



Elettromagnetismo



Corso di Fisica per CTF
AA 2006/07



Elettrostatica



Carica elettrica, preliminari

- la materia è costituita da atomi ($\emptyset \sim 1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$)
 - atomo: nucleo ($\emptyset \sim 10^{-15} \text{ m}$), composto di p e n, attorno a cui ruotano gli elettr., in numero uguale ai p
 - forza all'interno degli a.: attrattiva, gli el. che girano intorno al nucleo sono trattenuti da una f. centripeta
 - forza fra a.: si osserva sperim. che solidi e liquidi sono quasi incompressibili \rightarrow gli a. non possono essere avvicinati troppo: f. repulsiva
- \rightarrow non si può trattare della f. gravit., sempre attrattiva,
- \rightarrow nuova f. attrattiva fra el. e p, repulsiva fra el. ed el. (o fra p e p), nulla fra p e n (o fra el. e n), dovuta a una carica elettrica posseduta da el. e p, non da n

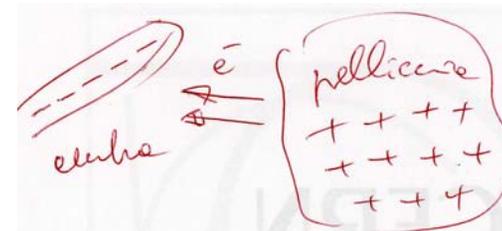
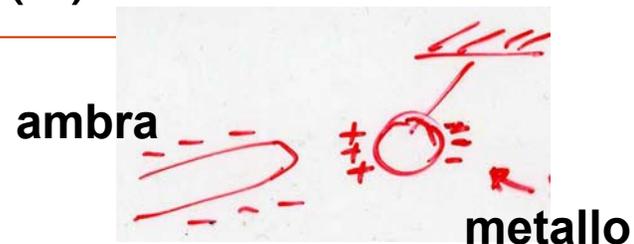


Carica elettrica

- f. elettrostatica: per avere sia attrazione che repulsione occorrono cariche di due segni + e –, quelle di segno opposto si attraggono, mentre quelle di segno uguale si respingono
- la materia ordinaria è neutra, contiene cioè tante cariche +ve quante –ve, e non esercita azioni elettrostatiche
- quando però ad un corpo si tolgono o si aggiungono cariche, le f. e.s. si manifestano: elettrizzazione ad es.
 - strofinando con una pelliccia o panno di lana/seta una bacchetta di ambra (ηλεκτρον in greco), ebanite, zolfo, vetro, plexiglas, ceramica ... si può attirare una pallina leggera sospesa ad un filo etc.
 - togliendosi una camicia sintetica ci si sente ‘elettrici’

Carica elettrica (2)

- si osserva
 - un'azione a distanza (vicinanze!)
 - elettrizzazione diversa: per convenzione (Bj. Franklin) –va quella dell'ambra, +va quella del vetro
- studio sperim. dell'elettrizzazione (triboelettricità):
 - **induzione e.s.**, un corpo carico attira uno scarico
 - la carica el. si può trasmettere per contatto, c'è passaggio da un corpo ad un altro: **si conserva**
 - corpi isolanti: l'elettrizzazione è localizzata
 - corpi conduttori: “ si propaga
 - in un conduttore in equilibrio, la carica si trova in superficie





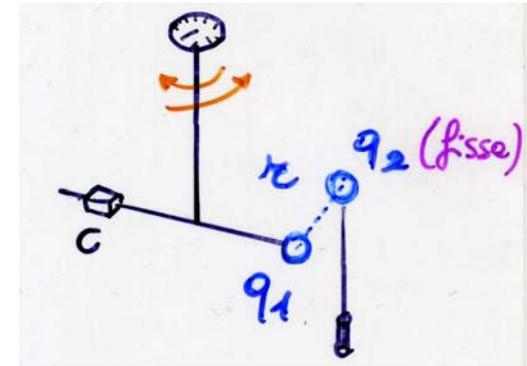
Carica elettrica e forza elettrostatica

- f. elettrostatica \propto carica (al prodotto delle cariche che interagiscono) (C. Coulomb)
“ $\propto 1/r^2$ “
- $\exists e^-$, carica $-e = -1.60 \cdot 10^{-19}$ C (J.J. Thomson)
- $\exists p$, “ $+e = -(-e)$ “
- la carica è quantizzata $\pm Ne$ (R.A. Millikan)
con N intero (quarks a parte, $\pm 1/3 e$, $\pm 2/3 e$)
- gli atomi sono neutri, $+Ze$ nel (E. Rutherford e
nucleo, $-Ze$ nella nuvola elettronica e N. Bohr)
- gli e^- interni sono ben legati, quelli esterni più asportabili

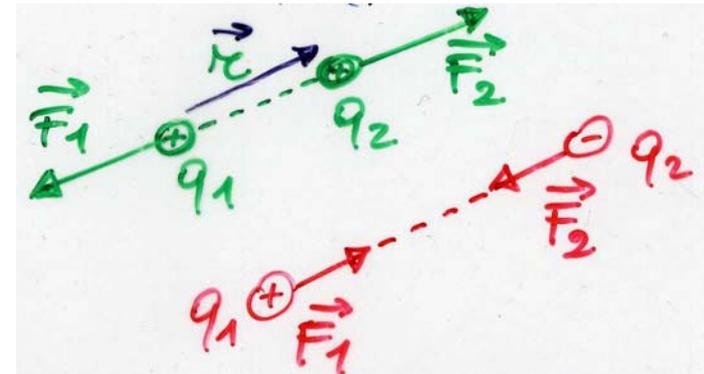


Forza elettrostatica, legge di Coulomb

- bilancia di torsione, cariche ~puntif.
($r_{\text{sferette}} \ll \text{distanza}$): es. con sferette uguali, per contatto, $q, q/2, q/4 \dots$ per induzione (e messa a terra), $-q, -q/2, -q/4 \dots \rightarrow$ 'azione a distanza' lungo r



- forza $F = kq_1q_2/r^2$ (cfr. grav.)
 - diretta lungo r
 - attrattiva fra car. di segno + -
 - repulsiva fra car. di segno ++, --
 - $k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 8.99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$ con q in coulomb (C), nel SI, caratterizza il mezzo: vuoto (~aria)





Confronto fra forze e.s. e gravit.

- nel SI in realtà si def. operat. l'unità di corrente (vedi oltre): 1 ampère (A) = 1 C/s → coulomb
- carica dell'el. $-e = -1.60217733(49) 10^{-19} \text{ C}$
- f. e.s. vs f. gravitazionali, es. in modulo fra due p

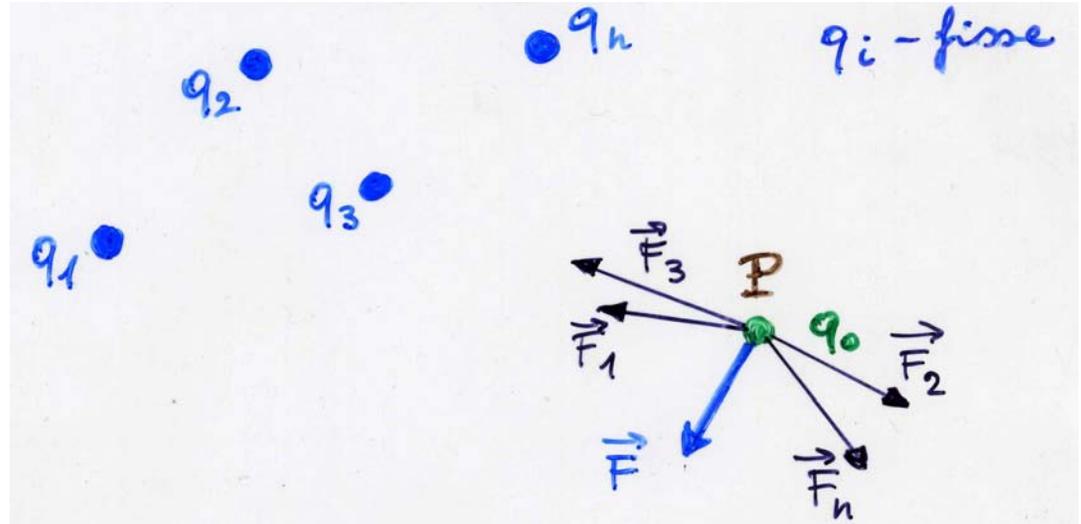
$$\begin{aligned} - F_e &= ke^2/r^2 && \propto r^2 && \text{nel rapporto} \\ - F_g &= Gm_p^2/r^2 && \propto r^2 && \text{"} \end{aligned}$$

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{ke^2}{Gm_p^2} = \frac{8.99 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2} \times (1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{6.67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^2 \times (1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})^2} = 1.24 \times 10^{36}$$

- rapporto enorme → gravitazione trascurabile a livello atomico e subatomico
- NB $\epsilon_0 = 8.85 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2)$ costante dielettrica del vuoto (ϵ - materiale; $\epsilon_r = \epsilon/\epsilon_0 > 1$ – relativa, vedi oltre)

Campo elettrico

- dato un sistema di n cariche fisse, una carica q_0 sentirà una forza $\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$
- distribuzione di q_i
→ \mathbf{F} nel punto P
- ciascuna $F_i \propto q_0$
→ $F \propto q_0 \rightarrow = E q_0$
- campo elettrico



$$\mathbf{E} = \mathbf{F}/q_0$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(P)$$

(si ottiene muovendo q_0)

– unità SI: newton/coulomb = N/C

- se il campo elettrico è noto

$$\mathbf{F}(P) = q\mathbf{E}(P)$$

è la f. che agisce in P su q

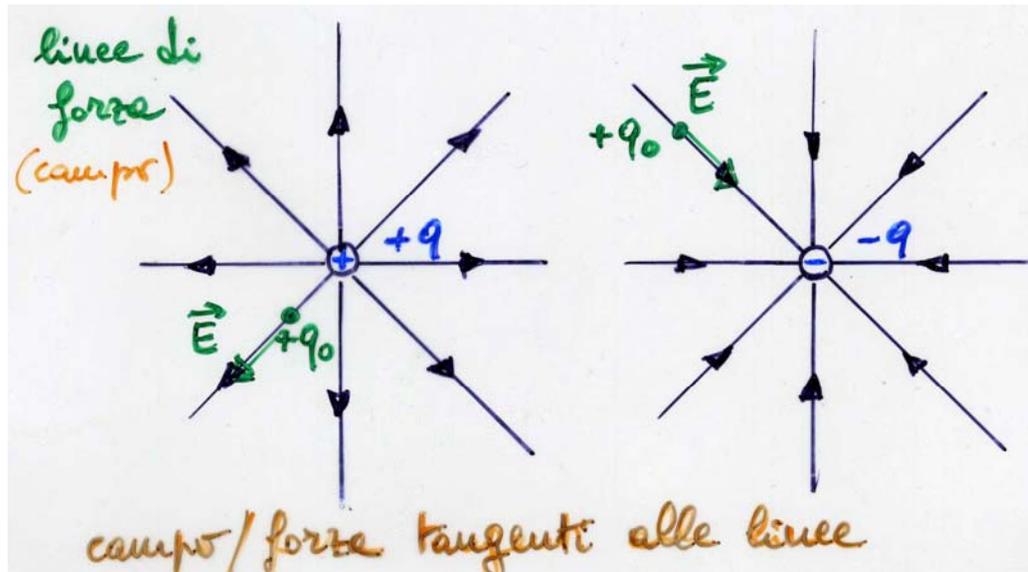


Campo elettrico di una carica puntiforme

- q nell'origine, q_0 a distanza r : componente di \mathbf{F} lungo r

$$F = k q q_0 / r^2$$

$$\rightarrow E = F / q_0 = (k q \cancel{q_0} / r^2) / \cancel{q_0} = k q / r^2 = (1/4\pi\epsilon_0) q / r^2$$



- campo el. rappresentato dalle linee di forza: più dense = campo più intenso



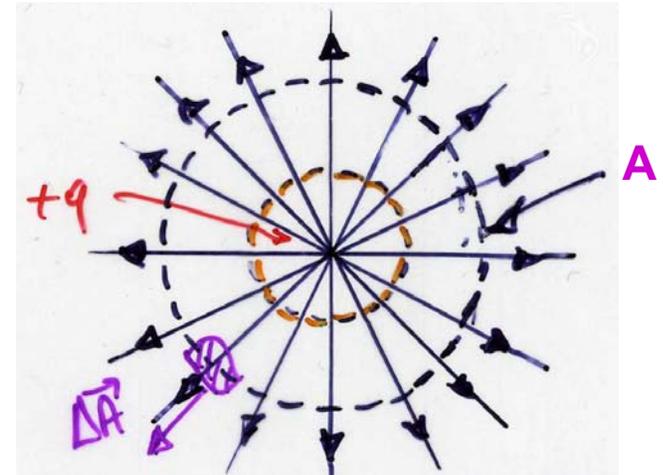
Linee di forza (o di campo)

- es. carica puntif. circondata da una sfera di raggio r ($A=4\pi r^2$)
- il n. di linee di \mathbf{E} che traversa A è lo stesso $\forall r$
- flusso di \mathbf{E}

$$d\Phi = E dA \quad (\text{sono paralleli})$$

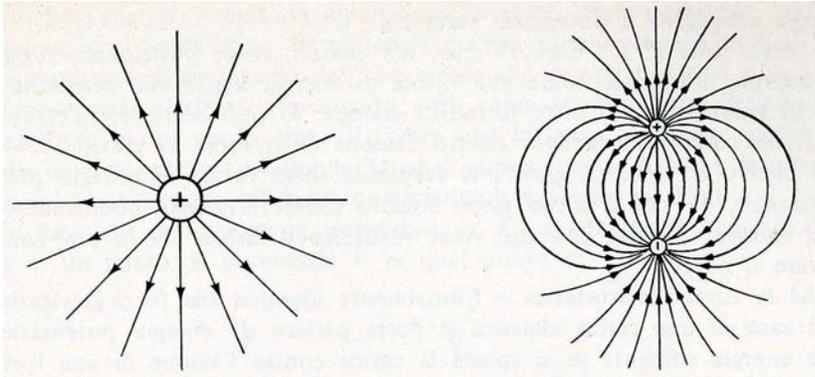
$$\Phi = EA = (kq/r^2)4\pi r^2 = 4\pi kq = q/\epsilon_0 \quad \forall r$$

- linee di forza
 - $N \propto AE$ densità di linee $N/A \propto E \propto q$
 - linee simmetriche, carica puntif.
 - originano da $+q$, finiscono in $-q$: non si intersecano mai, esclusi i poli (le cariche o sorgenti)

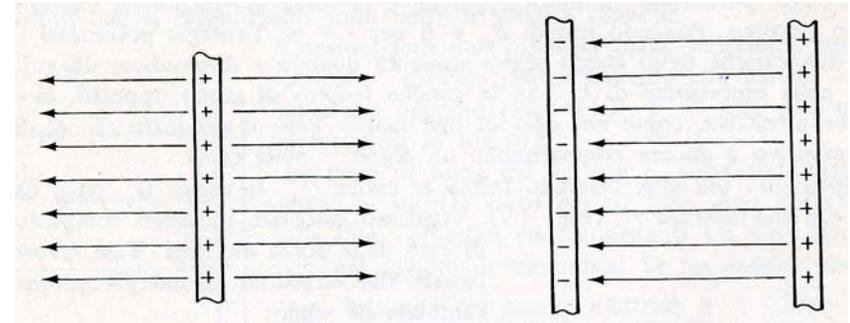


Linee di forza (2)

- distribuzioni di cariche e linee di campo

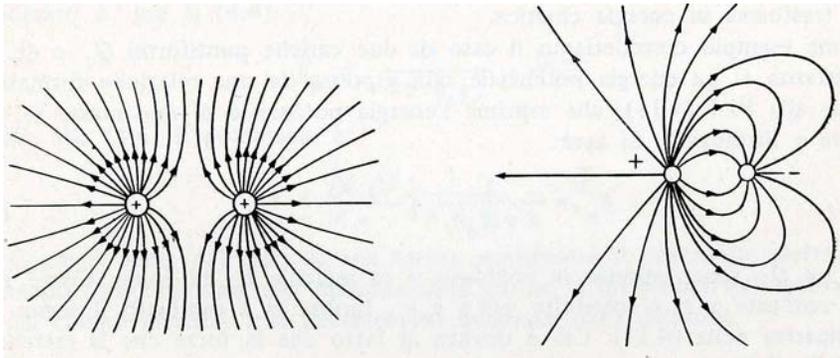


dipolo, +q, -q



piano carico

2 piani carichi



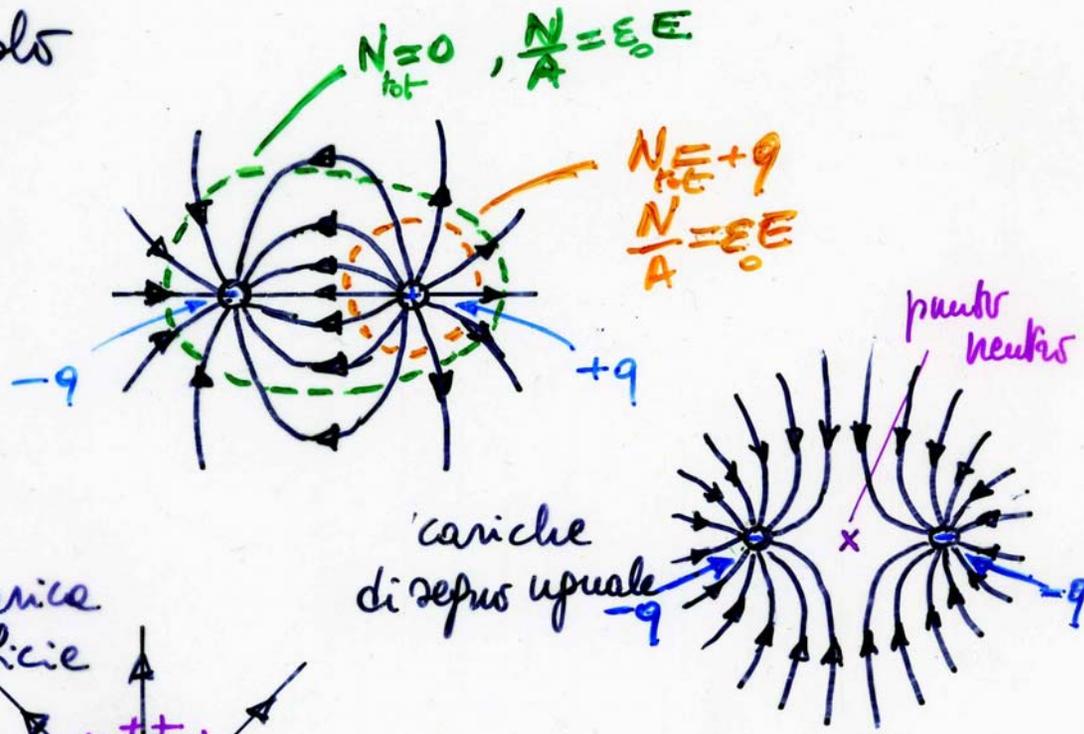
due cariche +q

+2q, -q

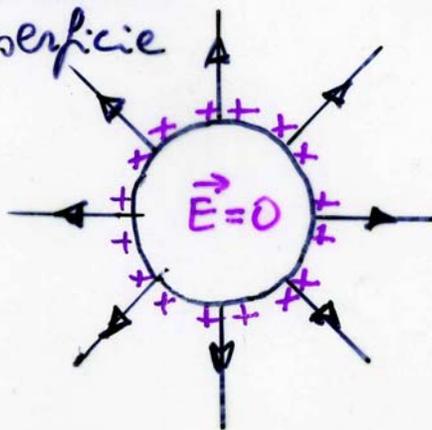
Linee di forza (3)

nel caso del dipolo
il flusso cambia a
seconda della scelta
della superficie chiusa

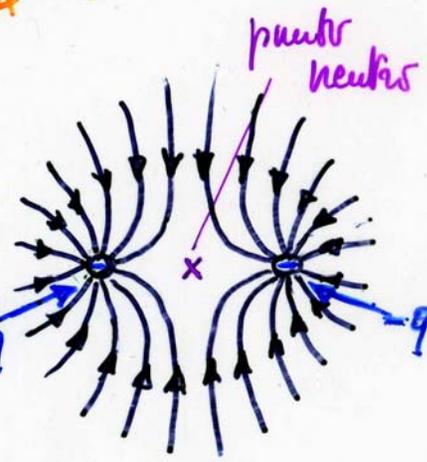
dipolo



sfera carica
da superficie



cariche
di segno uguale



carica in superficie
soltanto: altrimenti
le linee di E si
dovrebbero
incrociare fuori
dalle cariche

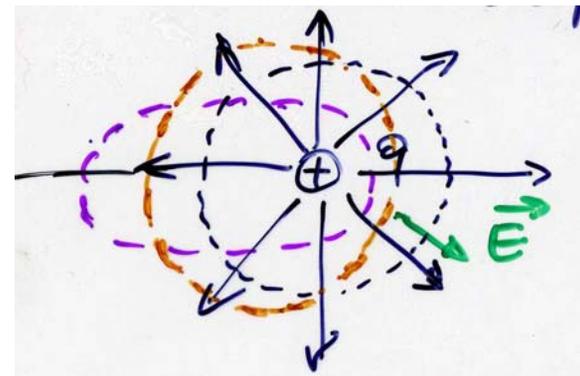
all'esterno $E = \frac{kQ}{r^2}$

all'interno $E = 0$



Teorema di Gauss

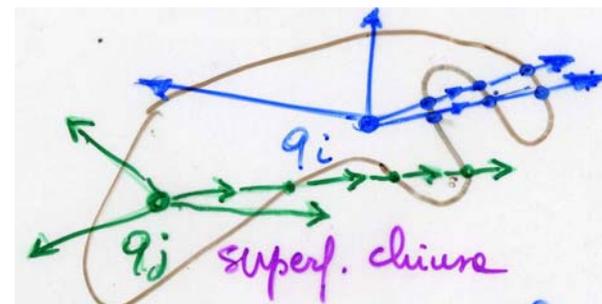
- es. carica puntif.: abbiamo già visto
 $\Phi(E) = EA = q/\epsilon_0$ sfera, $\forall r$
la proprietà è vera per \forall superficie chiusa con q al suo interno; si vede che resta vera deformando comunque la superficie



$$\Phi_{\text{tot}} = q_{\text{int}}/\epsilon_0$$

tot - sup. chiusa, **int** – somma algebrica delle q all'interno
(**teorema di Gauss**, una delle leggi fondamentali dell'e.m.)

- viceversa, con simmetria, date le q si può ricavare **E**

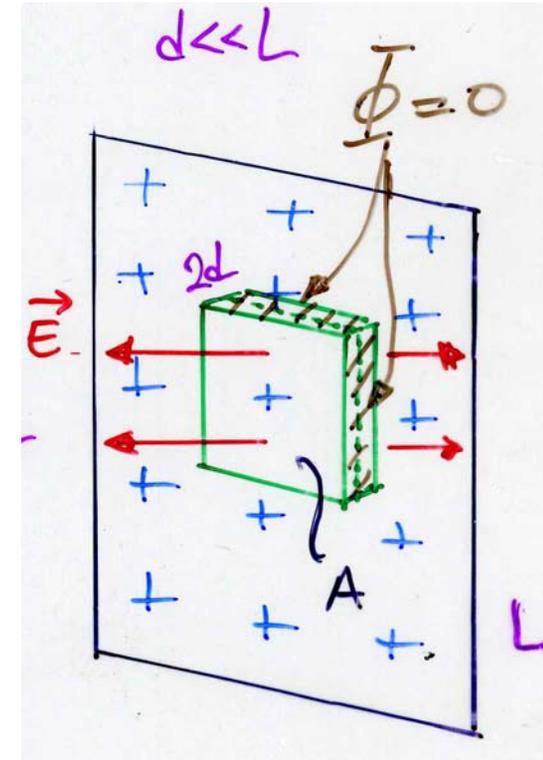




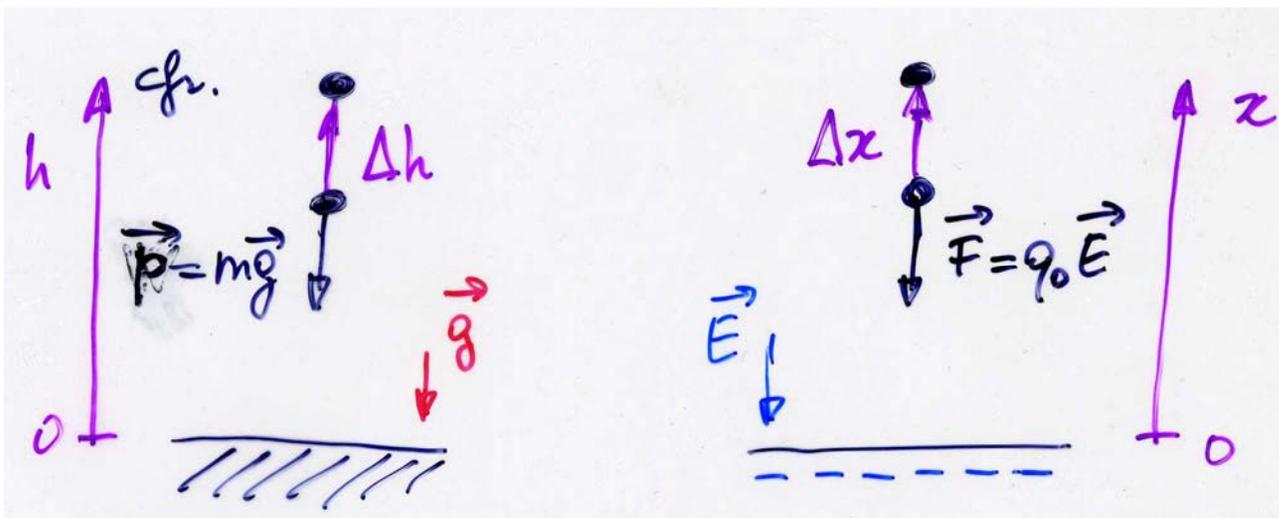
Applicazione: piano uniformemente carico

- piano carico (o quadrato di lato $L \gg d$): σ (C/m²) = q/A densità superficiale di carica
- per simmetria: $\mathbf{E} \perp$ piano [e costante (uniforme) su un \forall piano parallelo]
- applico t. di Gauss al parallelepipedo
$$\Phi_{\text{tot}} = EA + 0 + EA = q_{\text{int}}/\epsilon_0 = \sigma A/\epsilon_0$$
$$\rightarrow E = \sigma/(2\epsilon_0)$$

che non dipende dalla distanza dal piano (campo uniforme), come deve essere per simmetria



Potenziale elettrostatico



la **F** è
conservativa,
funzione della
posizione

E modulo di \mathbf{E} ,
 E_x componente
x di \mathbf{E}

- consideriamo una q_0 allontanata da un piano $-vo$

$$\Delta\mathcal{L} = -q_0 E \Delta x = q_0 E_x \Delta x \quad (\text{cfr } \Delta\mathcal{L} = -mg\Delta h)$$

$$\Delta W = -\Delta\mathcal{L} = -q_0 E_x \Delta x$$

$$W = \int_0^x (-q_0 E_x) dx = -q_0 E_x x \quad (\text{cfr } W = mgh \text{ con } W(0) = 0)$$

$$\Delta V = \Delta W / q_0 = -E_x \Delta x \quad \text{differenza di potenziale e.s.}$$

$$E_x = -\Delta V / \Delta x \quad \text{il potenz. cresce in verso opposto ad } \mathbf{E}$$



Potenziale elettrostatico (2)

- unità SI: 1 volt(V) = 1 N/1 C \longrightarrow E in V/m
[1J = 1Nm; 1 N/C = 1 Nm/(1 Cm) = 1 J/(Cm) = 1 V/m]

- es. potenziale fra due piani carichi, spostando q_0 dal - al +

$$\mathcal{L} = -q_0 E d$$

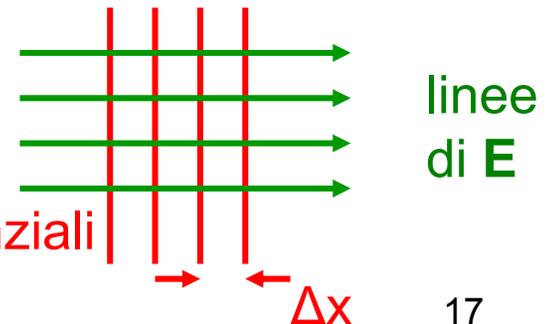
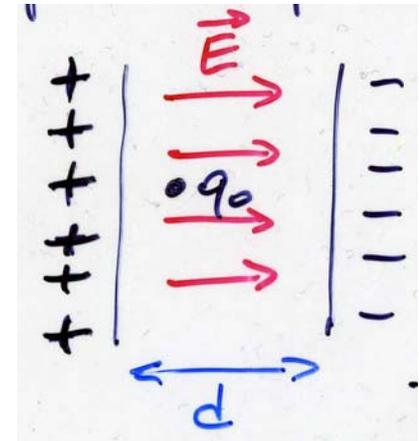
$$V_+ = E d \quad \text{con} \quad V_- = 0$$

$$\text{NB è definito solo } \Delta V = V_+ - V_- = E d$$

- su una q in un campo \mathbf{E} : $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$
tende a spostare $q > 0$ ($q < 0$) verso una regione di minore (**minore**) W ossia di minore (**maggiore**) V

- superfici equipotenziali \perp ad \mathbf{E}

es.1 campo uniforme $\Delta V = -E_x \Delta x$





Potenziale elettrico (3)

- es.2 conduttori in equilibrio: equipot. su tutto il volume (\mathbf{E} e le sue linee escono \perp alla superficie)
- es.3 potenziale prodotto da una carica puntif.

$$E_r = kq/r^2 \quad \Delta V = -E_r \Delta r = -kq \Delta r / r^2$$

prendiamo Δr piccolo ossia $r_1 \sim r_2$

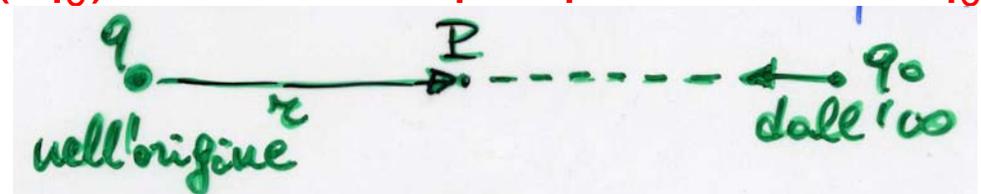
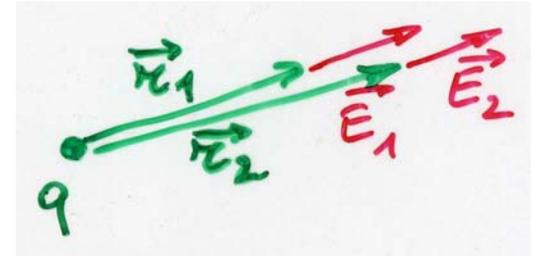
$$\Delta r = r_2 - r_1 \ll r_1, r_2$$

$\Rightarrow r^2 \sim r_1 r_2$ media geometrica, approx.

$$\Delta V = -kq(r_2 - r_1) / (r_1 r_2) = -kq(1/r_1 - 1/r_2)$$

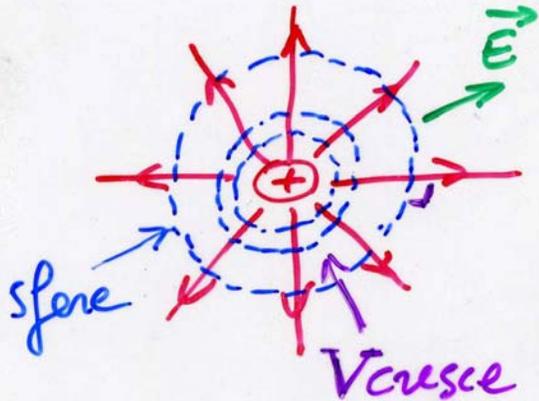
$$V_2 - V_1 = kq/r_2 - kq/r_1 \quad \text{cioè } \boxed{V(r) = q / (4\pi\epsilon_0 r)} \quad \begin{array}{l} \text{ponendo} \\ V(\infty) = 0 \end{array}$$

$V(P) = -\mathcal{L}/q_0$ -lavoro(/ q_0) necessario per portare una q_0 +va dall' ∞ al punto P



Potenziale elettrico (4)

- superfici equipotenziali generate da una carica puntiforme (o sferica)

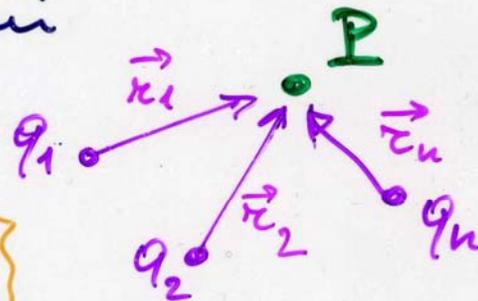


$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

superfici sferiche ortogonali ai raggi

- n cariche puntiformi

$$V = \sum_{i=1}^n V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i}$$





L'elettronvolt

- l'elettronvolt (eV) è una unità energia: en. acquistata da un e^- sottoposto alla d.d.p. di 1 V

$$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1 \text{ V} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

l'eV è l'energia tipica dei processi atomici (es. l'en. di ionizzazione dell'atomo di H è 13.6 eV)

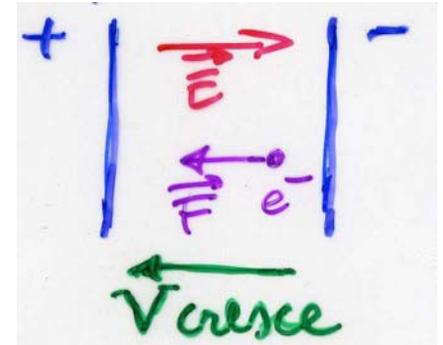
- esercizio: velocità acquistata da un e^- in una ddp di 1 V

$$\mathbf{F} = -e\mathbf{E} \quad \text{m.r.u.v./II principio}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{F}/m = -e\mathbf{E}/m$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = e\Delta V \quad \text{cons. en. meccanica} \quad v^2 = 2e\Delta V/m$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 1.602 \times 10^{-19} \times 1}{9.11 \times 10^{-31}}} = 5.93 \times 10^5 \text{ m/s}$$



Capacità

- conduttore in equilibrio: stesso V (equipotenziale), cariche in superficie, \mathbf{E} esterno \perp superficie
- se aumento q , aumenta V – si def. capacità elettrica la carica divisa per il potenziale stesso

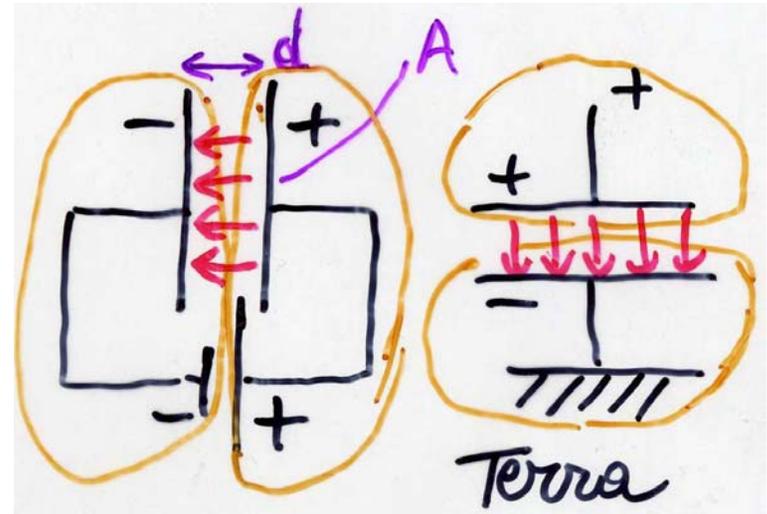
$$C = q/V$$

unità SI: farad (F), sottomultipli usati μF , nF , pF

- condensatore: due conduttori affacciati, carichi di segno opposto, es. facce piane e parallele ($V = Ed = \sigma d/\epsilon_0$)

$$C = q/V = \cancel{\phi} A / (\cancel{\phi} d / \epsilon_0) = \epsilon_0 A / d$$

con $\sigma = q/A$ dens. sup. di carica



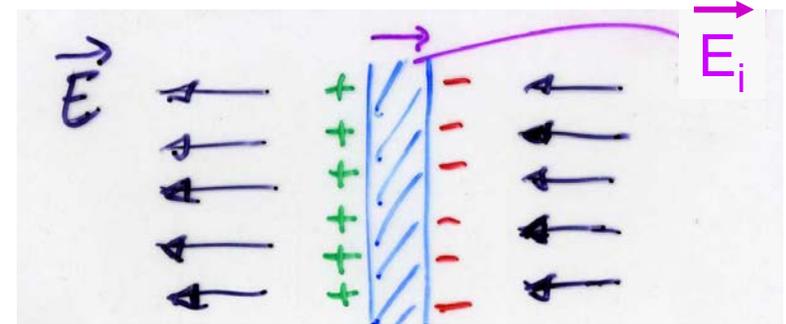


Capacità (2)

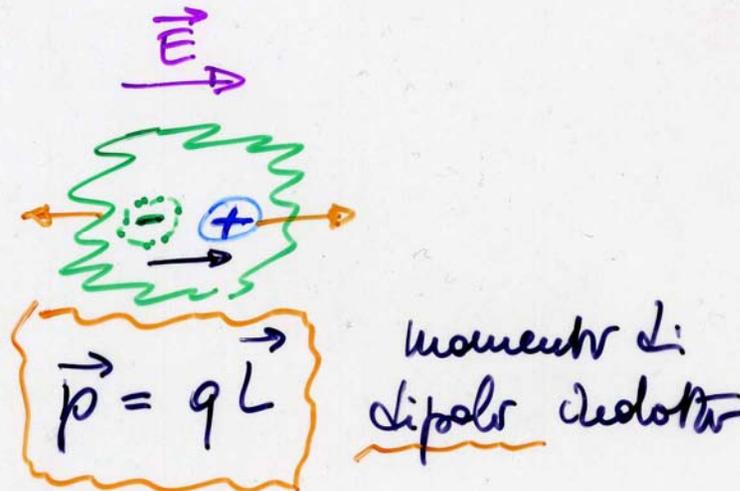
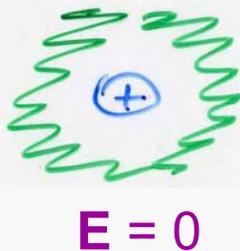
- limite alla carica accumulabile su un conduttore / condensatore: dipende dalla forma dei conduttori, dal mezzo in cui sono immersi;
se E cresce troppo \longrightarrow scarica
es. aria secca $E_{\max} \sim 3 \cdot 10^6$ V/m, vetro $\sim 40 \cdot 10^6$ V/m
(rigidità dielettrica)
[sulle punte σ locale è maggiore, E è maggiore e la scarica avviene prima]
- inserendo un dielettrico, la capacità del condensatore aumenta (ed aumenta anche la rigidità dielettrica), es. condensatore piano (vedi oltre per la dim. che $\epsilon_r > 1$)
$$C = \epsilon A/d = \epsilon_r \epsilon_0 A/d = \epsilon_r C_0 \quad (\epsilon_r > 1)$$

Materiali immersi in \mathbf{E} esterno

- conduttori / metalli: all'interno il campo $\mathbf{E} + \mathbf{E}_i(\text{indotto}) = 0$



- molecole non polari



il dipolo indotto produce un campo \mathbf{E}_i in verso opposto ad \mathbf{E} , il campo risultante è ridotto rispetto a \mathbf{E}



Materiali in \mathbf{E} esterno (2)

- molecole non polari (continua)
- molecole polari con dipoli permanenti

in \vec{E} uniforme $\vec{F} = 0$ risultante
se \vec{E} non è uniforme

$F_1 > F_2$ attrazione

scambiando

" attrazione (sempre)

\Rightarrow fenomeni triboelettrici

H_2O \vec{p} permanente

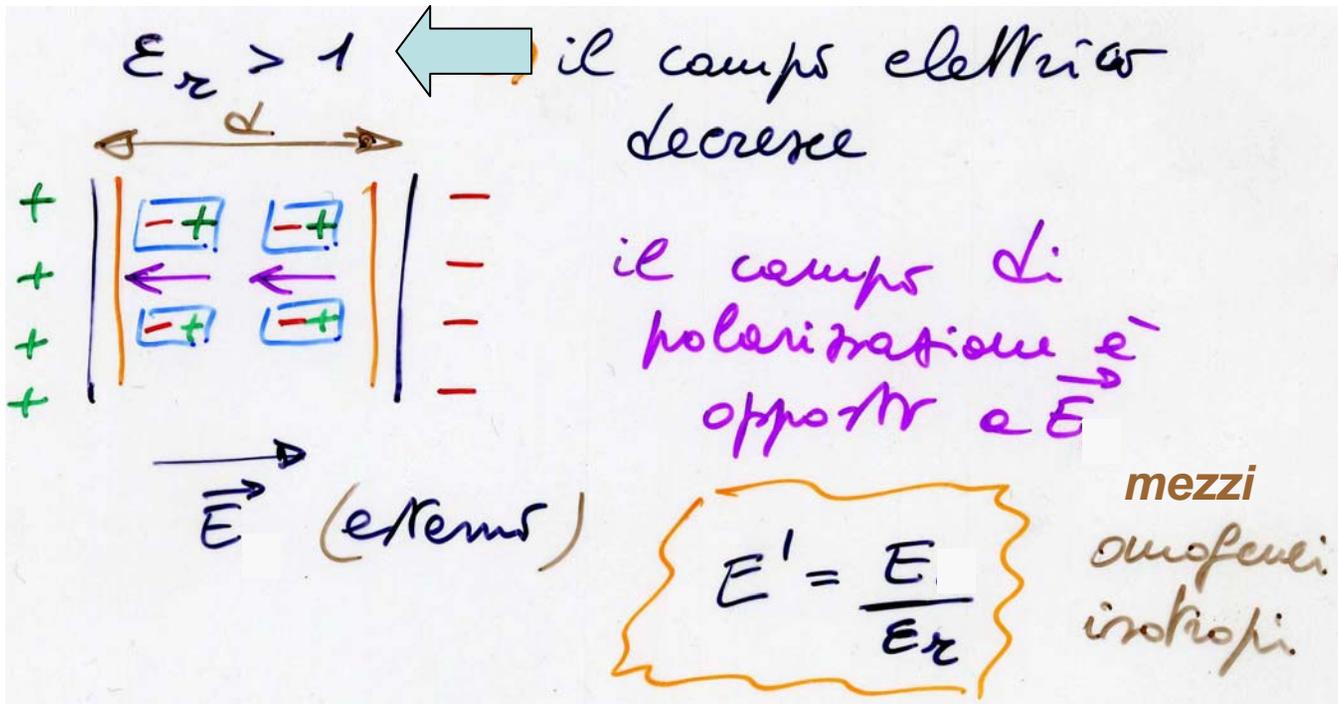
\vec{E} uniforme $\vec{F} = 0$ ma $\vec{M} \neq 0$

\Rightarrow allineamento
(il campo è in verso opposto)



Dielettrici in un campo esterno

- dielettrici / isolanti: $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{E}_i$; $E' = E - E_i = E/\epsilon_r < E$



$$V' = E'd = Ed/\epsilon_r = V/\epsilon_r$$

(q = cost)

$$C = q/V' = \epsilon_r q/V = \epsilon_r C$$

inserendo un dielettrico C aumenta



La costante dielettrica relativa

- il dielettrico aumenta C ed aumenta la rigidità dielettrica (da 10 a 100 volte)
es. mica $\epsilon_r = 7.0$ $E_{\max} \sim 10-100 \cdot 10^6$ V/m
kapton $\epsilon_r \sim 7$ $E_{\max} \sim 300 \cdot 10^6$ V/m
- altri materiali
polietilene $\epsilon_r = 2.3$; aria $\epsilon_r = 1.00059$ ($\epsilon \sim \epsilon_0$);
H₂O $\epsilon_r = 81$
- la grande costante dielettrica dell'acqua favorisce la dissociazione dei composti ionici (al suo interno il campo è fortemente ridotto)
- eserc. $10 \times 10 \times 0.01$ cm³ in aria
 $C = \epsilon_0 A/d = 8.85 \times 10^{-12} \times 10^{-2} / 10^{-4} = 885$ pF $V_{\max} = ?$

Condensatori in parallelo ed in serie

- parallelo:** $\Delta V = V_a - V_b$ è lo stesso

$$q_1 = C_1 \Delta V; q_2 = C_2 \Delta V; q_n = C_n \Delta V$$

$$q_{\text{tot}} = q_1 + q_2 + \dots + q_n = \\ = (C_1 + C_2 + \dots + C_n) \Delta V$$

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n$$

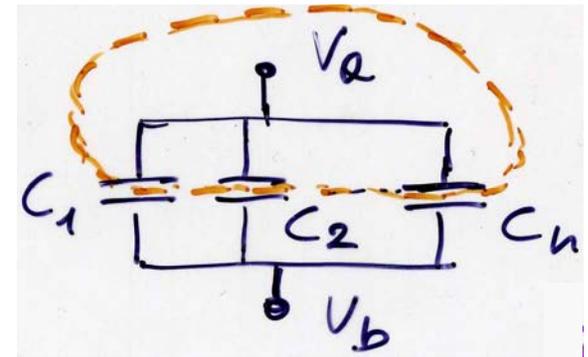
- serie:** q è la stessa, ossia

$$(V_a - V_b) = q / C_1; (V_b - V_c) = q / C_2$$

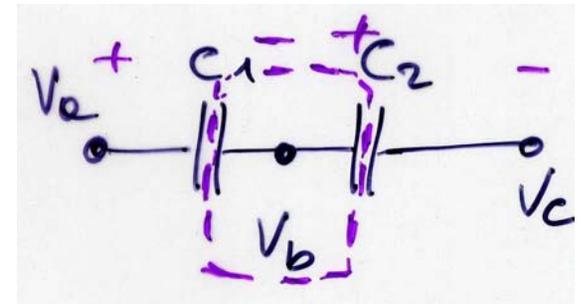
$$V_a - V_c = (V_a - V_b) + (V_b - V_c) = \\ = q(1/C_1 + 1/C_2)$$

$$1/C_{\text{eq}} = 1/C_1 + 1/C_2$$

$$C_{\text{eq}} = C_1 C_2 / (C_1 + C_2) \quad \text{mcm}$$



condensatore equivalente
in parallelo

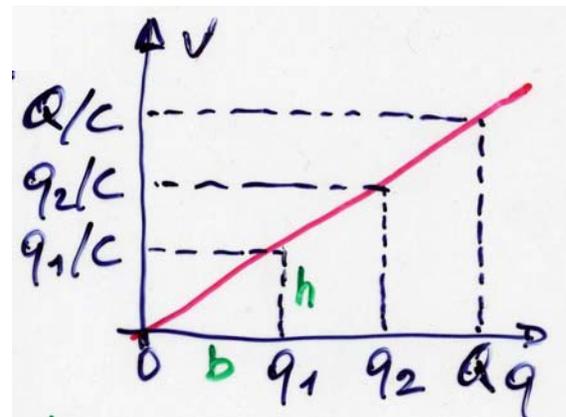
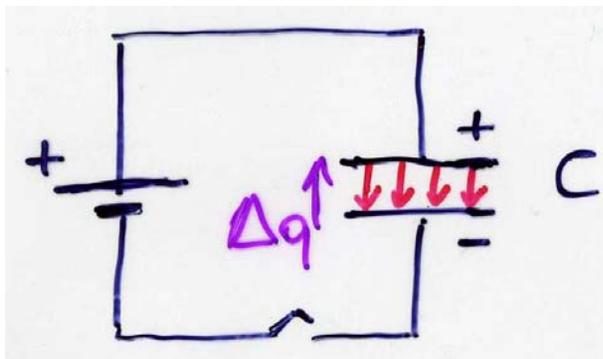


condensatore equivalente
in serie



Carica del condensatore

- q , $v=q/C$ durante la carica (Q , V quantità finali, **carico**)
- inizio (tasto aperto) $q=0$ $v=0$ (**scarico**)



- lavoro (della pila) per spostare Δq :

$$\Delta \mathcal{L} = \underline{v} \Delta q = (1/C) q \Delta q = (1/C) \frac{1}{2} (q_1 + q_2) (q_2 - q_1) = \frac{1}{2} C (q_2^2 - q_1^2)$$

fra 0 e Q : $\mathcal{L} = \frac{1}{2} (Q/C) Q = Q^2 / (2C)$

$$W = Q^2 / (2C) = \frac{1}{2} C V^2$$

V è la d.d.p. ai capi del condensatore

energia
immagazzinata
nella carica



Energia immagazzinata nel campo elettrico

- es. condensatore piano nel vuoto

$$V = Ed$$

$$C = \epsilon_0 A/d$$

volume di C

$$W = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(\epsilon_0 A/d)(E^2 d^2) = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 (Ad)$$

- energia per unità di volume (densità di en. potenziale)

$$\eta = W/(Ad) = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

(cfr. en. potenziale elastica di una molla spostata di x dalla posizione di equilibrio: $W_{\text{molla}} = \frac{1}{2}kx^2$)

- la formula è valida anche per campi \mathbf{E} comunque variabili

- se c'è un dielettrico, basta mettere ϵ al posto di ϵ_0

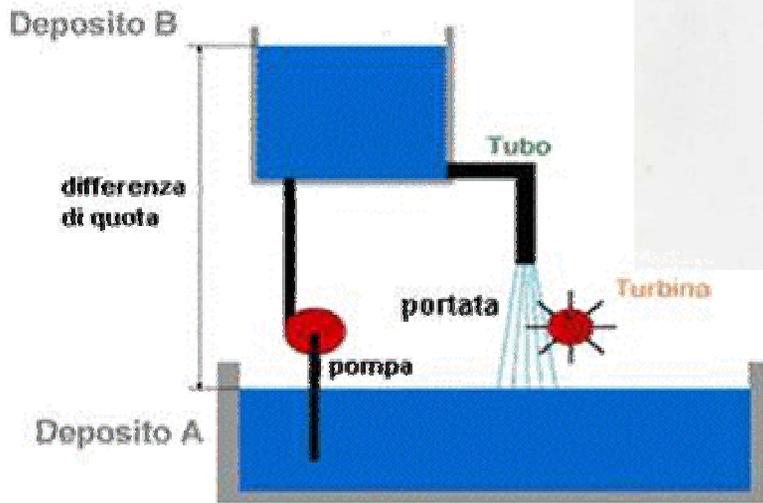
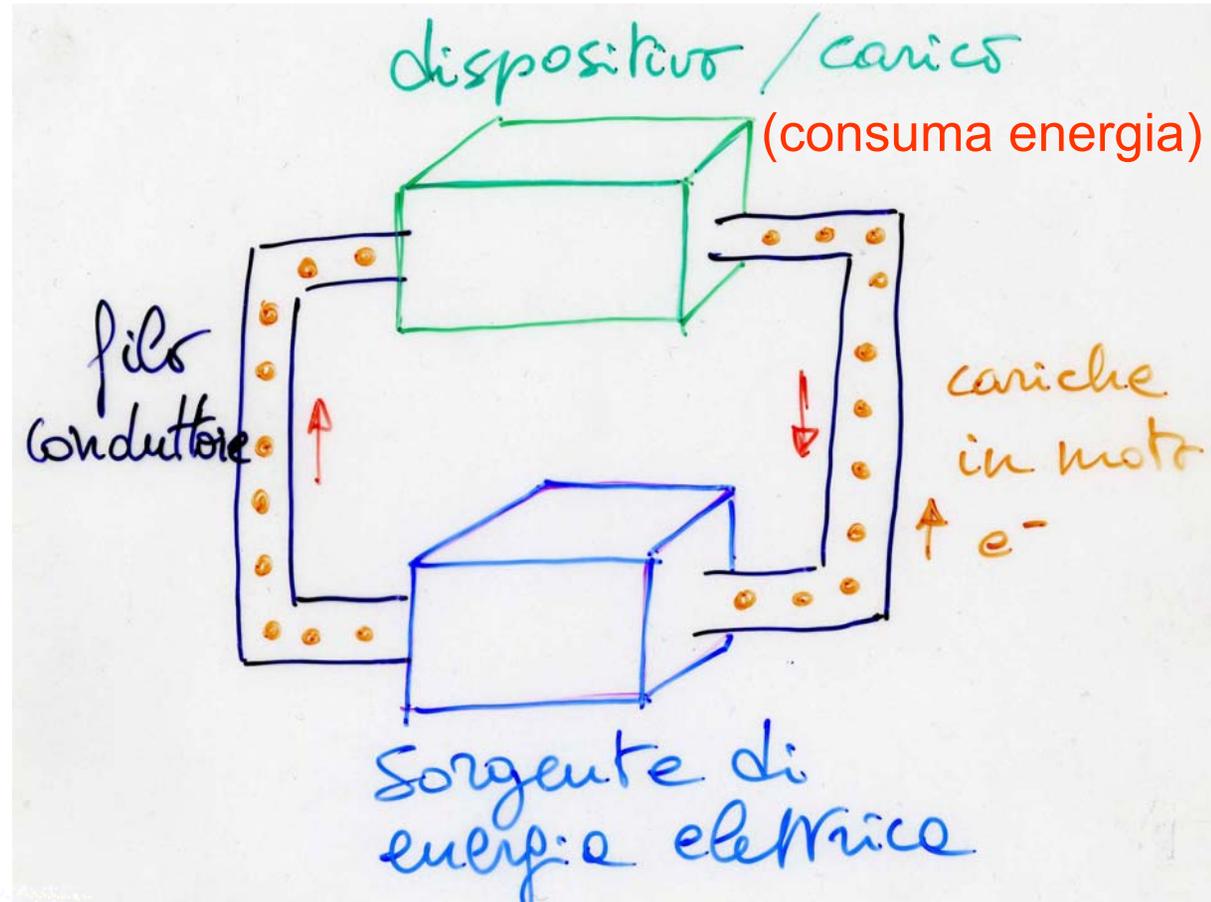


Corrente elettrica



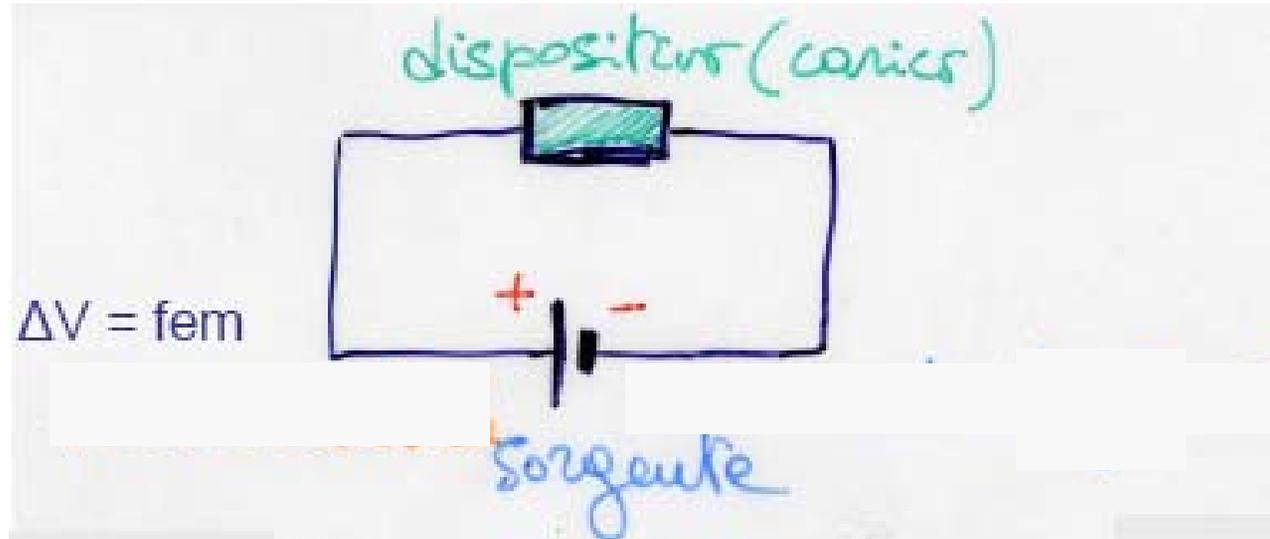
Circuito elettrico

- sorgente ad es. pila: en. chimica \rightarrow en. elettrica
- analogia con un circuito idraulico





Schema ed elementi di circuito elettrico



- la pila (batteria) fornisce una d.d.p. costante
- NB le linee continue sono equipotenziali

resistenza



R

$$\Delta V = Ri$$

capacità



C

$$\Delta V = q/C$$



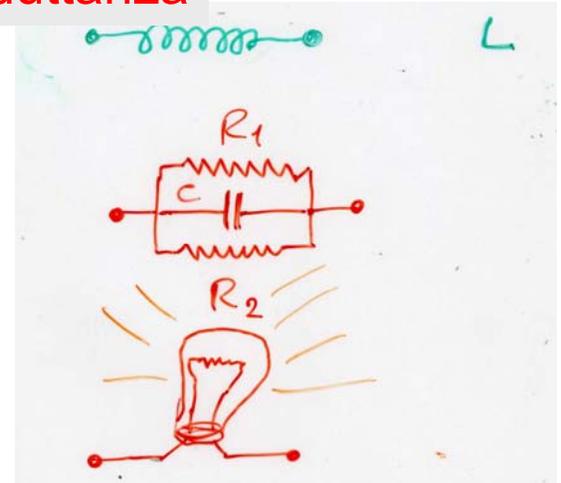
(diodo)

induttanza

$$\Delta V = L di/dt$$



L





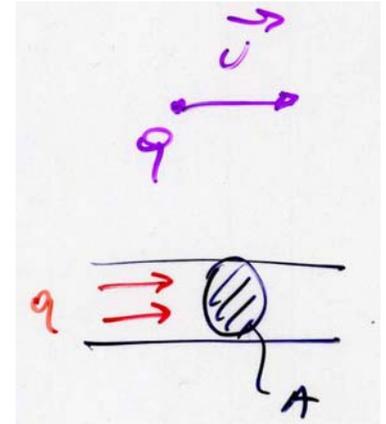
Corrente elettrica

- in generale la corrente elettrica è la carica per unità di t attraverso una superficie A

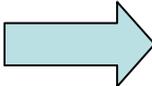
$$i = \Delta q / \Delta t \quad (\text{al lim per } t \rightarrow 0, i = dq/dt)$$

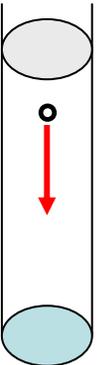
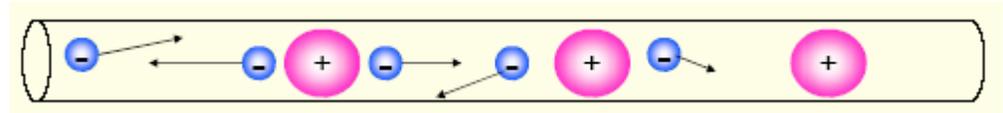
- unità SI: 1 ampère(A) = 1 C/s
sottomultipli: mA, μ A, nA

- **convenzione (Bj. Franklin): i è +va nel verso in cui si muovono le cariche +ve**
- conduttori: il realtà si muovono gli e^-
- altri casi (semiconduttori, elettrolisi, acceleratori): si possono muovere sia cariche $-ve$ che $+ve$
- **corrente continua (stazionaria): i non varia nel tempo, analoga allo scorrimento stazionario di un fluido**



Elettroni nei metalli

- nei metalli gli e^- più esterni sono in comune al cristallo (e^- di conduzione), tipicamente $\sim 1/\text{atomo}$
- modello: gas di e^- 'classico', $v_T \sim 1.2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ (300 K), $\lambda \sim 100 \text{ \AA}$, $\tau \sim 10^{-13} \text{ s}$
- se $\mathbf{E} = 0$ ($\Delta V = 0$):
agitazione termica, $v_d = 0$, con v_d velocità di deriva
- se $\mathbf{E} \neq 0$: $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$, urti sugli ioni, 'resistenza viscosa',
cfr. legge di Stokes  $v_d \neq 0$, molto piccola,
 $\sim 0.1 \text{ mm/s}$ (ma un segnale elettrico si propaga con $v \sim c$)
- se \mathbf{E} (o ΔV) cost. nel tempo, anche v_d è cost. $\rightarrow i$
continua (analoga a cariche in moto con vel. cost.,
analogia col viscosimetro a caduta)





Resistenza elettrica

- se in generale applico una d.d.p. V agli estremi di un pezzo di materiale (metallo o meno) si def. resistenza elettrica il rapporto fra la d.d.p. e la corrente i che lo attraversa

$$R = V/i$$

(def. di resistenza)

ho soppresso Δ , ma è una ddp

con in genere $R = R(i)$

unità SI: 1 ohm (Ω) = 1 volt/ampère = 1 V/A

- se applico la d.d.p. ad un metallo (conduttore ohmico) a $T = \text{cost.}$, la resistenza risulta costante

$$R = V/i = \text{cost.}$$

[1) conduttore ohmico, 2) $T = \text{cost.}$]

1a legge di Ohm, che vale solo per i buoni conduttori, metalli, se la temperatura non varia

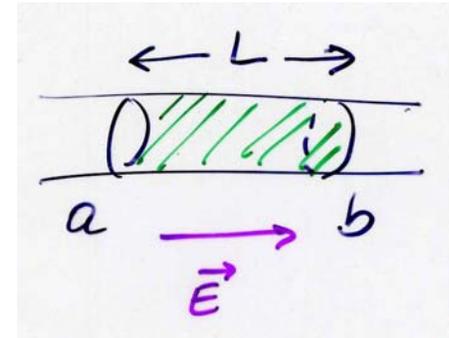


Resistenza elettrica (2)

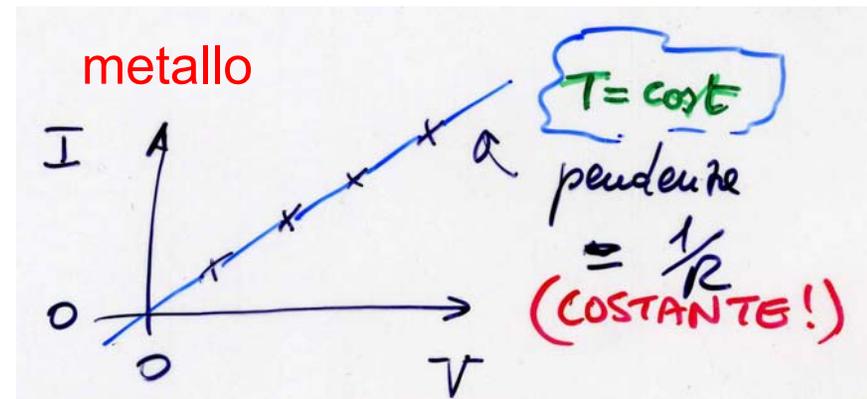
- relazione fra campo e d.d.p.:

$$V = V_a - V_b = EL$$

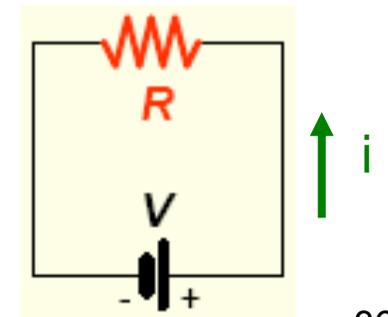
quindi il campo è la ddp divisa
la lunghezza del campione



- se sono verificate le condizioni della 1a legge di Ohm, i vs V è una retta per l'origine (cfr. leggi di Poiseuille, Fick, Fourier)



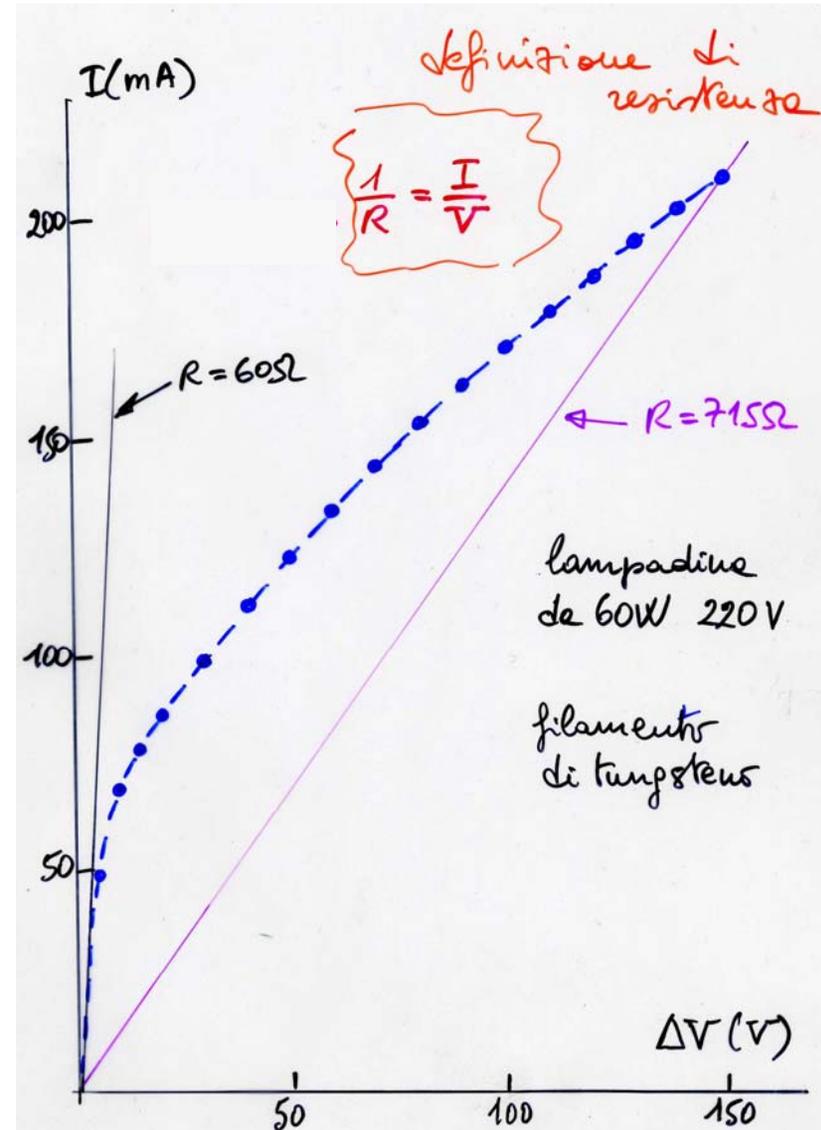
- in un circuito la resistenza R è indicata da una linea seghettata (NB le linee continue hanno $R = 0$)





Resistenza elettrica (3)

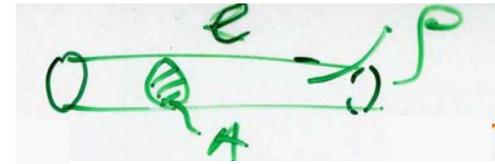
- normale lampadina da 60 W (filamento metallico), misuro i vs V e non trovo una retta! R aumenta ~10 volte se V va da qualche volt a 150 V, perchè?
- un indizio: a qualche volt la lampadina non emette luce, mentre a 150 V sì
- l'emissione di luce sempre più visibile implica che il filamento si scalda (legge di Wien), la condizione $T = \text{cost.}$ non è rispettata





Resistività elettrica

- per un campione di materiale di lunghezza ℓ e di area trasversa A



$$R = \rho \ell / A = \ell / (\sigma A)$$

[cfr. legge di Fourier "R" = $\Delta x / (kA)$]

2a legge di Ohm, dove $\rho = \rho(T)$ in $\Omega \cdot m$ è la resistività e $\sigma = \sigma(T)$ in $S(iemens) \cdot m^{-1}$ è la conducibilità elettrica

- W:** $\rho_W = 5.5 \cdot 10^{-8} \Omega m$ a $20^\circ C$

$$\alpha_W = 4.5 \cdot 10^{-3} K^{-1} \quad (\approx 1/273 K)$$

$$\rho_T = \rho_{20^\circ C} [1 + \alpha(T - 293)] \quad \rightarrow \quad \rho_{2000^\circ C} \sim \rho_{20^\circ C} \times 10$$

- C:** $\rho_C = 3.5 \cdot 10^{-5} \Omega m$ (grafite $0.8 \cdot 10^{-5} \Omega m$)

$$\alpha_C = -5 \cdot 10^{-4} K^{-1} \quad \text{dipende poco da } T$$

- resistori discreti: in C a impasto (ad es. Allen-Bradley)





Resistività elettrica dei materiali, 20°C

- nei metalli ρ cresce con $T \uparrow$ ed in presenza di impurezze (aumentano ostacoli al moto degli e^-)
- nei semic. e isolanti succede il contrario
- cfr conduc. termica

Materiale	ρ ($\times 10^{-8} \Omega m$)	α ($10^{-3} \text{ gradi}^{-1}$)
Ag	1.53	3.8
Cu	1.72	4.0
Carbono	49	0.03
Hg	98	0.99
C	3.5×10^3	-0.5
Ge	4.6×10^7	-50
Si	2.0×10^9	-70
vetro	$10^{18} \div 10^{22}$	
gomma dura	$10^{21} \div 10^{24}$	
polistirolo	$10^{23} \div 10^{24}$	



Resistenze in serie ed in parallelo

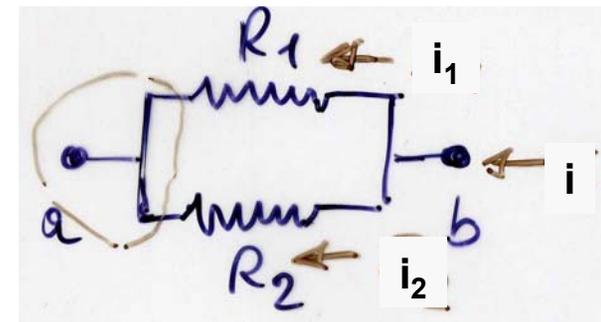
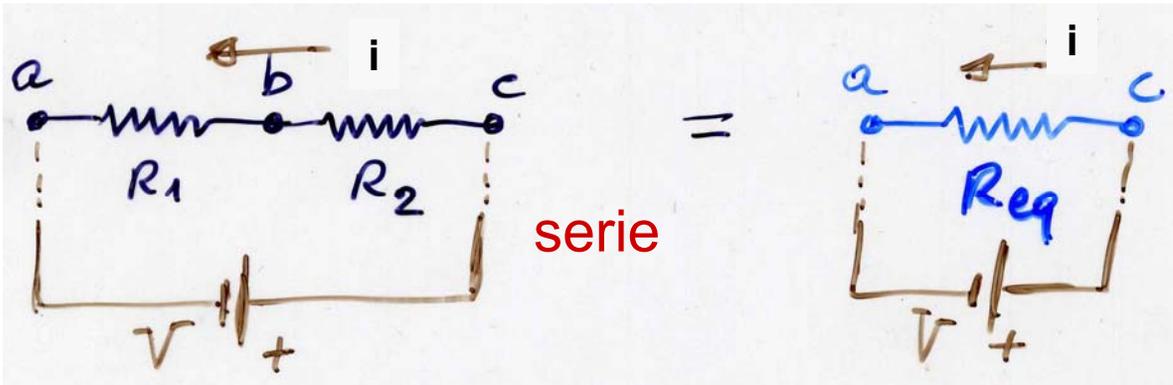
- **serie: $i = \text{cost}$** $iR_1 = V_b - V_a$ $iR_2 = V_c - V_b$
ma $iR_{\text{eq}} = V_c - V_a = (V_c - V_b) + (V_b - V_a) = i(R_1 + R_2)$

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 (+ \dots + R_n) \quad \text{serie}$$

- **parallelo: $V = V_b - V_a = \text{cost}$** $i_1 = V/R_1$ $i_2 = V/R_2$
ma $V/R_{\text{eq}} = i = i_1 + i_2 = V(1/R_1 + 1/R_2)$

$$1/R_{\text{eq}} = 1/R_1 + 1/R_2 = (R_2 + R_1)/(R_1 R_2) \quad \text{parallelo}$$

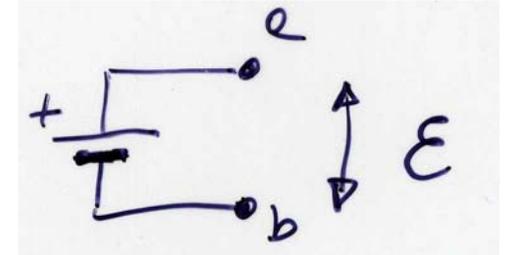
$$R_{\text{eq}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$$





f.e.m. e resistenza interna del generatore

- la forza elettromotrice \mathcal{E} è il lavoro per unità di carica che fa la pila, batteria (o un ∇ altro generatore): si misura a morsetti aperti ($i = 0$, $R = \infty$)



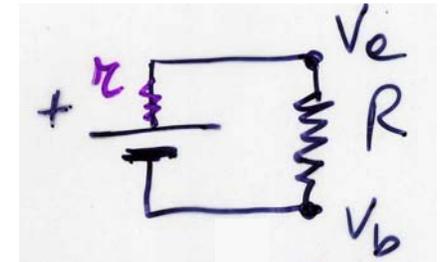
- chiudendo su un carico R

$$\mathcal{E} = i(r+R)$$

$$i = \mathcal{E}/(r+R) < \mathcal{E}/R$$

$$V = V_a - V_b = iR = \mathcal{E}R/(r+R) < \mathcal{E}$$

dove r è la resistenza interna del generatore (piccola), in serie col carico: la corrente erogata è $<$ di quella erogabile con $r = 0$ e la ddp utile $<$ della fem





Effetto Joule e lavoro del generatore

- per far passare una carica dq attraverso una R occorre fornire un lavoro

$$d\mathcal{L} = (V_a - V_b)dq = Vdq = Vidt$$

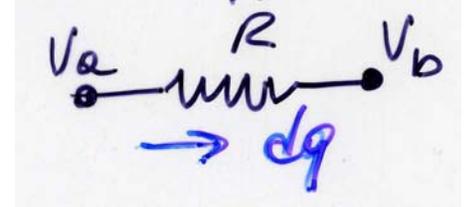
usando $i = dq/dt$; questo \mathcal{L} scalda la R (effetto termico della corrente); la potenza corrispondente è

$$\mathcal{P} = d\mathcal{L}/dt = Vi$$

(oppure, usando $V= Ri$, $\mathcal{P} = i^2R = V^2/R$)

- il lavoro per unità di t fornito dalla pila per far passare le cariche in $r+R$ è

$\mathcal{P} = \mathcal{E}i$ mentre la potenza dissipata su R (utile) è solo $\mathcal{P}' = Vi < \mathcal{P}$





Misure di corrente e ddp

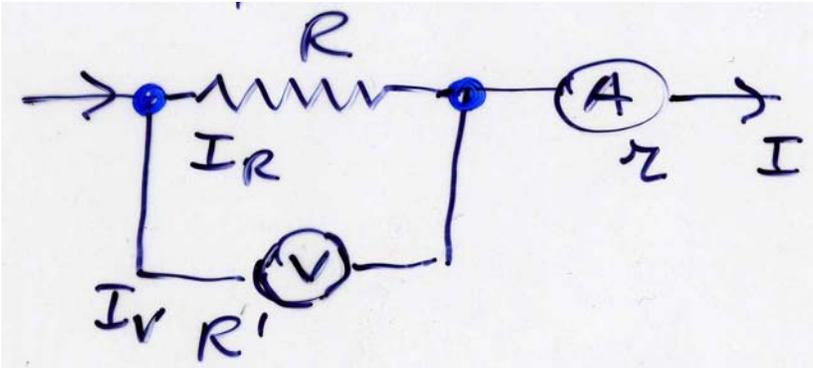
- Ⓐ amperometro, misura i e si connette in serie (r interna piccola)
- Ⓥ voltmetro, misura V e si connette in parallelo (R' interna grande)
 - in ambedue i casi si può usare un multimetro (digitale) che misura A , V (sia in cc che in c. alternata), Ω e C
 - in casi particolari si usa un galvanometro Ⓒ ossia un amperometro molto sensibile (strumento di zero, per verificare se $i \simeq 0$)



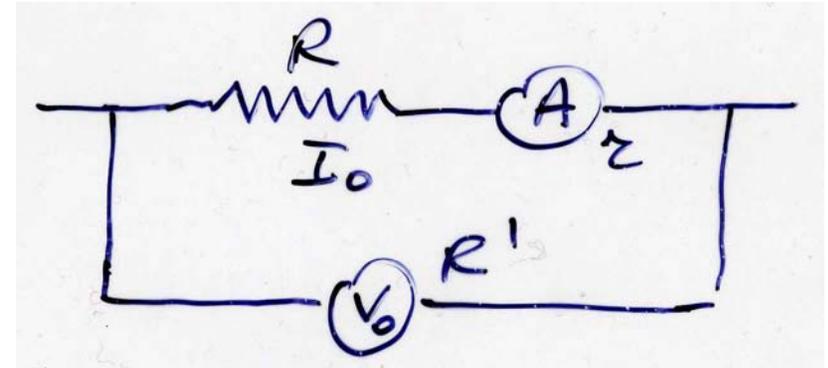


Misure di corrente e ddp (2)(*)

- ad es. vogliamo misurare una $R = V/i \Rightarrow$ due possibili connessioni



$$\begin{aligned} \text{a) } i_R R &= i_V R' \Rightarrow i_R / i_V = R' / R \\ i_R / i &= i_R / (i_R + i_V) \Rightarrow V = i_R R = \\ &= R R' i / (R + R') \\ V / i &= R R' / (R + R') = R / (1 + R / R') \\ &\text{va bene solo se } R' \rightarrow \infty \end{aligned}$$

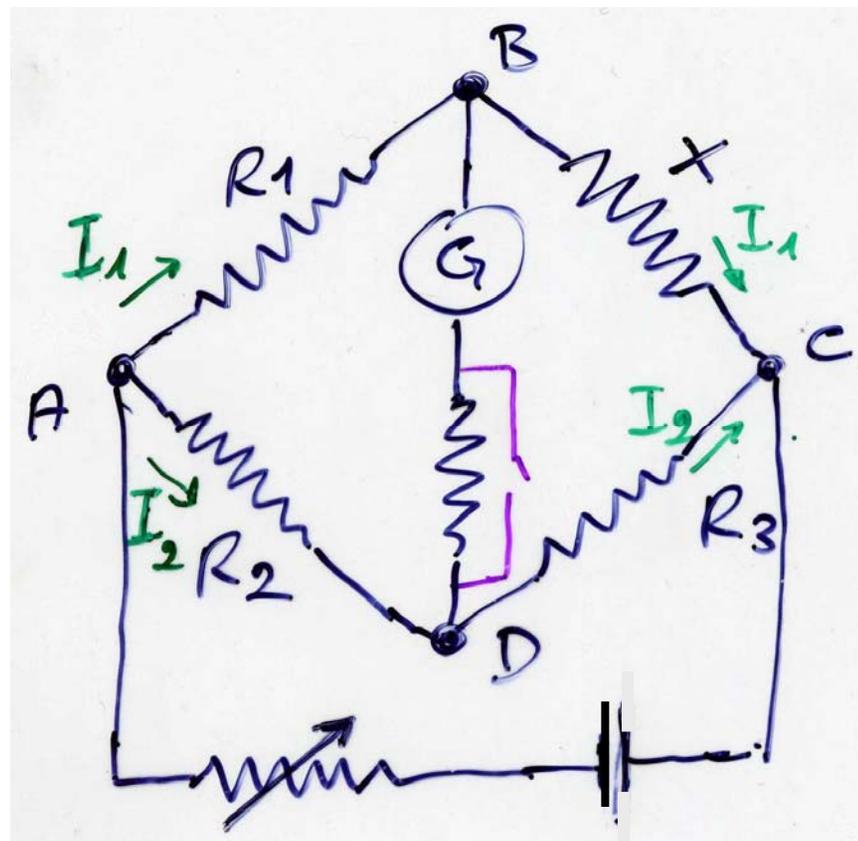


$$\begin{aligned} \text{b) } V_0 &= i_0 (R + r) \\ &\Rightarrow V_0 / i_0 = R + r \\ &\text{va bene solo se } r \rightarrow 0 \end{aligned}$$

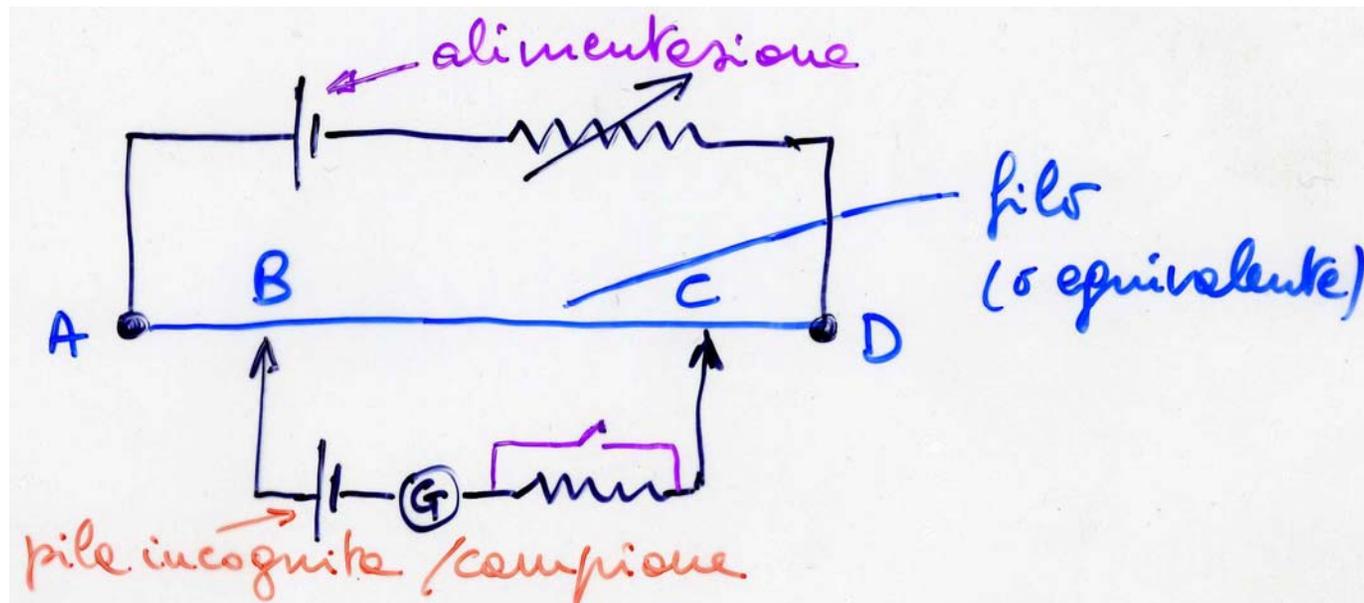
in realtà $R' \neq \infty$ e $r \neq 0 \rightarrow$ metodi speciali: ponte di Wheatstone (R), potenziometro (ddp)

Ponte di Wheatstone (*)

- G è un galvanometro usato per misurare una corrente nulla
- R_2, R_3 sono aggiustabili ad es. a filo, X è la resistenza da misurare
- ponte in equilibrio: G indica 0, quindi $V_B = V_D$ ossia
 $i_1 R_1 = i_2 R_2$ $i_1 X = i_2 R_3$
da cui $X = R_3 R_1 / R_2$
- applicazione: termometro a resistenza



Potenziometro (*)

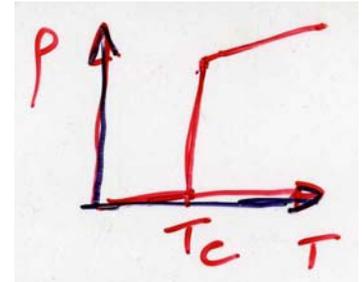


- due misure di corrente 0 nel galvanometro G
 - pila incognita $\mathcal{E} = (BC/AD)V_{AD}$
 - pila campione $\mathcal{E}' = (B'C'/AD)V_{AD}$ ad es. Weston 1.0186 V
- da cui $\mathcal{E} = (BC/B'C')\mathcal{E}'$
 (con corrente 0 non si perturba il circuito)



Superconduttività (cenno) (*)

- metalli: se $T \searrow$, $\rho \searrow$ (l'agitazione termica, la “viscosità” decrescono)
- se $T < T_{\text{critica}} \Rightarrow$ fenomeno nuovo ($\rho \sim 0$)
- scoperta: Kamerlingh Omnes (1911); prime applicazioni, 50 anni dopo (1960)
- T_c ad es.: Hg 4.2 K; Nb 9.2 K, lega Nb_3Ge 23 K; alcune ceramiche > 125 K (“alta temperatura”, in effetti -150 °C ma $> T_{\text{LN}_2}$, Berdnorz e Müller, 1986)
- spiegazione (quanto meccanica): coppie di e^- (coppie di Cooper)
- applicazioni: $\rho=0$, $R=0$, grandi i (\rightarrow campi magnetici) senza dissipazione, risparmio di potenza (ma occorre raffreddare)





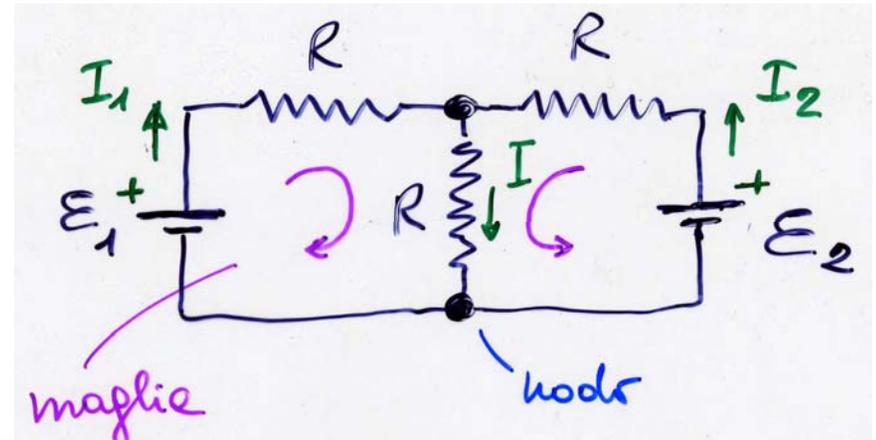
Leggi di Kirchhoff

in un ∇ circuito elettrico

- 1a legge, maglie: $\sum_j V_j = 0$ somma su tutte le fem (+ve) e cadute di tensione (-ve) nel verso di circolazione della corrente (di maglia) – giustificazione: quando faccio un giro completo ritorno allo stesso potenziale
- 2a legge, nodi: $\sum_j i_j = 0$ somma algebrica su tutte le i entranti nel nodo (+ve) ed uscenti (-ve) – conservazione della corrente
- note le R e le $\mathcal{E} \rightarrow$ tante equaz. quante sono le i incognite ($n_{\text{maglie}}, n_{\text{nodi}}-1$)
- nelle leggi di Kirchhoff possono essere incluse altre ddp, q/C per il condensatore e $L di/dt$ per l'induttanza (v. oltre)

Leggi di Kirchhoff, esempi

es1: due maglie e due nodi, 3 R uguali per semplicità: 2 equaz. di maglia, 1 per i nodi (sarebbero 2, ma sono uguali); sono note \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , R; incognite i , i_1 , i_2



– 1^a maglia $\mathcal{E}_1 - Ri_1 - Ri = 0$

– 2^a maglia $\mathcal{E}_2 - Ri_2 - Ri = 0$

– 1^o nodo $i_1 + i_2 = i$

- per risolvere il sistema di 3 eq. in 3 incognite, sostituisco la 3^a eq. nelle prime due

$$\mathcal{E}_1 - Ri_1 - R(i_1 + i_2) = 0$$

$$\mathcal{E}_2 - Ri_2 - R(i_1 + i_2) = 0$$



Esempi (2)

- multiplico x2 la 1^a e la sottraggo dalla 2^a

$$\mathcal{E}_2 - Ri_1 - \cancel{2Ri_2} - 2\mathcal{E}_1 + 4Ri_1 + \cancel{2Ri_2} = 0$$

$$\rightarrow i_1 = (2\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)/3R$$

$$i_2 = (2\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)/3R$$

$$i = (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)/3R$$

basta scambiare gli indici!

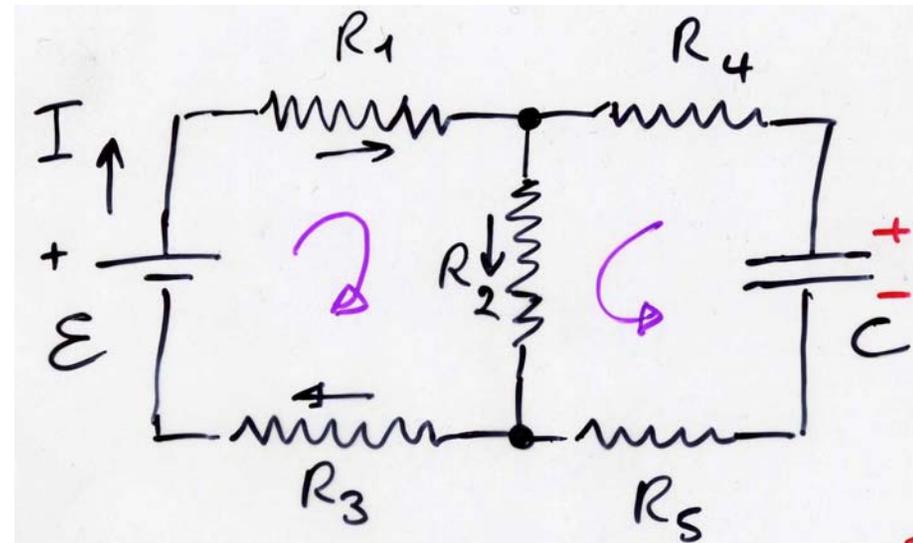
- **es2: NB corrente continua**,
ossia $i_4 = i_5 = 0$ (C è un
circuito aperto), $i_1 = i_2 = i_3 = i$

1^a maglia:

$$\mathcal{E} - i(R_1 + R_2 + R_3) = 0$$

2^a maglia:

$$-iR_2 + V_C = 0$$





Esempi (3)

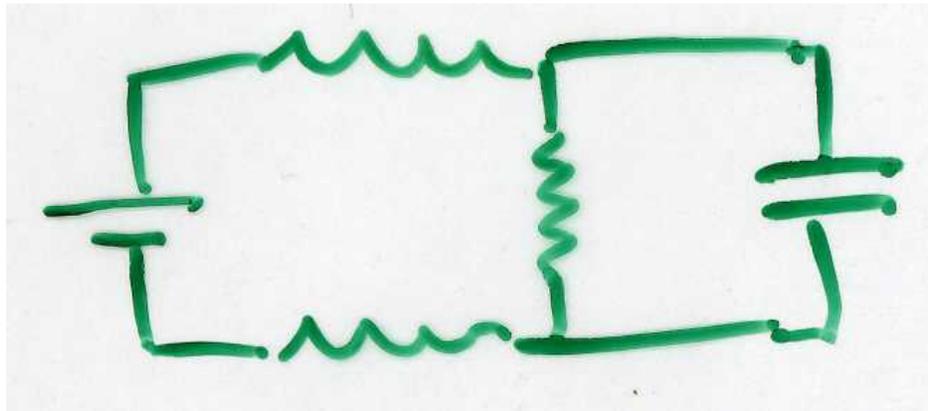
- le eq. sono valide a regime (cc), quando C è carico; si ottiene

$$- i = \mathcal{E}/(R_1+R_2+R_3)$$

$$- V_C = \mathcal{E}R_2/(R_1+R_2+R_3)$$

$$- Q = CV_C = C\mathcal{E}R_2/(R_1+R_2+R_3)$$

R_4 e R_5 è come se a regime non ci fossero, cioè posso ridisegnare il circuito in modo più semplice



Esempi (4)

- **es3:** questa volta ho un **corto circuito** fra a e b ($R=0$, $V_a=V_b$, la corrente passa tutta di lì), quindi $i_1 = i_2 = 0$
- uso Kirchhoff (**3 maglie**, **1 nodo**)

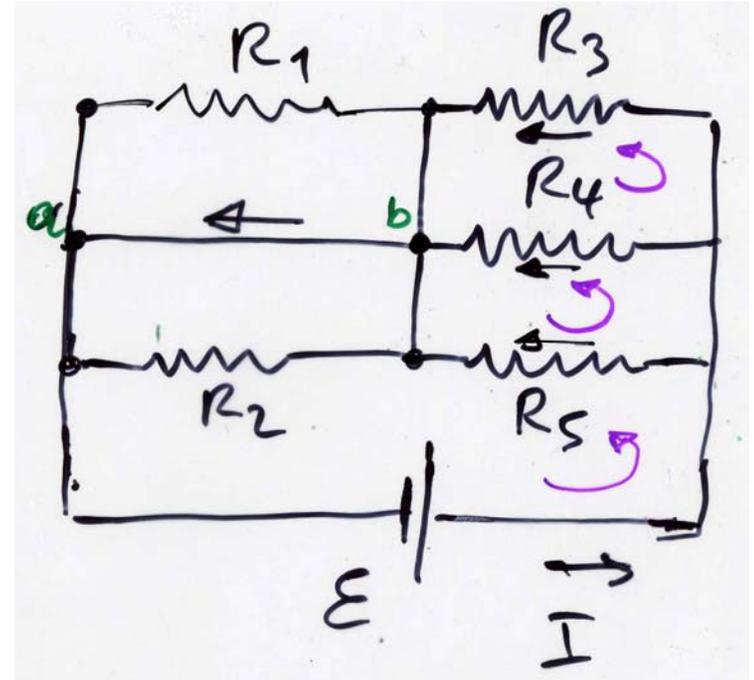
$$\mathcal{E} - i_5 R_5 = 0$$

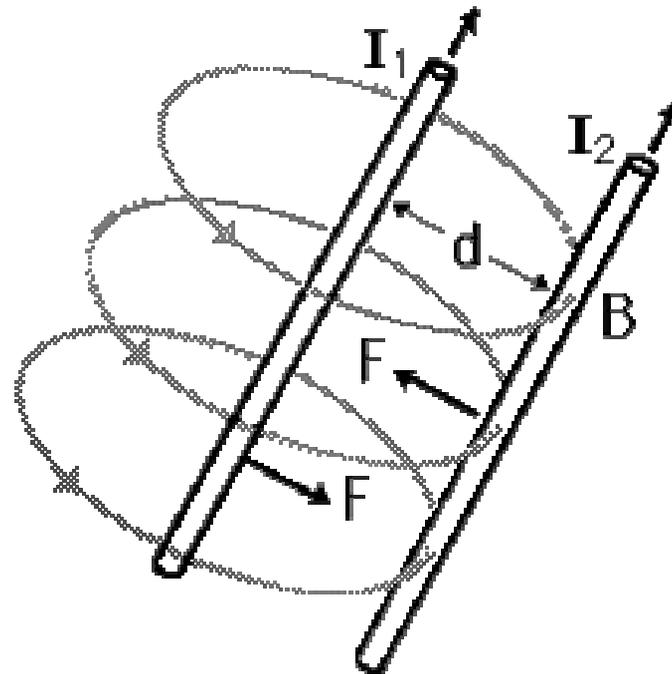
$$i_5 R_5 - i_4 R_4 = 0 \rightarrow \mathcal{E} - i_4 R_4 = 0$$

$$i_4 R_4 - i_3 R_3 = 0 \rightarrow \mathcal{E} - i_3 R_3 = 0$$

$$i = i_3 + i_4 + i_5 = \mathcal{E}/R_3 + \mathcal{E}/R_4 + \mathcal{E}/R_5 = \mathcal{E}(1/R_3 + 1/R_4 + 1/R_5)$$

del tutto equivalente ad usare la formula per le resistenze in parallelo: $1/R_{eq} = 1/R_3 + 1/R_4 + 1/R_5$ e $i = \mathcal{E}/R_{eq}$





Forces Between
Currents

Campo magnetico



Campo magnetico

- esempi
 - campo magnetico terrestre orienta una bussola (ago di acciaio magnetizzato)
 - $\text{FeO} \cdot \text{Fe}_2\text{O}_3$ (magnetite) attira Fe, Co, Ni ...
 - una corrente elettrica agisce su una bussola (Oersted) o su un'altra i / limatura di Fe
- campo magnetico intorno a magneti / correnti:
 \mathbf{B} (= $\mathbf{B}(P)$) **vettore induzione magnetica**
(eventualmente se ci sono più sorgenti **$\mathbf{B} = \sum_i \mathbf{B}_i$**)
- la presenza di **\mathbf{B}** si manifesta con una forza magnetica su altri magneti / correnti / cariche in moto



Forza magnetica, definizione di B

- es. f. magnetica su una carica in moto, sperimentalmente

$$|\mathbf{F}| \propto |q|, |\mathbf{v}|, |\mathbf{B}|, |\sin\theta|$$

$$\mathbf{F} \perp \mathbf{v}, \mathbf{B}$$

$$\rightarrow \mathbf{F} = q\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$$

$$F = qvB\sin\theta$$

$$F = 0 \text{ per } \theta = 0, \pi$$

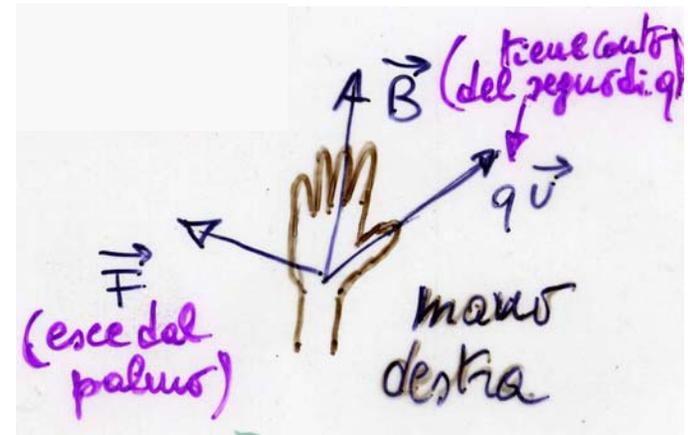
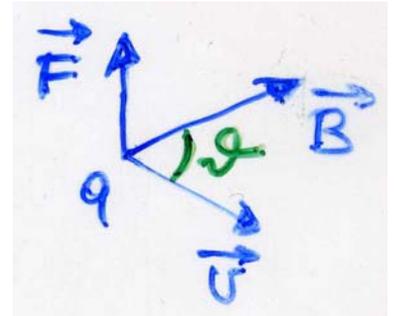
$$F = \pm F_{\max} = \pm qvB \text{ per } \theta = \pi/2, 3\pi/2$$

quindi B può essere definito come

$$\rightarrow \mathbf{B} = \mathbf{F}_{\max} / (qv)$$

B vettore induzione magnetica

direz. $\perp \mathbf{F}, \mathbf{v}$; verso definito dalla regola della mano dx





Unità di B

- unità SI: da $B = F_{\max}/(qv)$,

$$1 \text{ N}/(\text{C}\cdot\text{m}/\text{s}) = 1 \text{ N}/(\text{Am}) = 1 \text{ tesla(T)}$$

oppure

$$1 \text{ N}/(\text{C}\cdot\text{m}/\text{s}) = 1 (\text{N}/\text{C})/(\text{m}/\text{s}) = 1 (\text{V}/\text{m})/(\text{m}/\text{s}) =$$

$$= 1 \text{ V}\cdot\text{s}/\text{m}^2 = 1 \text{ Wb}/\text{m}^2$$

[weber(Wb)]

$$\rightarrow 1 \text{ T} = 1 \text{ Wb}/\text{m}^2$$

- il flusso di B attraverso una superficie $\Phi_B = B_n A$, dove B_n è la componente \perp ad A, si misura in $\text{Wb} = \text{Vs}$
- siccome 1 T è grande, si usa anche il gauss(G), unità del sistema CGSem: $1 \text{ T} = 10^4 \text{ G}$
ad es. $|\mathbf{B}_{\text{terral}}| \approx 0.3 \text{ G}$



Elemento di corrente e forza magnetica

- n di cariche q per unità di volume $\approx 10^{29} \text{ m}^{-3}$ (grande)

- velocità di deriva $v_d \approx 10^{-4} \text{ m/s}$ (piccola)

- in Δt : $\Delta l = v_d \Delta t$, volume “svuotato” = $(v_d \Delta t)A$, $\Delta Q = n(v_d \Delta t A)q$ traversa A in Δt , $i = \Delta Q / \Delta t = n v_d A q$

$$\rightarrow i \Delta l = (n A \Delta l q) v_d = \Delta Q v_d$$

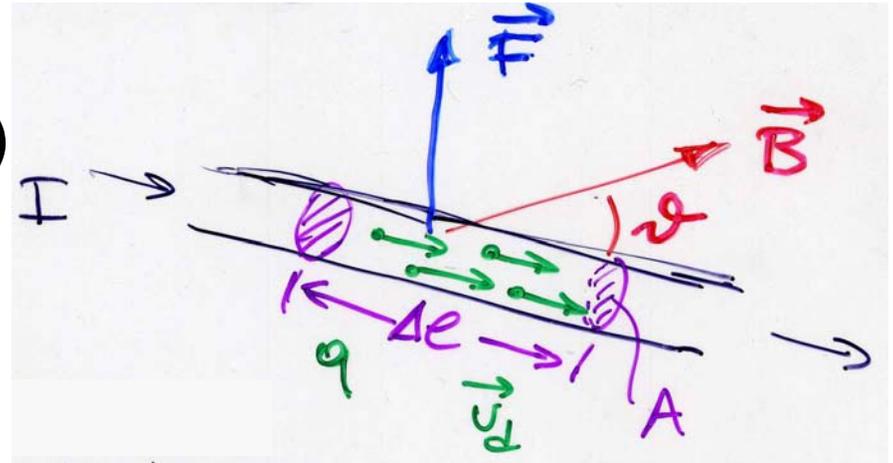
un elemento di corrente
equivale ad una carica in moto

- f. magnetica su un filo percorso da corrente

$$\Delta F = (n \Delta l A q) v_d B \sin \theta = i B \sin \theta \Delta l$$

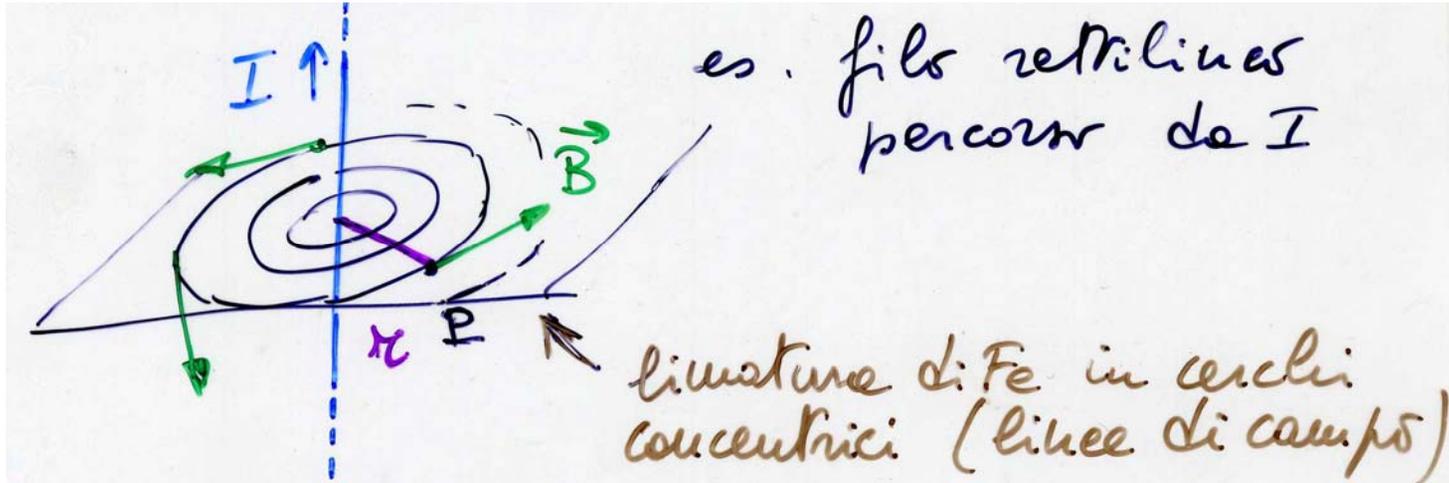
filo rettilineo, B uniforme: $F = i B l \sin \theta$

es. $B = 0.01 \text{ T}$, $l = 1 \text{ m}$, $i = 10^2 \text{ A}$, $\theta = 90^\circ \rightarrow F = 1 \text{ N}$





Sorgenti di B, legge di Biot-Savart



- $|\mathbf{B}| \propto i, 1/r$, mezzo interposto

$$\mathbf{B} \perp \mathbf{v}_d$$

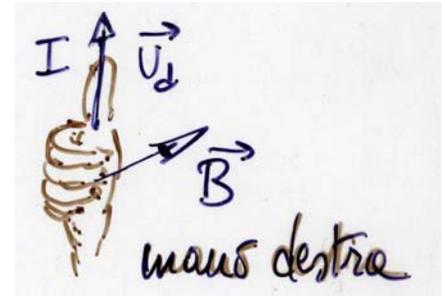
- $B = (\mu_0/2\pi) i/r$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Tm/A (o H/m)}$$

$$(\text{Tm/A} = \text{Wb}/(\text{Am}) = \text{N/A}^2 = (\text{Vs})/(\text{Am}) = \Omega\text{s/m} = \text{henry/m})$$

μ_0 permeabilità magnetica del vuoto

$$\text{es. } i=10^2 \text{ A, } r=1 \text{ cm} \rightarrow B = 2 \cdot 10^{-7} \cdot 10^2 / 10^{-2} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ T} = 20 \text{ G}$$



Forza fra correnti parallele

- due correnti parallele: una produce B, l'altra sente la F (e viceversa)

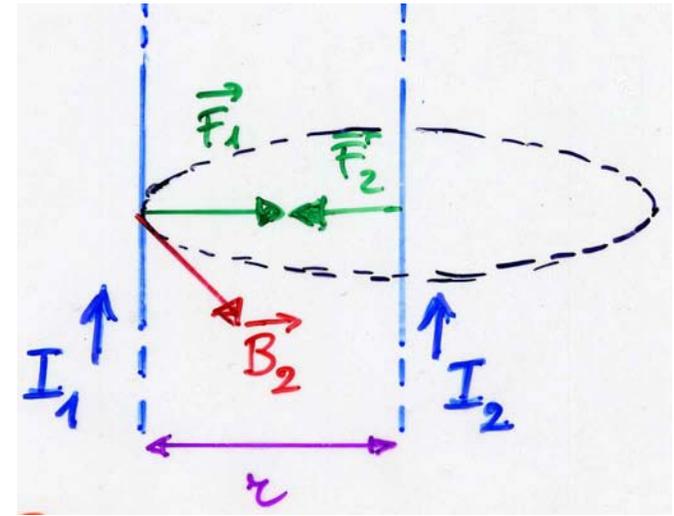
- $B_2 = (\mu_0/2\pi) i_2/r$

$$F_1 = i_1 B_2 \ell \quad (\theta = \pi/2)$$

$$F_1/\ell = (\mu_0/2\pi) i_1 i_2/r \quad (= F_2/\ell)$$

la f. per unità di lunghezza è \propto alle correnti, ad $1/r$ e dipende dal mezzo interposto: correnti parallele si attraggono, c. antip. si respingono

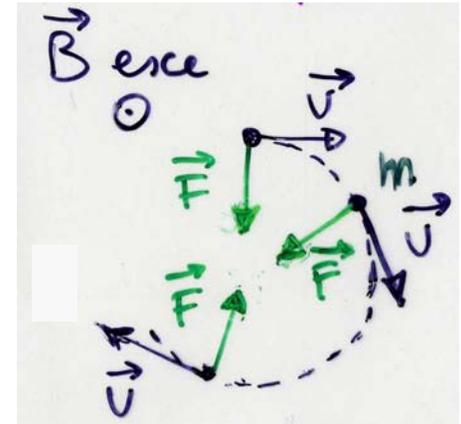
- def. operativa di ampère: due correnti parallele di 1 A distanti 1m, esercitano una forza di $2 \cdot 10^{-7}$ N/m l'una sull'altra





Moto di cariche in campo magnetico

- in **B**: **F** sempre $\perp \mathbf{v} \rightarrow \mathcal{L} = 0$
 $K = \frac{1}{2}mv^2 = \text{cost} \quad |\mathbf{v}| = \text{cost}$
varia solo la direzione di **v**
- caso semplice: $\mathbf{v} \perp \mathbf{B} \rightarrow$ orbita circolare
(altrimenti elicoidale); dal II principio



$$ma = mv^2/r = F = qvB$$

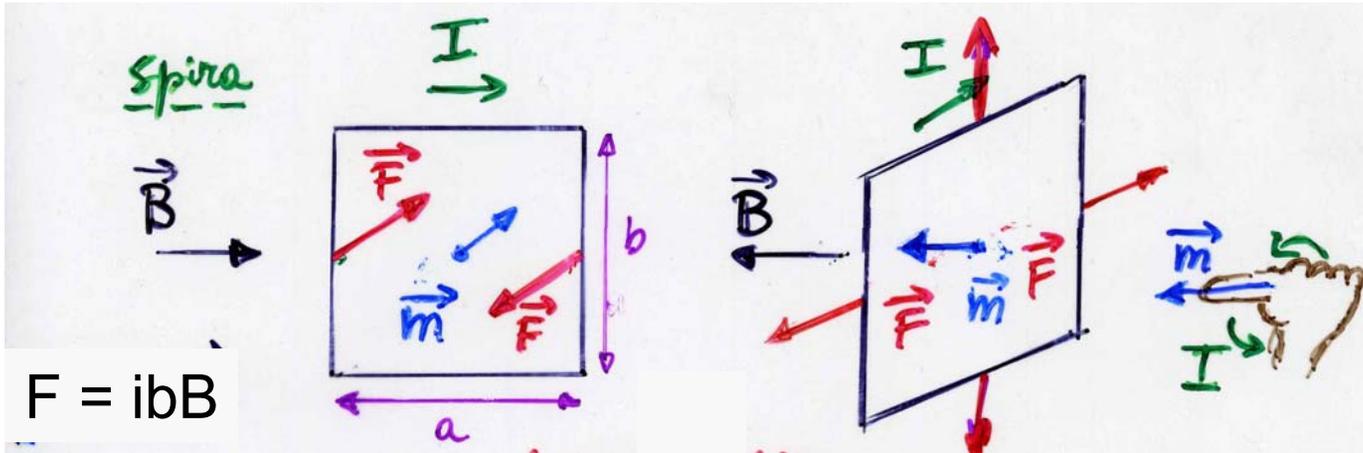
$$r = mv/(qB)$$

è il raggio dell'orbita del moto circolare uniforme;

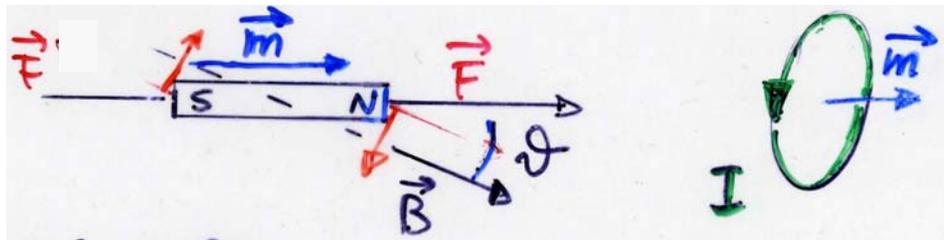
$$v = v/(2\pi r) = qB/(2\pi m)$$

frequenza di ciclotrone (indipendente da v e r)

Momenti di forza su spire e magneti

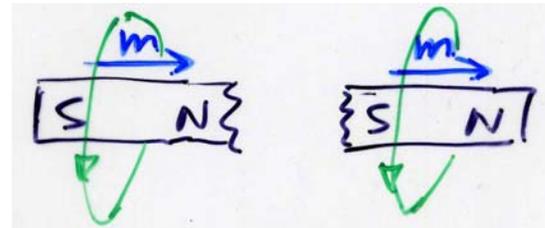


- momento magnetico: $|\mathbf{m}| = iab = iA$ unità SI: Am^2
- $\mathbf{B} \parallel$ alla spira: $M = Fa = iabB = mB$
- $\mathbf{B} \perp$ spira: $M = 0$ (equilibrio, f. tendono a deformare la spira)
- in generale: $\mathbf{M} = \mathbf{m} \wedge \mathbf{B}$ $M = mB \sin\theta$
- bobina, N spire: $m = NiA$
- magneti:

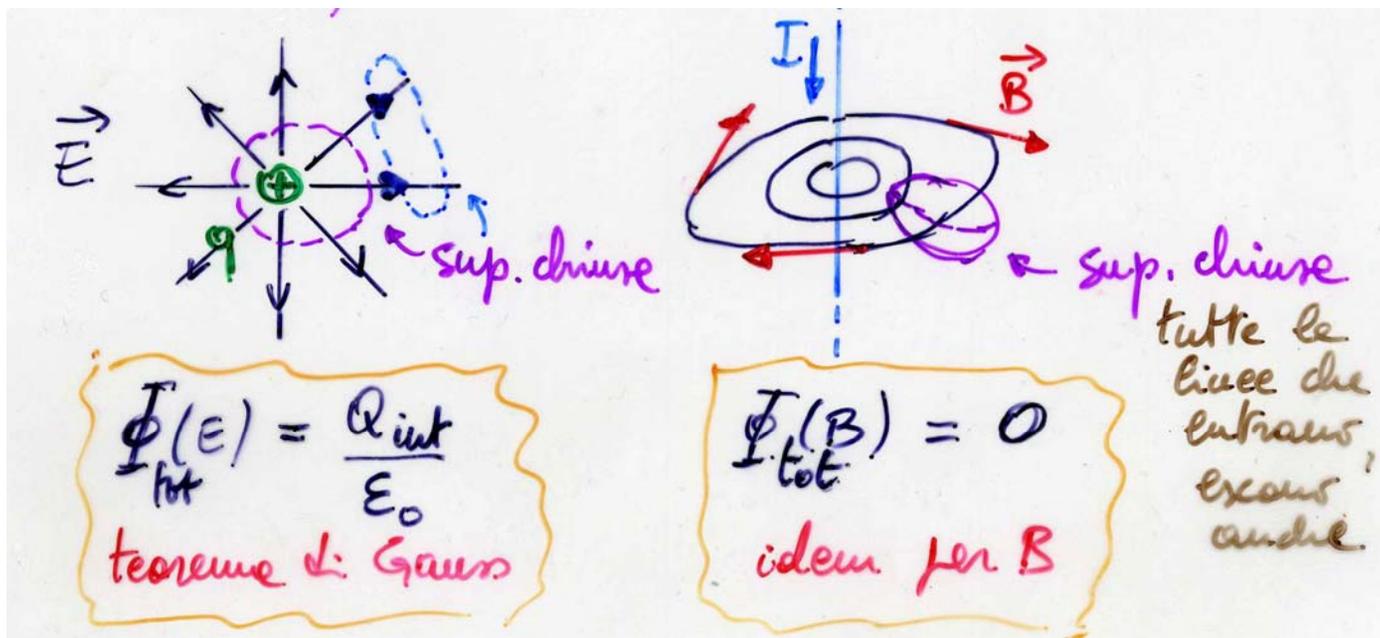


Teorema di Gauss per \mathbf{B}

- un magnete permanente può essere considerato come un insieme di spire (moti orbitali di e^- spaiati, spin): dividendolo otteniamo due magneti \rightarrow in natura non si trovano poli magnetici isolati
- \rightarrow le linee di \mathbf{B} sono linee chiuse, non ci sono 'cariche' sorgenti (come nel caso di \mathbf{E}): $\Phi(\mathbf{B})$ attraverso



superficie chiusa è sempre uguale a 0 (teorema di Gauss per \mathbf{B})

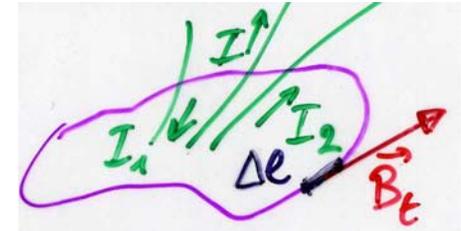


Teorema di Ampère

- B origina da una corrente → legge o teorema di Ampère

$$\sum_{l.c.} B_t \Delta l = \mu_0 i_{tot} \quad (\oint \mathbf{B} \times d\mathbf{l} = \mu_0 i_{tot})$$

somma (integrale) di B_t su una linea chiusa, i_{tot} somma correnti concatenate con l.c.:
 permette di trovare B se il problema è simmetrico

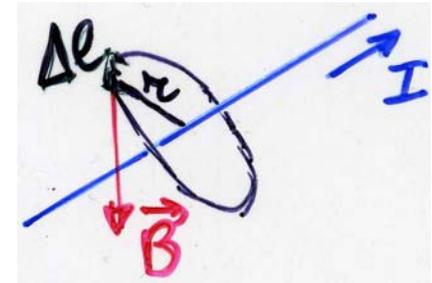


- **es. 1 filo rettilineo**: sappiamo che le linee di B sono chiuse → per simmetria circonferenze $B(r) = B_t = \text{cost}$,

$$\sum_i B_t \Delta l_i = B_t \sum_i \Delta l_i = B_t 2\pi r = \mu_0 i$$

$$\rightarrow B(r) = (\mu_0/2\pi) i/r$$

e si ritrova la legge di Biot-Savart



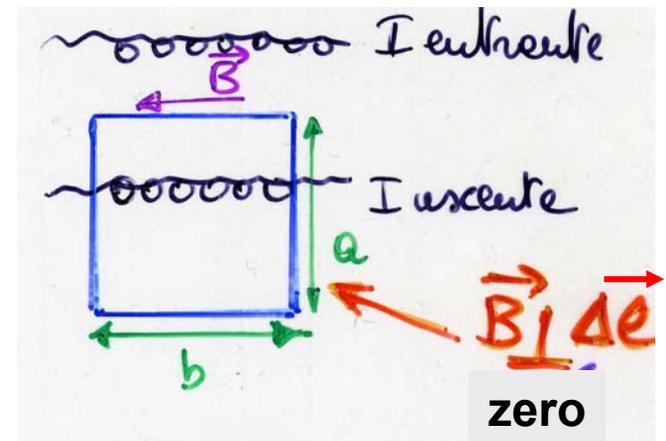
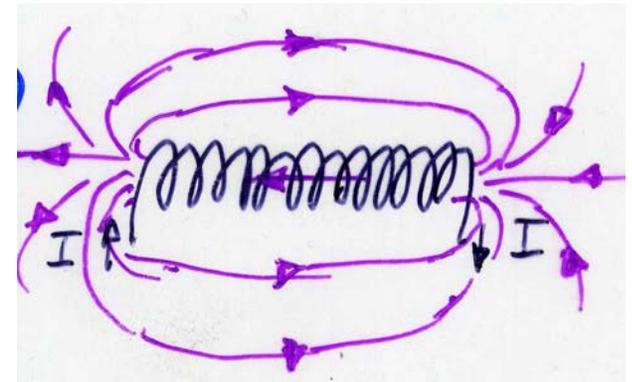
Solenoide

- **es. 2 solenoide**: se è abbastanza lungo, B sarà \parallel all'asse all'interno e debole all'esterno
- I.c.: un rettangolo di lati a, b ; \mathbf{B} è sempre \perp ai lati a , se $a \rightarrow \infty$ rimane solo il contributo bB all'interno, il resto è zero

$$\sum_i B_t \Delta \ell_i = bB + 0 = \mu_0 N b i / \ell$$

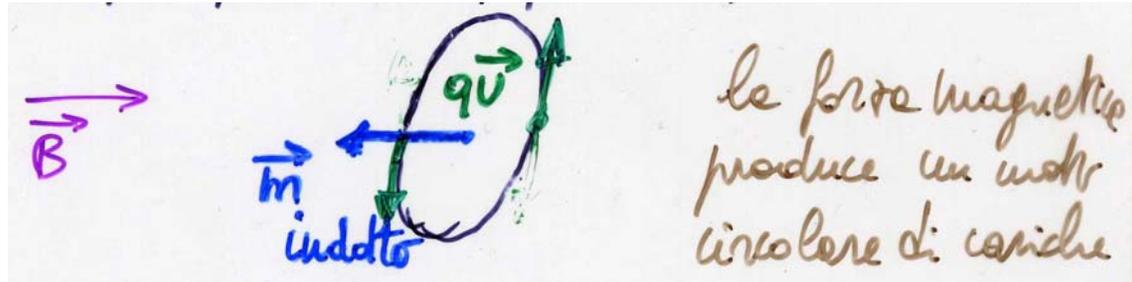
$$B = \mu_0 N i / \ell \quad \text{solenoide}$$

dove N è il numero di spire e ℓ la lunghezza del solenoide (\mathbf{B} risulta uniforme all'interno, lontano dagli estremi)



Proprietà magnetiche dei materiali

- diamagnetismo, \mathbf{m} indotto opposto a \mathbf{B} (sempre presente, piccolo)



$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0(1 + \chi_m) = \mu_r \mathbf{B}_0$$

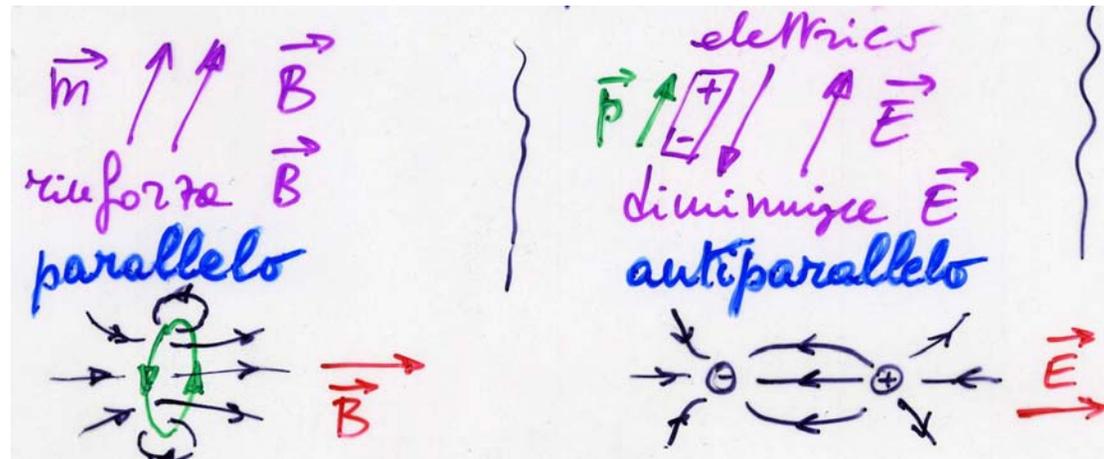
con \mathbf{B}_0 nel vuoto; $\chi_m \sim -10^{-5}$ (metalli) $-10^{-8} \div -10^{-9}$ (gas) è la suscettività magnetica, μ_r la permeabilità magn. relativa

- paramagnetismo, ferromagnetismo (materiali con \mathbf{m} permanenti, e^- spaiati, domini magnetici)

param.: debole, +vo

ferrom.: forte, $\chi = \chi(B_0)$,

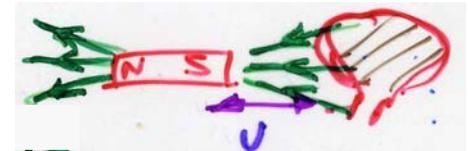
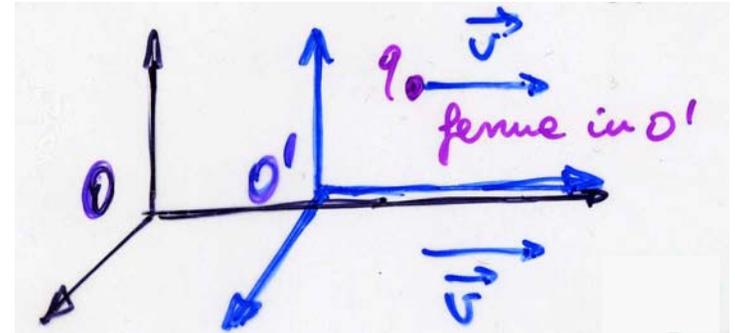
$T < T_{\text{curie}}$, domini allineati





Induzione e.m.

- principio di relatività: due osservatori in moto relativo rettilineo e uniforme devono poter scrivere le stesse leggi fisiche
- O vede \mathbf{E} & \mathbf{B} ; O' vede solo \mathbf{E}
→ non c'è simmetria (se \mathbf{E} e \mathbf{B} non sono legati fra loro)
- alternativamente, siccome
 - (\mathbf{E}) cariche in moto → \mathbf{B}per simmetria (non completa, non \exists cariche magnetiche!)
 - (\mathbf{B}) variabile → accelerazione di cariche
- fem indotta
 - magneti in moto verso una spira (o viceversa)
 - spira 1 percorsa da i in moto verso spira 2
 - i variabile nella spira 1 vista dalla spira 2 (o da se stessa)





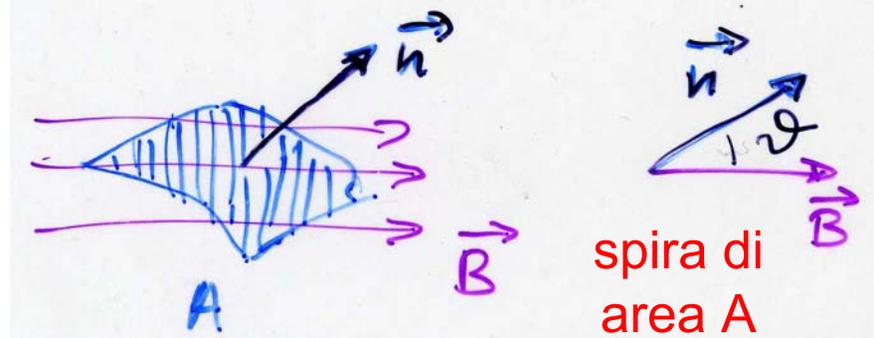
Legge di Faraday-Neumann-(Lenz)

- in ciascun caso varia $\Phi_m = \Phi(\mathbf{B})$ attraverso una ∇ superficie A delimitata dalla spira

$$\Phi_m = B_n A = BA \cos \theta$$

$$\Delta \Phi_m = B \Delta A \cos \theta$$

in genere possono variare \mathbf{B} , A, θ



- N spire (bobina): $\Phi_m = NB_n A = NBA \cos \theta$
- unità SI del flusso di B: 1 weber(Wb) = 1 Wb/m²·m²
- quando Φ_m varia in t su A, si ha una fem indotta ai capi della spira (aperta)

$$\mathcal{E} = -\Delta \Phi_m / \Delta t$$

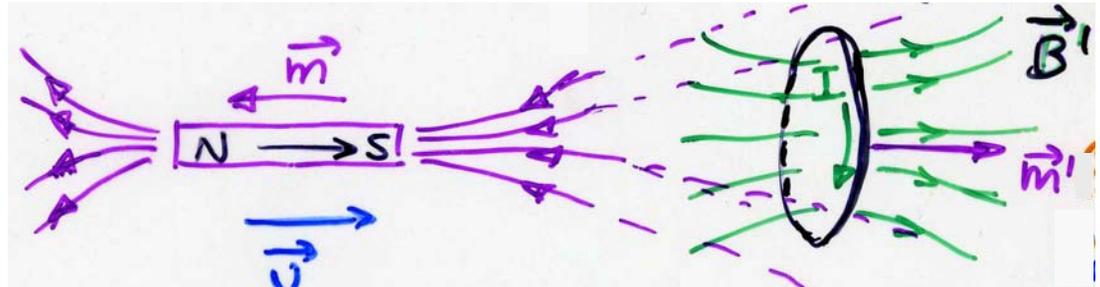
(un B statico non fa lavoro, uno variabile sì)

unità SI: 1 V = 1 Wb/s

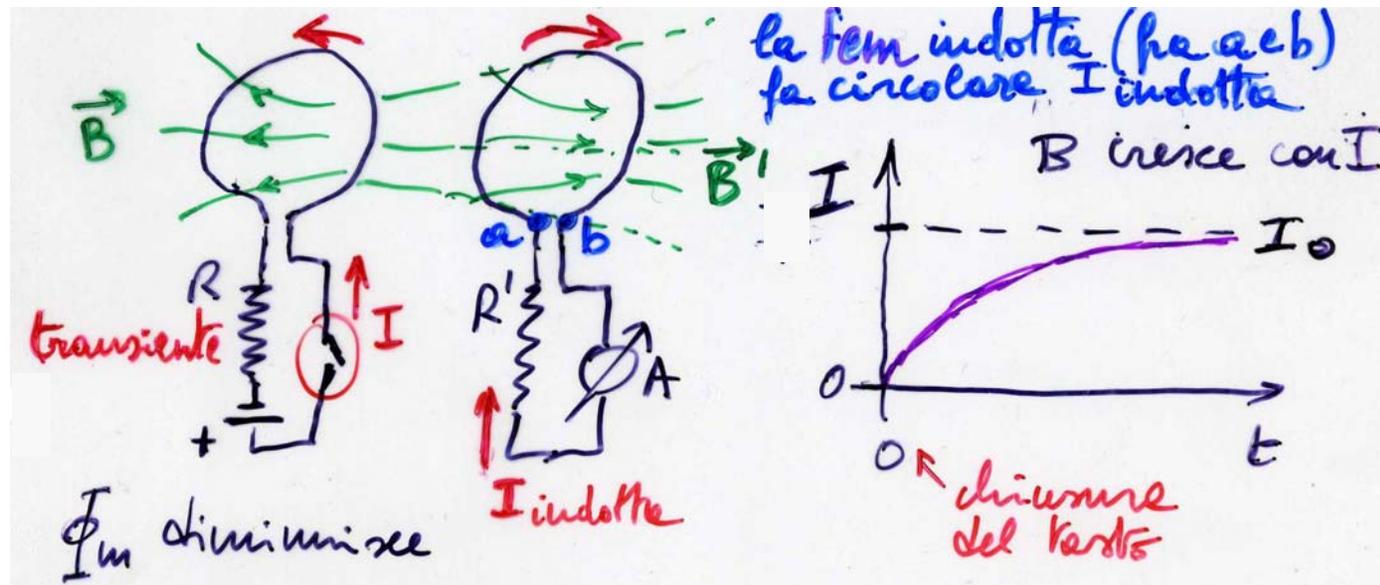
→ 1 Wb = 1 Vs

Legge di (Faraday-Neumann-)Lenz

- Lenz: la fem indotta si oppone al $\Delta\Phi_m$ (cons. energia) \rightarrow segno $-vo$; es.: Φ_m diminuisce, la i indotta produce un $\mathbf{B}' \rightarrow \Phi'_m$ in senso opposto, ossia risulta una \mathbf{F} che si oppone al moto

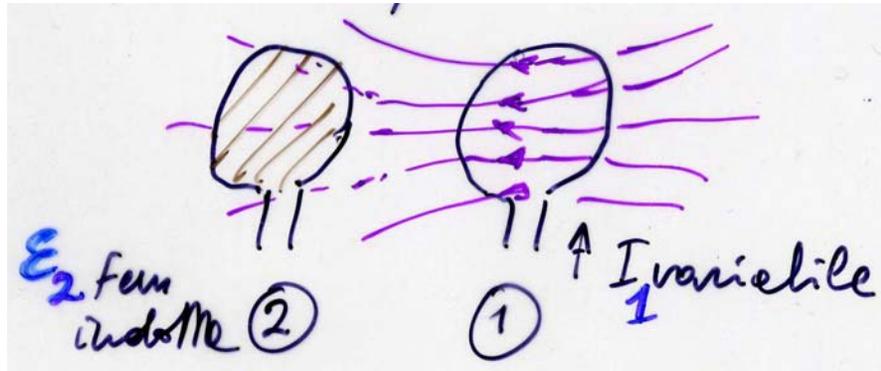


- Lenz: fem indotta fra due bobine, la corrente non cresce istantaneamente. nella 1^a spira



Mutua induzione

- nel caso di circuiti $B \propto i$, $\Delta\Phi_m \propto \Delta i$ (nel primario)



- $$\mathcal{E}_2 = -\Delta\Phi_2/\Delta t = -M_{21}\Delta i_1/\Delta t$$

$$\mathcal{E}_1 = -\Delta\Phi_1/\Delta t = -M_{12}\Delta i_2/\Delta t$$

$$M = M_{21} = M_{12} \text{ mutua induttanza (dipende dalla geometria dei circuiti)}$$
- unità SI: 1 henry(H) = 1 Wb/A = 1 V.s/A = 1 Ω s

Autoinduzione ed induttanza

- consideriamo un solo circuito,
 $B \propto i \rightarrow$ variazione di $E \rightarrow$
 Φ_m variabile \rightarrow fem opposta
 alla prima variazione di i

$$\Phi_m = Li$$

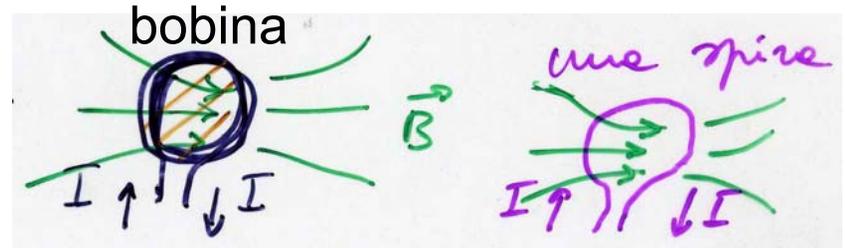
L - autoinduzione o induttanza

$$\mathcal{E} = -\Delta\Phi_m/\Delta t = -L\Delta i/\Delta t$$

- es. solenoide

$$B = \mu_0 Ni/\ell \rightarrow \Phi_m = NBA = \mu_0 N^2 Ai/\ell$$

$$L = \Phi_m/i = \mu_0 N^2 A/\ell$$





Energia immagazzinata nell'induttanza

- per far passare Δq attraverso L

$$\Delta \mathcal{L} = -\mathcal{E} \Delta q = L(\Delta i / \Delta t) i \Delta t = Li \Delta i$$

energia necessaria a creare un $B(t)$ in L

$$K = \mathcal{L} = \frac{1}{2} Li^2$$

(cfr. condensatore $W = \frac{1}{2} q^2 / C$) – un campo magnetostatico non può fare lavoro, una variabile si

- **es. solenoide**

$$B = \mu_0 Ni / \ell \rightarrow i = B \ell / \mu_0 N; \quad L = \mu_0 N^2 A / \ell$$

$$K = \frac{1}{2} (\mu_0 N^2 A / \ell) (B \ell / \mu_0 N)^2 = \frac{1}{2} (B^2 / \mu_0) (A \ell)$$

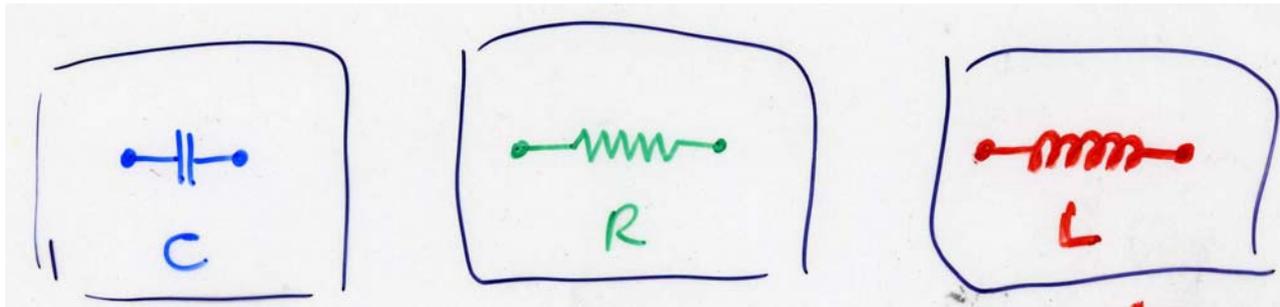
energia magnetica per unità di volume

$$\eta_m = \frac{1}{2} B^2 / \mu_0.$$

$$(cfr. \eta_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2)$$



Lavoro ed energia nei circuiti elettrici

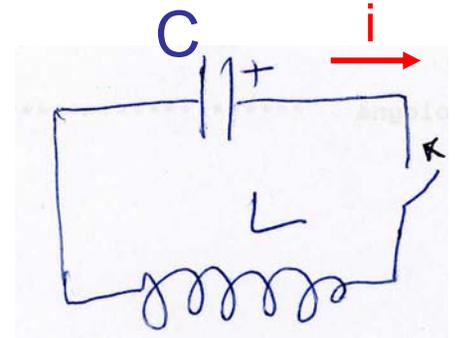


- $V = q/C$
 - $\mathcal{L} = q^2/(2C)$
energia di E
 - $\eta_e = \epsilon_0 E^2/2$
[J/m³]
 - circuito RC → i esponenziale in t $\tau = RC$ (transiente)
 - “ RL → i “ “ “ $\tau = L/R$ “
 - “ LC → i oscillante $T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{LC}$
- | | |
|--|--|
| $V = Ri$
($i = dq/dt$) | $V = L di/dt$
($di/dt = d^2q/dt^2$) |
| $\mathcal{L} = Ri^2 t$
calore
(dissipazione) | $\mathcal{L} = Li^2/2$
energia di B |
| | $\eta_m = B^2/(2\mu_0)$
[J/m ³] |



Circuito LC

- $t = 0$, C carico, $q = q_0$
- chiudo il tasto: comincia a circolare i (le cariche + migrano verso l'armatura sinistra) ed entra in azione L, l'energia presente in C (E) passa in L (B), il processo continua finchè i diventa max e C è scarico ($q=0$), a quel punto i continua a caricare + l'armatura sinistra e l'energia presente in L (B) è trasferita a C (E) ... e così via sempre oscillando (non ci sono R!)



- Kirchhoff, a t generico: $L di/dt + q/C = 0$
ossia $L d^2q/dt^2 + q/C = 0$

cioè $d^2q/dt^2 = -1/(LC)q = -\omega^2q$

$q(t) = q_0 \cos \omega t$

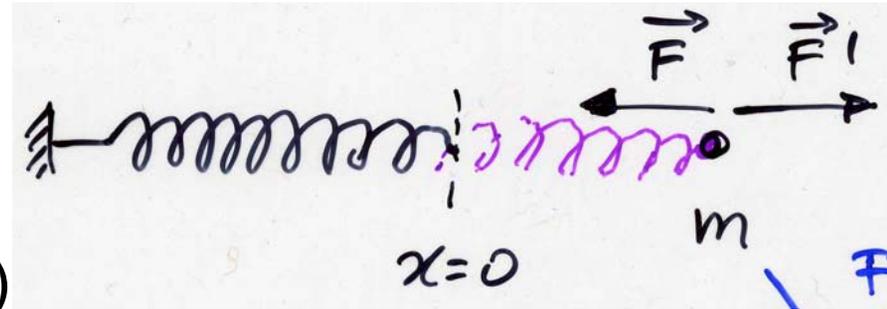
soluzione del moto armonico

$i(t) = dq/dt = -\omega q_0 \sin \omega t$



Confronto col sistema massa-molla

- una massa oscilla attaccata ad una molla (ad es. sopra un piano senza attriti)
- per spostare la massa (molla) dalla posizione di eq.:



$$d\mathcal{L} = Fdx = -kxdx$$

$$\mathcal{L} = \int_0^x -kxdx = -k \int_0^x xdx = -\frac{1}{2}kx^2$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}kx^2 = W(x) - W(0)$$

$$W(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{se pongo } W(0) = 0$$

$$\text{A spostamento massimo } W(A) = \frac{1}{2} kA^2$$

$$\text{en. cinetica della massa } K = \frac{1}{2} mv^2$$

$$W(x) + K(x) = E_0$$



Fine dell'elettromagnetismo