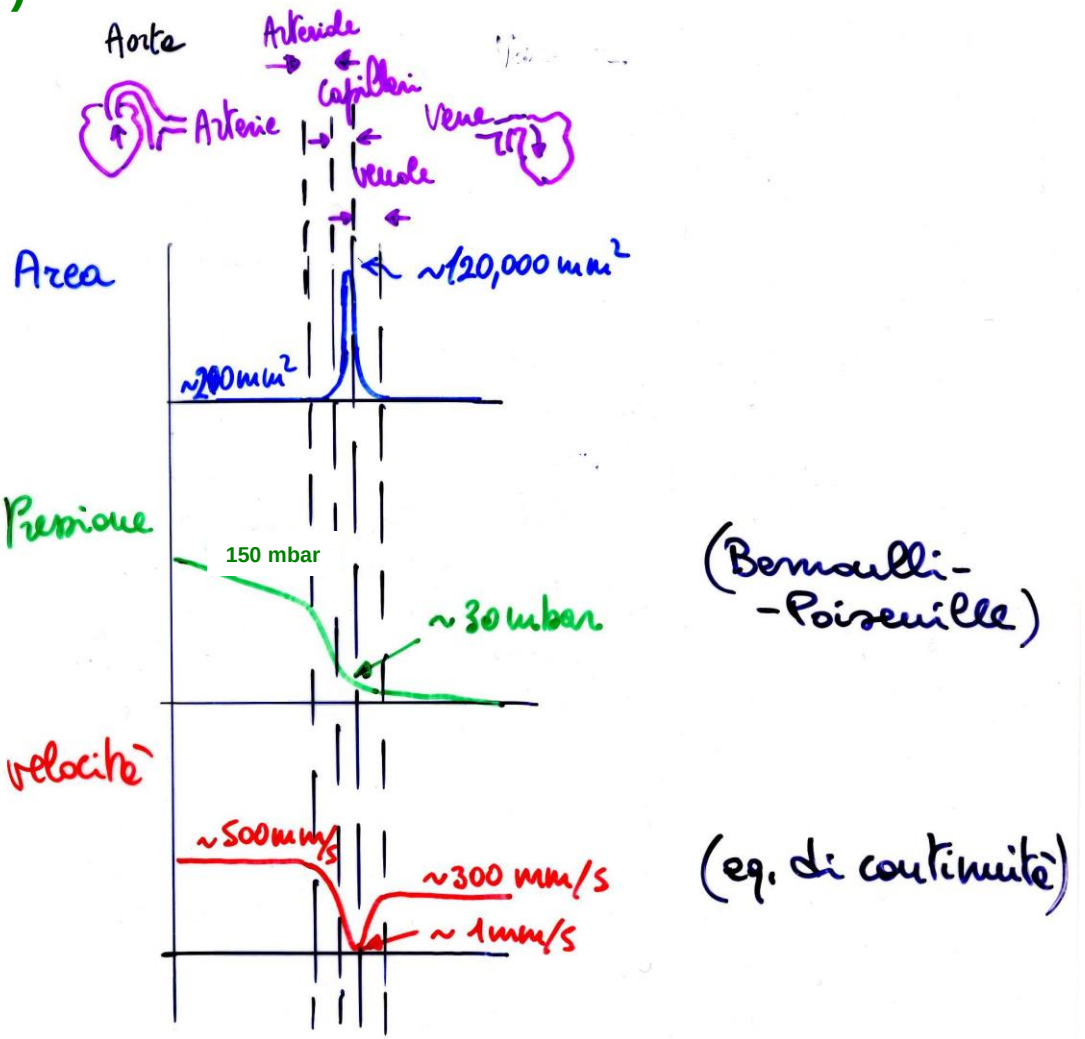
(*) da Tuszynski and Dixon, Biomedical applications of introductory physics, Wiley

(*) facoltativo

Circolazione del sangue[+]



(*)



[+] facoltativo

(*) da Tuszynski and Dixon, op. cit.

Pressione arteriosa

- i valori di p sono sempre relativi alla p. esterna
- in corrispondenza delle arterie del capo, torace e piedi (c,t,p): p è la stessa per una persona sdraiata, molto diversa se in piedi – trascurando la viscosità si ha:

  $p_c + \rho g y_c + \frac{1}{2}\rho v_c^2 = p_t + \rho g y_t + \frac{1}{2}\rho v_t^2 = p_p + \rho g y_p + \frac{1}{2}\rho v_p^2$

  i termini cinetici $\frac{1}{2}\rho v^2$ sono piccoli [$\rho = 1050$ kg/m^3, aorta, $v \sim 0.3$ m/s, $\frac{1}{2}\rho v^2 \sim 47$ Pa ~ 0.5 mbar $<<$ 150 mbar],

  quindi

  $p_c + \rho g y_c = p_t + \rho g y_t = p_p + \rho g y_p$
- se la persona è sdraiata $p_c \approx p_t \approx p_p$ $\quad (y_c \approx y_t \approx y_p)$
- se la persona è in piedi interviene la p idrostatica

Pressione arteriosa e lavoro del cuore

- persona in piedi (1 torr = 1 mmHg = 133 Pa)

  $p_c = p_t + \rho g(y_t - y_c)$; $p_p = p_t + \rho g(y_t - y_p)$

  ad es. $y_t - y_c = -40$ cm, $y_t - y_p = +130$ cm

  $\rho g(y_t - y_c) = -1050 \cdot 9.81 \cdot 0.4$ Pa $= -4120$ Pa ≈ -30 torr

  $\rho g(y_t - y_p) = +13/4\ 30$ torr $\approx +100$ torr

  $p_t = 100$ torr $\rightarrow p_c = 70$ torr, $p_p = 200$ torr

- (*)lavoro del cuore (V pompato nell'aorta e nell'a. polmonare)

  $\mathcal{L} = Fs = pAs = pV$; $\mathcal{L}' = p'V$; $\mathcal{L}_{tot} = (p+p')V$

  $p+p' = 120$ torr $= 1.6\ 10^4$ Pa

  $Q \approx 5$ l/min $\rightarrow V = 5$ l/min $1/75$ min $= 0.07$ l $= 7\ 10^{-5}$ m^3

  $\mathcal{L}_{tot} = 1$ J ; $\mathcal{P} = \mathcal{L}_{tot}/t = 1$ J$/0.8$ s $= 1.2$ W

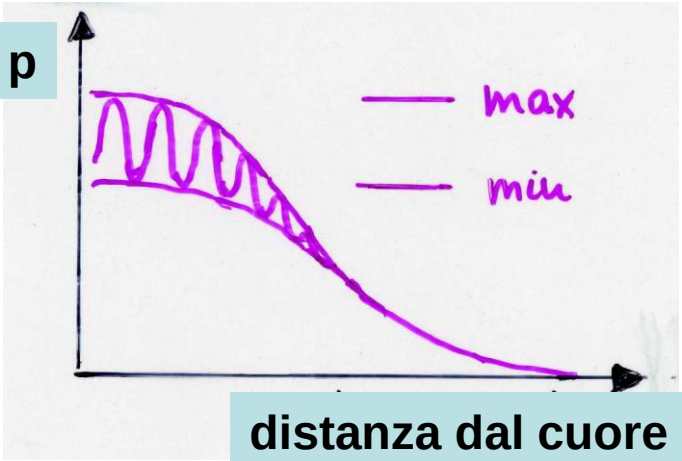
  in realtà il lavoro è maggiore di quello utile calcolato (5.5 W)

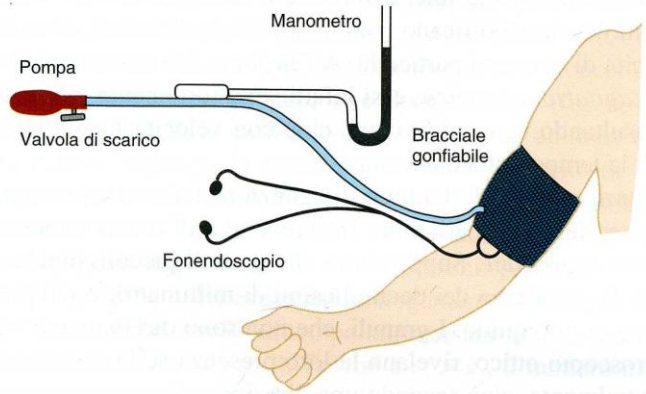
(*) facoltativo

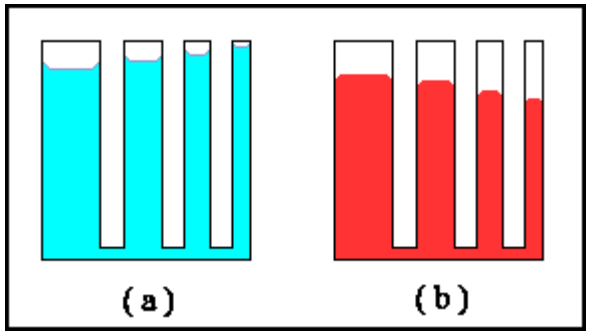
Misura della pressione arteriosa

- in un'arteria $N_R = 2\rho \underline{v} a/\eta = 2\rho Q/(\pi\eta a)$ è < 1000, flusso laminare, silenzioso
- se aumento v (riducendo a, senza ridurre Q) aumenta $N_R \rightarrow$ flusso vorticoso $\rightarrow$ rumore
- se chiudo l'arteria il rumore cessa – la p corrisponde a quella sistolica (max)
- lasciando riaprire l'arteria quando il moto ridiviene laminare la p corrisponde a quella diastolica (min)

Stephen Hales







Fenomeni molecolari in meccanica dei fluidi

- Diffusione
- Tensione superficiale

Agitazione termica nei fluidi: diffusione(*)

- ad es. goccia di soluzione colorata in un liquido, il colore diffonde col tempo; gas in un altro gas; O_2 + sostanze nutrienti → cellule → scorie

- diffusione: conseguenza diretta del moto termico casuale delle molecole (vedi teoria cinetica)

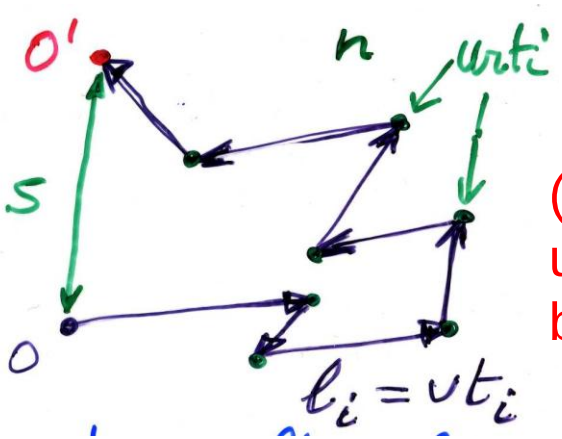
  v - velocità media termica

  $\underline{\ell}$ - cammino libero medio

  si trova: $s = \underline{\ell}\sqrt{n}$

  $L = \Sigma_i l_i = n\,\underline{\ell} = s^2/\underline{\ell}$

  $t = L/v = s^2/(v\,\underline{\ell})$



(random walk, ubriaco, moto browniano)

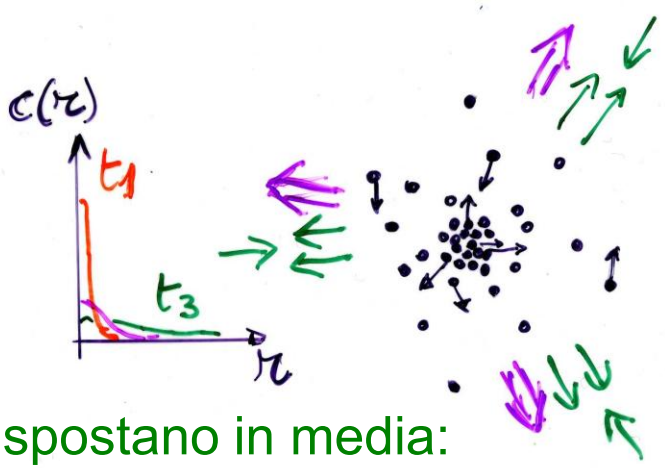
H_2O liq. $\underline{\ell} \sim 10^{-10}$ m, $v \sim 10^2$ m/s

s = 1 cm t = 10^4 s; s = 10^{-3} cm t = 10^{-2} s

(*) solo le conclusioni

Concentrazione e diffusione

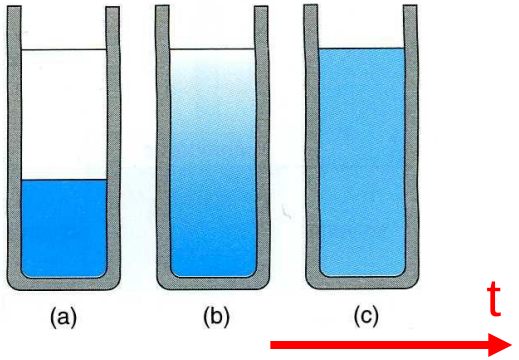
- c = m/V concentrazione (= m di soluto/V di soluzione), omogenea con una densità, in kg/m^3
- la diffusione è evidenziabile quando si parte da una concentrazione non uniforme: al passare di t c'è la tendenza all'uniformità
- il risultato dipende, fra l'altro, dalla geometria: ad es. una concentrazione 'puntiforme' diffonderà sfericamente: la v media è la stessa, le molecole migreranno più numerose da dove c è maggiore

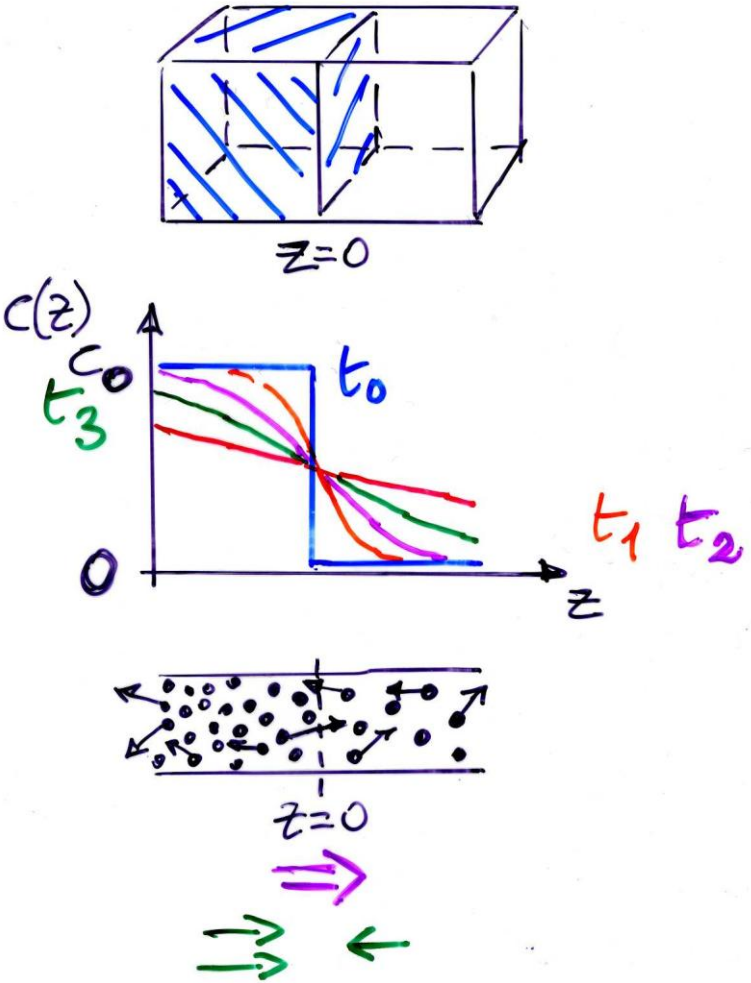


→ si spostano in media: è un processo statistico

Concentrazione e diffusione (2)

- cambiando la geometria
  il fenomeno resta lo stesso
  ma variano le apparenze
- le molecole migrano tutte casualmente: quelle che si trovano dove c è maggiore migrano in maggior numero
- figure: espansione di un gas nel vuoto, soluzione separata inizialmente dal solvente





le m. si spostano in media:
è un processo statistico

Fenomeni di trasporto(*)

1. scorrimento viscoso (à la Poiseuille)
2. diffusione
3. conduzione del calore (vedi oltre)
4. corrente elettrica (vedi oltre)

sono tutti fenomeni di trasporto, descrivibili con leggi analoghe: alla radice dei fenomeni c'è un gradiente, variazione per unità di distanza, o una differenza (rispettivamente: pressione, concentrazione, temperatura, potenziale elettrico) che genera il trasporto (rispettivamente: fluido, soluto, calore, carica elettrica)

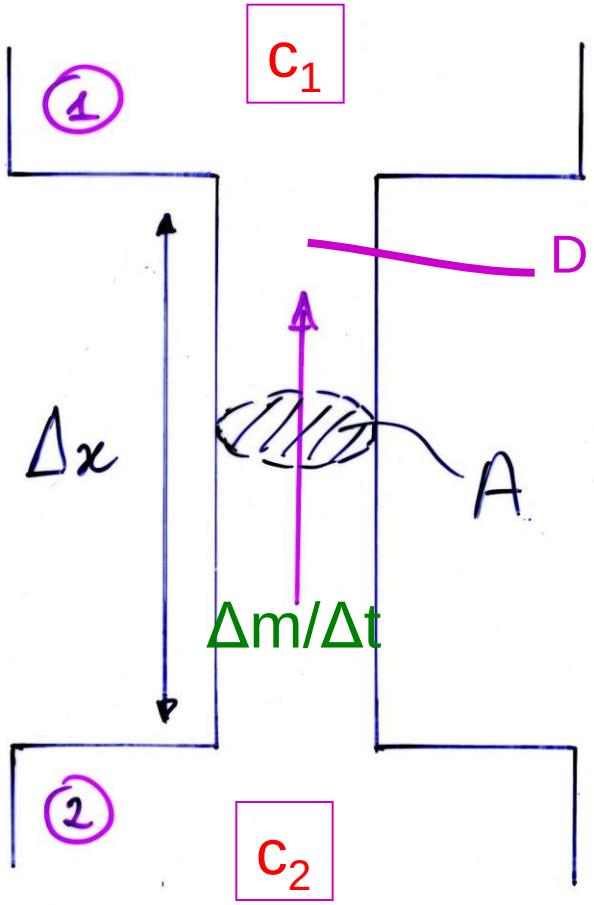
- ci limitiamo al caso stazionario, gradienti cost.

(*) facoltativo

Diffusione: legge di Fick

- diffusione in una soluzione: trasporto di materia fra due regioni a conc. diversa (caso stazionario, valori costanti nel tempo, 'serbatoi'): da c_2, maggiore, a c_1, minore
- D = D(soluzione, T, c) è il coefficiente di diffusione $[D] = [L^2T^{-1}]$ unità: m^2/s
- **legge di Fick** (1855)

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = -DA\frac{\Delta c}{\Delta x}$$



$\Delta c = c_2 - c_1$

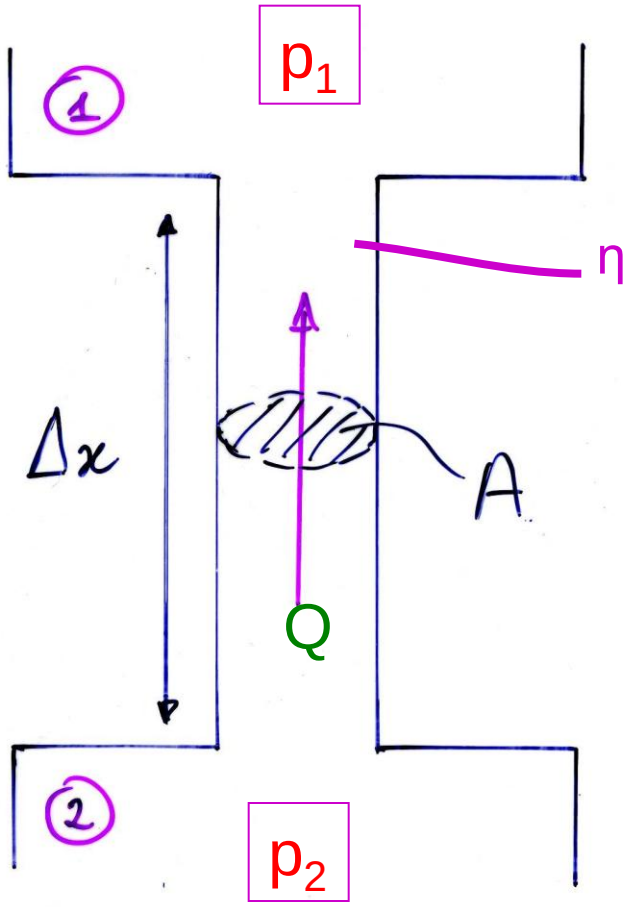
cfr.: moto di un fluido viscoso

- riscriviamo la legge di Poiseuille (1842) per lo scorrimento viscoso in un capillare di area $\perp$ $A = \pi a^2$

$$Q = \frac{\pi a^4}{8\eta}\frac{\Delta p}{\Delta x} = \left(\frac{a^2}{8\eta}\right) A \frac{\Delta p}{\Delta x}$$

  sono evidenti le analogie con la legge di Fick

- la legge di Poiseuille descrive il trasporto di fluido fra due regioni a p diversa - p_1,p_2 cost. – $\eta = \eta$(fluido, T, Δp)

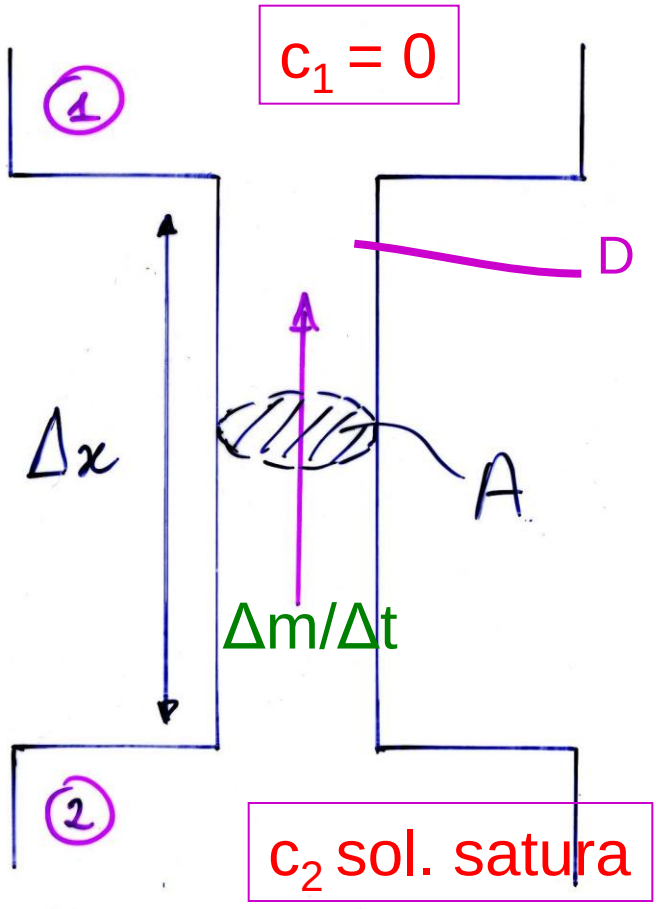


$\Delta p = p_2 - p_1$

Un esempio di diffusione stazionaria(*)

- nella cella di Clack (1924) ad es., c_2 corrisponde ad una soluzione satura, un sale in equilibrio con la soluzione, c_1 a puro solvente (un flusso di H_2O che rimuove il soluto)
- $$D = \frac{\Delta m/\Delta t}{\Delta c/\Delta x}\frac{1}{A}$$

  $\Delta c/\Delta x$, costante, si misura con metodi ottici [n = n(c)]



$\Delta c = c_2 - c_1$

(*) facoltativo

Coefficiente di diffusione(*)

- la formula di Stokes-Einstein vale per le soluzioni liquide e dà la dipendenza da T e dal raggio a

$D = k_B T/(6\pi\eta a)$ (ma si ricordi che $\eta = \eta(T)$!)

- per molecole sferiche di soluto

$M = 4/3\pi a^3 \rho \propto a^3$

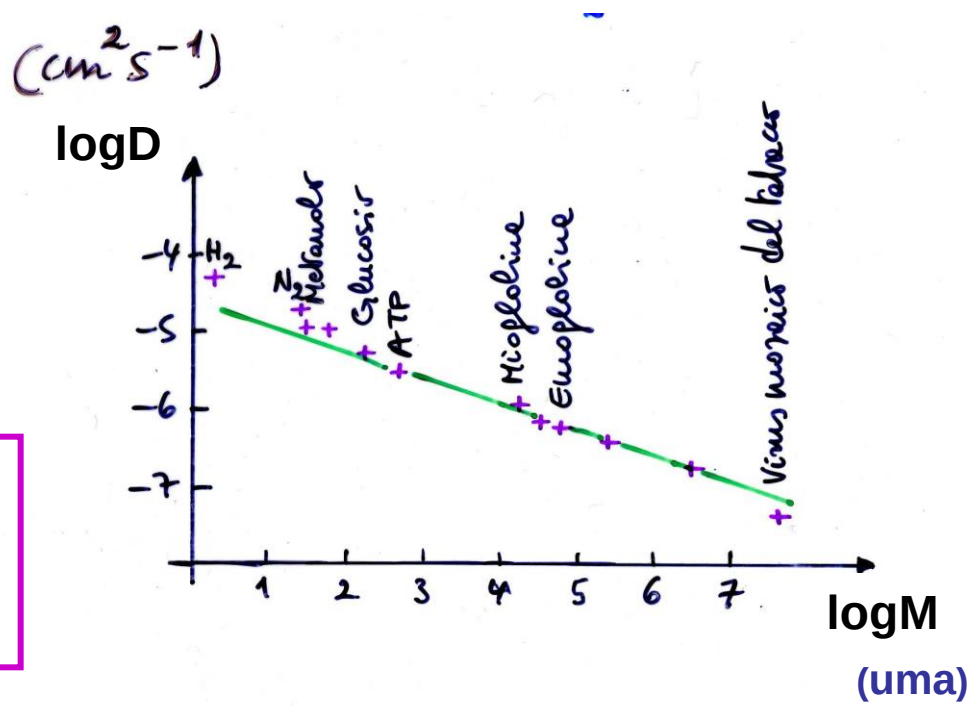
e, a parità di solvente,

$D \propto (M)^{-1/3}$

$\ln D \propto -1/3 \ln M$

- D in m^2/s (in H_2O 20 °C)

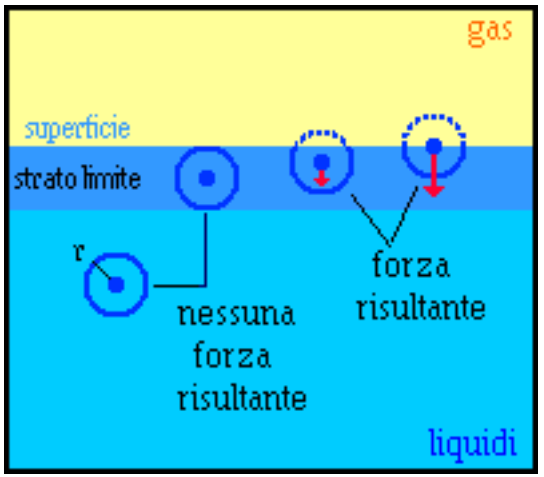
glucosio	180 uma	$5.7 \cdot 10^{-10}$
emoglobina	64 kuma	$6.3 \cdot 10^{-11}$
v.mosaico t.	$4.1 \cdot 10^7$ uma	$4.6 \cdot 10^{-12}$



(*) facoltativo

Tensione superficiale

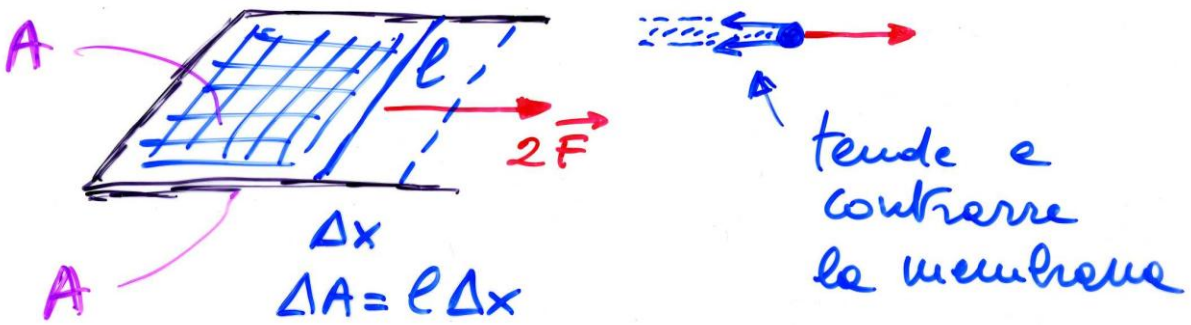
- forze molecolari (di natura el.magn., attrazione)
  - coesione: f. fra mol. della stessa specie
  - adesione: f. fra mol. di specie diverse
- mol. all'interno di un liquido: f. bilanciate (mol. libere di muoversi)
- mol. sulla superficie: risultante diretta all'interno (f. di richiamo, entro il raggio d'azione)



- agitazione termica: mol. in superficie con molta energia possono superare il r. d'azione della sup. ed evaporare
- superf. libera dei liquidi → minima (f. di richiamo)
- ad es. liquidi immiscibili di uguale ρ: gocce di forma sferica (sfera, solido di minima A fra tutti, a parità di V)

Tensione superficiale (2)

- lamina liquida in aria (telaio con lato mobile)

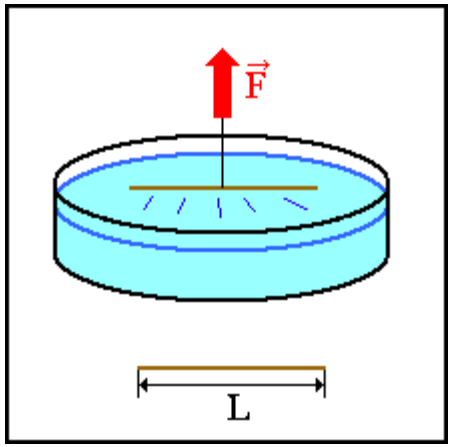


- per aumentare la sup. A di ΔA occorre un lavoro $\Delta\mathcal{L}$

  $\Delta\mathcal{L}/2\Delta A = 2F\Delta x/2\Delta A = F/l = \tau$

  tensione superficiale
- altro es. per sollevare un aghetto (o una moneta leggera) appoggiato sulla sup. di un liquido occorre fornire una f.

  $F = mg + 2\tau L > mg$



Tensione superficiale (3)

- la tensione superficiale è quindi un lavoro per unità di superficie oppure una forza per unità di lunghezza
- $[\tau] = [\mathcal{L}/A] = [F/l] = [MT^{-2}]$
- unità SI: 1 N/m = 1 J/m^2

  CGS: 1 dyne/cm = 1 erg/cm^2 =

  $= 10^{-7}$ J/10^{-4} m^2 = 10^{-3} J/m^2
- τ dipende da T e dai fluidi a contatto

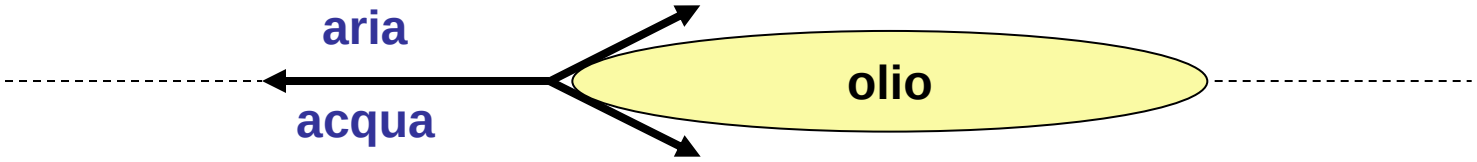
  aria-H_2O 20 °C τ = 0.073 N/m (= J/m^2)

  aria-H_2O 40 °C τ = 0.069 N/m

  olio-H_2O 20 °C τ = 0.032 N/m (bassa, come per altri liquidi organici)

Tensione superficiale (4)

- τ dipende dalla purezza del liq. e della sup. (l'aggiunta di tensioattivi, saponi, detersivi, diminuisce molto τ)
- lamine sottili: goccia d'olio su H_2O



siccome $\tau_{ar\text{-}ac} > \tau_{ar\text{-}ol} + \tau_{ac\text{-}ol}$ anche $F_{ar\text{-}ac} > F_{ar\text{-}ol} + F_{ac\text{-}ol}$, non c'è equilibrio e la goccia tende a formare una macchia molto sottile

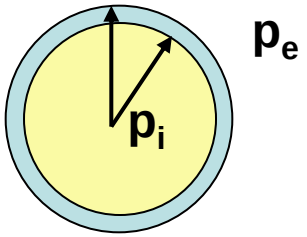
- (*) semplice esperienza casalinga: bacinella di H_2O (pura), talco spruzzato, una goccia d'olio di volume V (si misura r con una lente prima di lasciarla cadere), si misura poi il R della macchia d'olio: $d(\text{spessore della macchia d'olio}) = V/(\pi R^2)$

  → d risulta molto piccolo, al limite diametro di una molecola di olio

(*) facoltativo!

Lamine curve: legge di Laplace(*)

- consideriamo una bolla di acqua saponata (τ = 0.025 N/m, bolle più facili): la sup. tenderà a contrarsi → $p_c = p_i - p_e$ che si trova dal lavoro necessario per gonfiare la bolla di $\Delta V = A\Delta r$



$\Delta\mathcal{L} = F\Delta r = p_c A\Delta r = p_c 4\pi r^2 \Delta r$

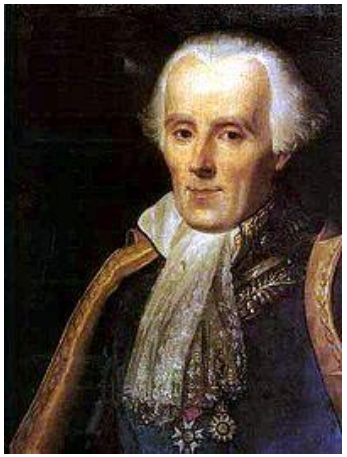
ma anche (2 sup.)

$\Delta\mathcal{L} = 2\,\tau[4\pi(r+\Delta r)^2 - 4\pi r^2] \sim 16\,\tau\,\pi r\Delta r$ $\quad (\Delta r << r)$

da cui

$\boxed{p_c = 4\,\tau/r}$

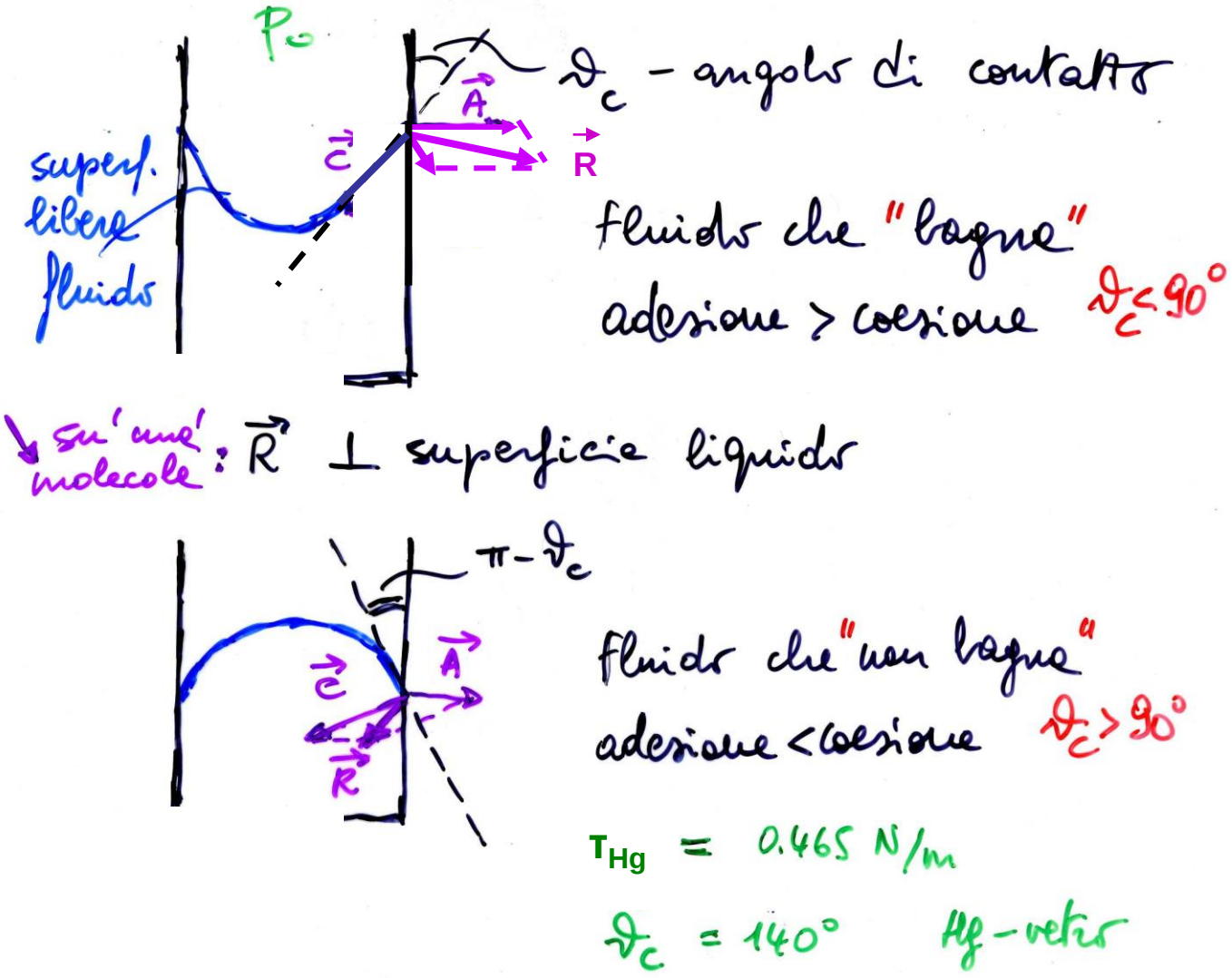
($p_c = 2\,\tau/r$ per una superficie sola) legge di Laplace



(*) solo formule finali

Forze di adesione e di coesione(*)

- liquido a contatto con una parete: le mol. saranno soggette a f. di adesione ($\vec{A}$) oltre che di coesione ($\vec{C}$)
- alternativamen. si possono considerare le $\tau_{liq-sol}$, $\tau_{sol-gas}$ e $\tau_{liq-gas}$: se $\tau_{sg} > \tau_{sl}$ (Ades. > Coes.) $\rightarrow \theta_c < 90^o$ etc.



(*) facoltativo

Fenomeni capillari, legge di Borelli-Jurin

G.A. Borelli

- in un capillare, se il liquido bagna le pareti, acqua, (non bagna, Hg) → innalzamento (abbassamento)
- si usa la legge di Laplace (1 sup.)

$p_0 - p_1 = 2\tau/a = 2\tau\cos\theta_c/r$

che uguaglia la p idrostatica

$\rho g h = 2\tau\cos\theta_c/r$

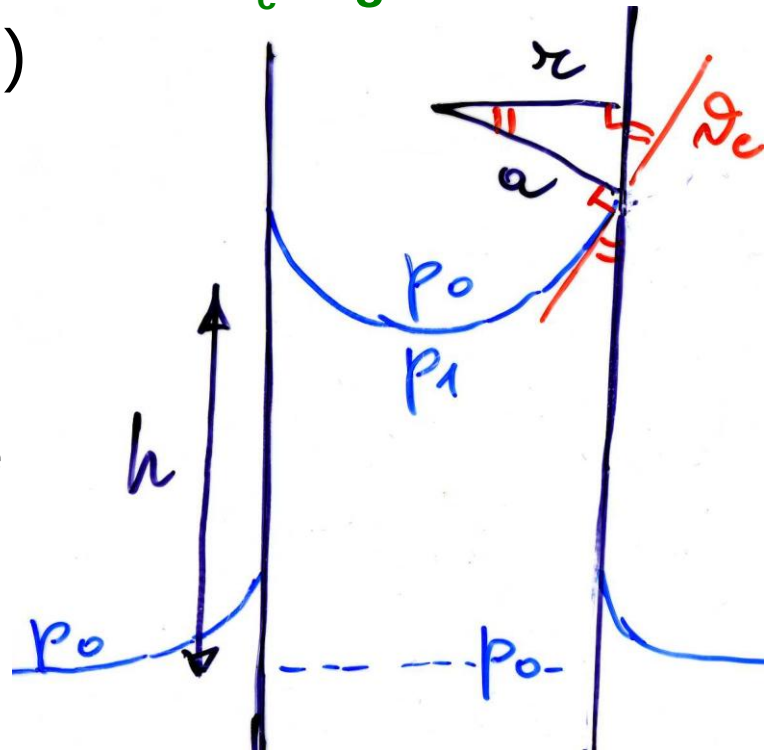
per cui l'innalza/abbassamento è

$h = 2\tau\cos\theta_c/\rho g r$

legge di Borelli-Jurin

$a = r/\cos\theta_c$

θ_c angolo di contatto



Fine della meccanica dei fluidi