

Oscillazioni



Corso di Fisica per CTF
AA 2013/14

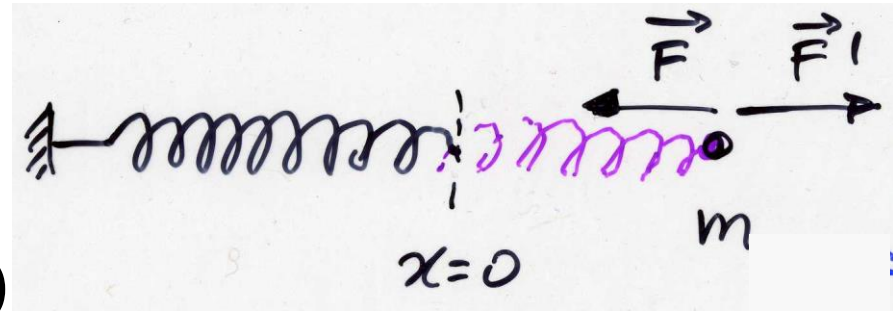


- Oscillazioni
 - sistema massa-molla, pendolo semplice
 - oscillazioni smorzate; oscillazioni forzate, risonanza



Sistema massa-molla

- una massa oscilla attaccata ad una molla (ad es. sopra un piano senza attriti)
- per spostare la massa (molla) di dx dalla posizione (allungamento) x :



$$d\mathcal{L} = Fdx = -kxdx$$

$$\mathcal{L} = \int_0^x -kxdx = -k \int_0^x xdx = -\frac{1}{2}kx^2 \quad (\text{dalla posiz. di equilibrio a } x)$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}kx^2 = W(x) - W(0)$$

$$W(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{se pongo } W(0) = 0$$

$$A, \text{ spostamento massimo: } W(A) = \frac{1}{2} kA^2$$

$$\text{en. cinetica della massa: } K = \frac{1}{2} mv^2$$

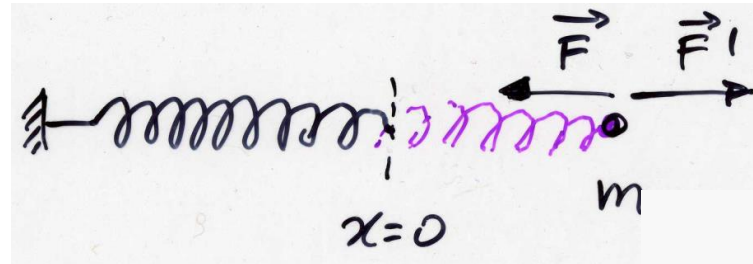
$$W(x) + K(x) = E_0$$

$$[W(t) + K(t) = E_0$$

conserv. en. totale meccanica

siccome $x = x(t)$, $v = v(t)$!]

Energia nei sistemi meccanici



en. della molla (potenziale)

$$W = \frac{1}{2}kx^2$$

ampiezza del moto A

en. totale: $E_0 = W(x) + K(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$

pongo

$$\omega^2 = k/m = (v_{\max}/A)^2$$

eq. di moto

$$a = -(k/m)x = -\omega^2x$$

(Il princ.: $ma = F = -kx$)

soluzione con $x=+A$ per $t=0$, **matematicamente:**

$$x(t) = A\cos\omega t$$

moto armonico semplice

$$v(t) = -\omega A\sin\omega t \quad (=dx/dt)$$

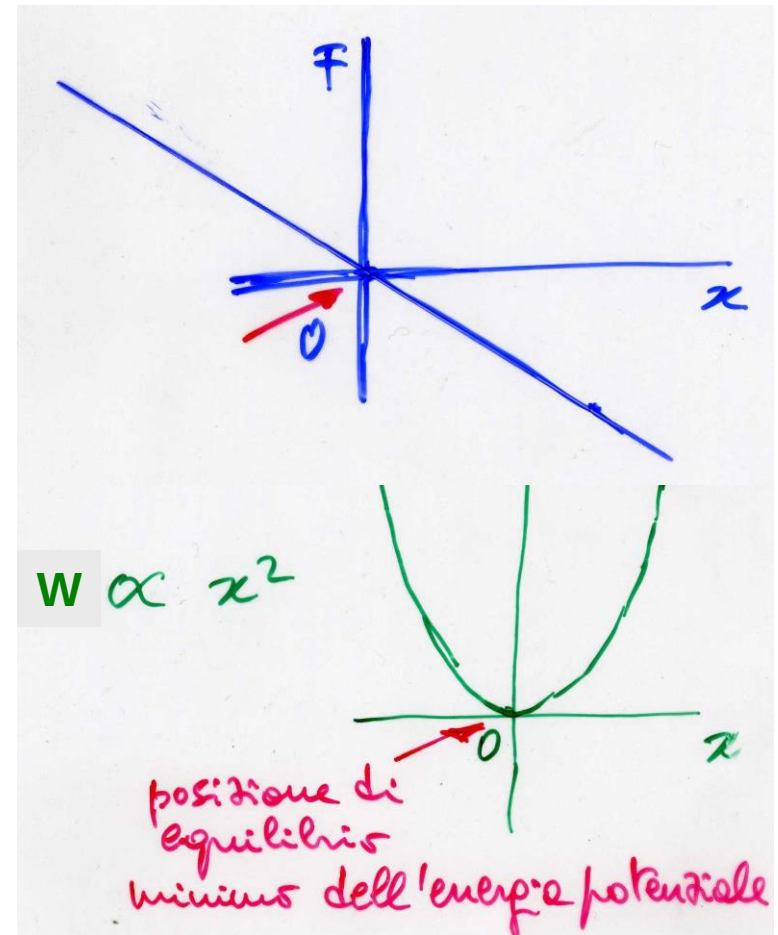
$$a(t) = -\omega^2 A\cos\omega t \quad (=dv/dt)$$

[per una dimostrazione vedi oltre]

Oscillazioni armoniche

- in generale: un sistema oscilla intorno ad una posizione di equilibrio stabile – con moto armonico semplice se la F di richiamo verso la posizione di eq. stabile è $\propto -\text{spostamento}$ e c'è un'inerzia che fa superare la posiz. di equil. continuando il moto (piccole oscillazioni del pendolo, massa-molla, circuito LC, molecola H_2)

- $F(x) \propto -x$ k $(a \propto -x)$
- $W(x) = -\mathcal{L}(x) \propto x^2/2$ m





Oscillazione (passo passo)

- trasferimento: en. cinetica $\longleftrightarrow$ en. potenziale

t	x	v	a	en.	E_0
0	+A	0	$-\omega^2 A$	pot.	$\frac{1}{2}kA^2$
t_1	0	$-\omega A$	0	cin.	$\frac{1}{2}mv_{\max}^2$
t_2	-A	0	$+\omega^2 A$	pot.	$\frac{1}{2}kA^2$
t_3	0	$+\omega A$	0	cin.	$\frac{1}{2}mv_{\max}^2$
t_4	+A	0	$-\omega^2 A$	pot.	$\frac{1}{2}kA^2$

sposto il sistema
dall'equilibrio e
lo lascio andare

il moto si ripete uguale

- $t_4 = T$; $t_2 = t_4/2 = T/2$ per simmetria
 $t_1 = t_2/2 = T/4$; $t_3 = t_2 + (t_4 - t_2)/2 = 3T/4$ per simmetria
- $\omega = \sqrt{k/m} = v_{\max}/A \rightarrow v_{\max} = \omega A$



Soluzione (senza derivate)

- uso la cons. dell'en. meccanica (e $m=k/\omega^2$)

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \cancel{\frac{1}{2}kA^2}(x/A)^2 + \cancel{\frac{1}{2}kA^2}(v/(\omega A))^2 = \cancel{\frac{1}{2}kA^2}$$

$$\rightarrow (x(t)/A)^2 + (v(t)/(\omega A))^2 = 1 \quad \text{cfr } \cos^2\Phi + \sin^2\Phi = 1 \quad \forall \Phi$$

- se voglio x e v periodiche con periodo T prendo

$$x(t)/A = \cos(2\pi t/T) \qquad v(t)/(\omega A) = -\sin(2\pi t/T)$$

che soddisfano $x=A$ per $t=0$ e $v(T/4) = -v_{\max} = -\omega A$

- T è un tempo caratteristico del sistema

$$T = 1/\nu = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$$

l'unico **dimensionalmente** possibile

$$[\omega^{-1}] = [(m/k)^{0.5}] = [(M/(MT^{-2}))^{0.5}] = [T]$$



Oscillazioni (cont.)

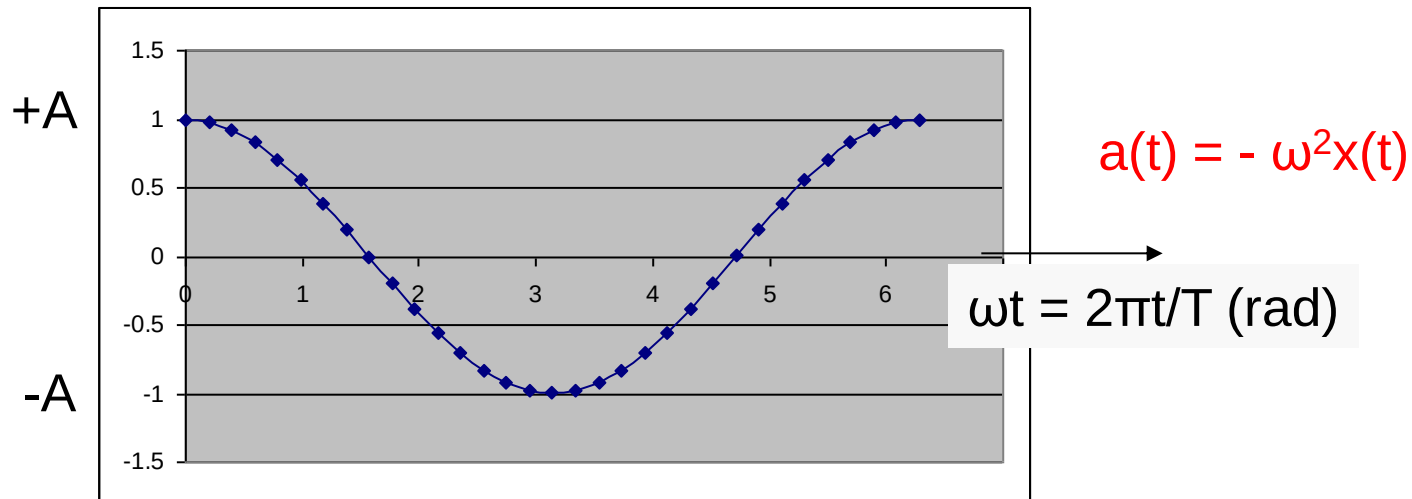
- tutte le oscillazioni si comporteranno allo stesso modo, cambia solo ω (T) a seconda del sistema e cambia lo spostamento dalla posiz. di equilibrio (distanza, angolo, carica)
- massa-molla $\omega = \sqrt{k/m}$ $T = 2\pi\sqrt{m/k}$
- pendolo semplice $\omega = \sqrt{g/L}$ $T = 2\pi\sqrt{L/g}$
- [circuito LC $\omega = 1/\sqrt{LC}$ $T = 2\pi\sqrt{LC}$]
- etc.
- spostamenti, velocità (lineari, angolari, correnti), accelerazioni (lineari, angolari, derivata della corrente) saranno tutti dati da funzioni sinusoidali (moto armonico semplice di pulsazione $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$)

piccole
oscillaz.

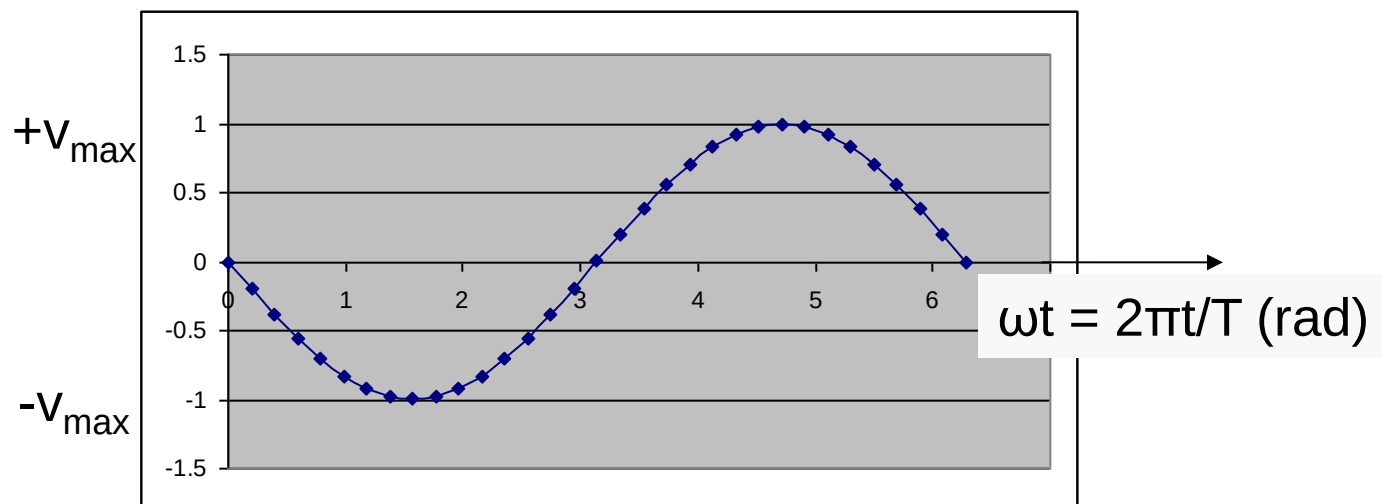


Oscillazioni (cont)

$x(t)$



$v(t)$



Pendolo semplice

- $mg \cos\theta = F$ *tensione del filo*

- $-\cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}a = \cancel{m}L\alpha$

- piccole oscill.: θ_0 piccolo

$\rightarrow \sin\theta \sim \theta$

- $-g\theta = L\alpha$ ($= Ld^2\theta/dt^2$)

$\omega^2 = g/L$

$T = 2\pi\sqrt{L/g}$

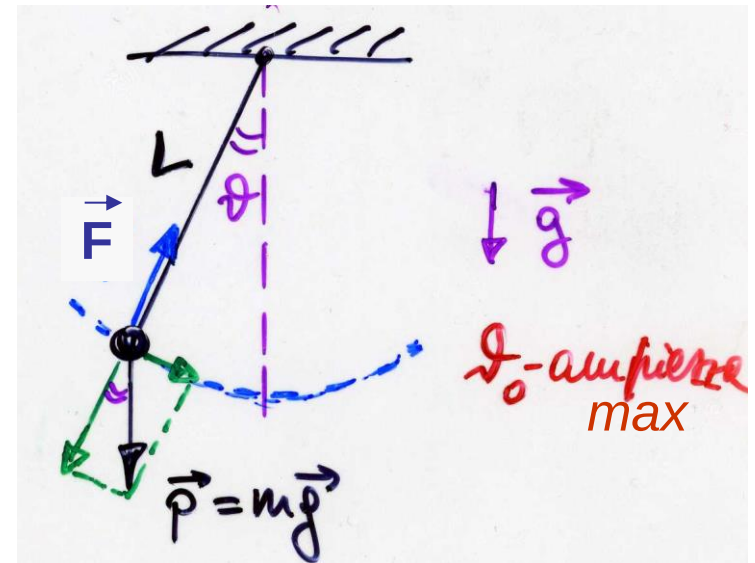
indipendenti da θ_0

$g = 4\pi^2 L/T^2$

misurando $L, T \rightarrow g$

- (*) [pendolo fisico: $m \rightarrow I$; $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{M} = \mathbf{L} \wedge (m\mathbf{g})$
 $-mgL\sin\theta = I\alpha$; $-mgL\theta = I\alpha$; $T = 2\pi\sqrt{mgL/I}$

con L distanza del baricentro dal centro di sospensione]



(*) paragrafo facoltativo



Angoli piccoli (*)

$$\theta = 90^\circ = 1.5708 \text{ rad}$$

$$\sin \theta = 1$$

$$(\sin \theta - \theta) / \sin \theta = -0.57$$

$$\theta = 30^\circ = 0.5236 \text{ rad}$$

$$\sin \theta = 0.5$$

$$(\sin \theta - \theta) / \sin \theta = -0.047$$

$$\theta = 3^\circ = 0.05236 \text{ rad}$$

$$\sin \theta = 0.05234$$

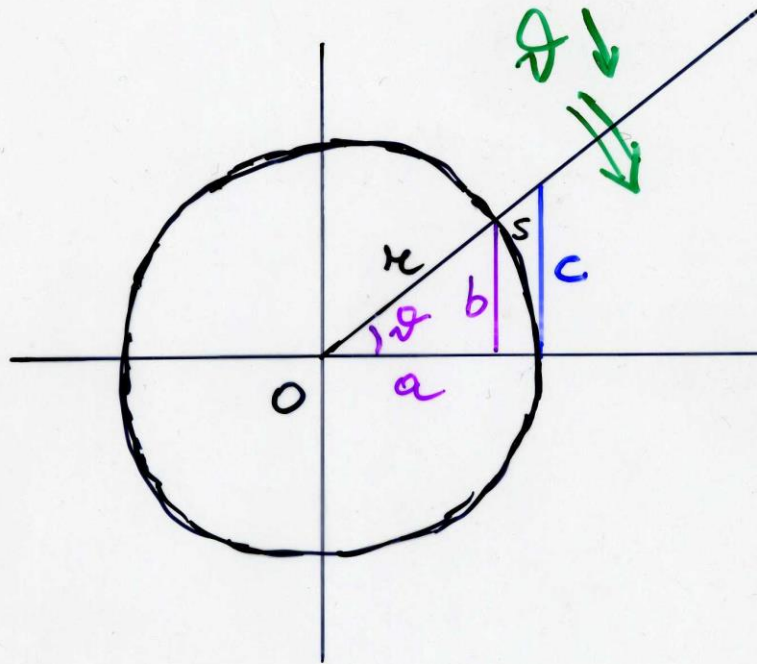
$$\text{tg} \theta = 0.05241$$

$$(\sin \theta - \theta) / \sin \theta =$$

$$= -0.00046$$

$$(\text{tg} \theta - \theta) / \text{tg} \theta =$$

$$= +0.00091$$



$$\sin \vartheta = \frac{b}{r}$$

$$\cos \vartheta = \frac{a}{r}$$

$$\text{tg} \vartheta = \frac{b}{a} = \frac{c}{r}$$

$$\vartheta = \frac{s}{r}$$

$$\frac{b}{r} < \frac{s}{r} < \frac{c}{r} (= \frac{b}{a})$$

$$\sin \vartheta < \vartheta < \text{tg} \vartheta$$

(I quadrante)

$$\vartheta \text{ piccoli: } \sin \vartheta \sim \vartheta \sim \text{tg} \vartheta$$

(*) facoltativo ma utile

Oscillazioni smorzate (*)

- sistema massa-molla **con attrito**

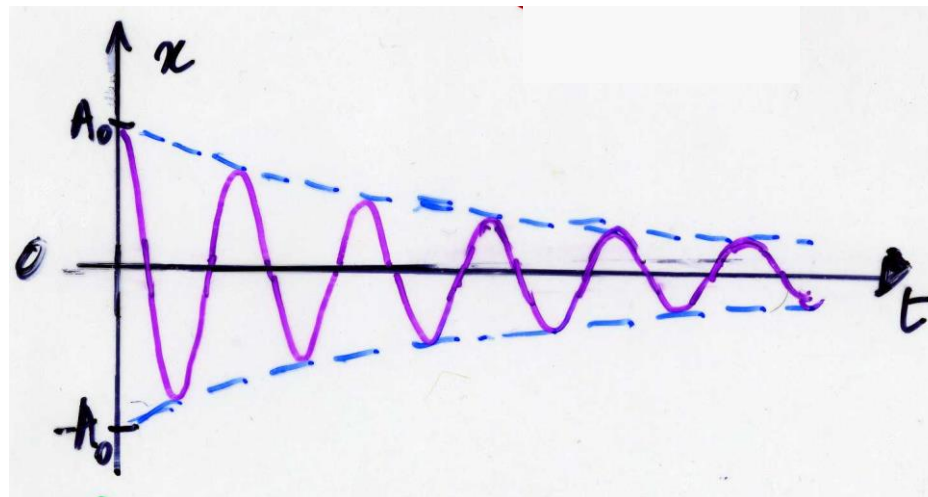
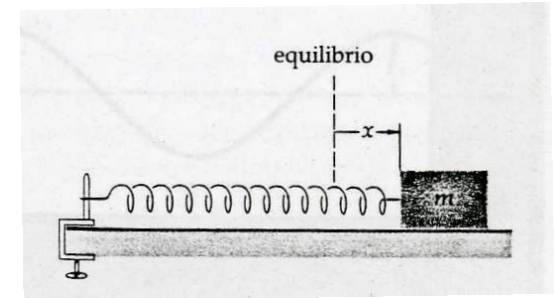
$$ma + \gamma v + kx = 0 \quad \text{termine } \propto v, \text{ attrito, smorzamento}$$

- $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2(t) < \frac{1}{2}kA_0^2$

ad es. $A(t) = A_0 \exp[-\gamma t/(2m)]$

- se $\gamma \geq 2\sqrt{km}$ il moto è aperiodico

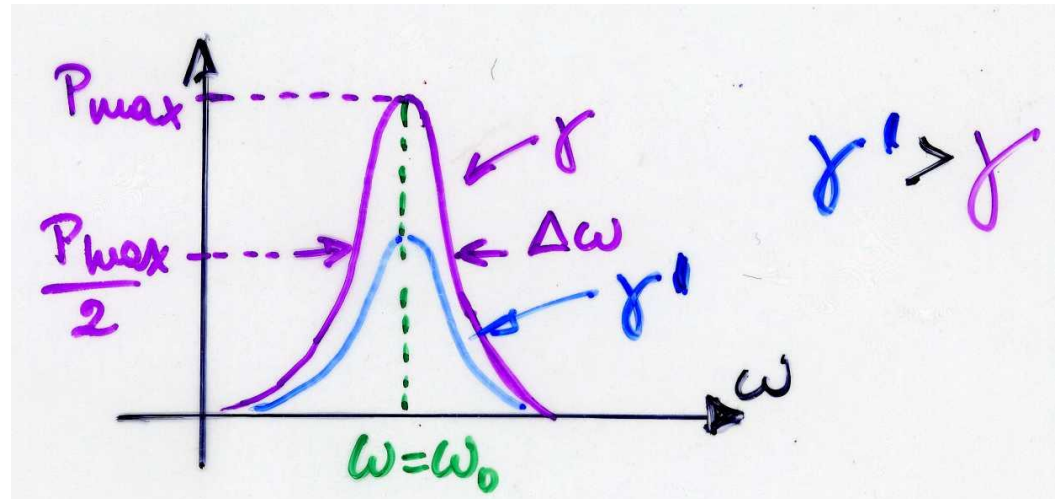
se $\gamma < 2\sqrt{km}$ oscillazione con A decrescente





Oscillazioni forzate, risonanza (*)

- sistema sottoposto ad una F esterna sinusoidale
 $ma + (\gamma v) + kx = F(t) = F_e \cos \omega t$
 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ $\nu_0 = \omega_0/2\pi$ **frequenza propria del sistema**
- se $\gamma=0$ il trasferimento di energia diventa ∞ per $\omega=\omega_0$
(in pratica si avrà una 'rottura')
- se $\gamma \neq 0$ il trasferimento di energia (potenza) è max per $\omega=\omega_0$: es. assorb. di radiazione e.m. da parte di atomi e molecole





Oscillazioni, applicazione (*)

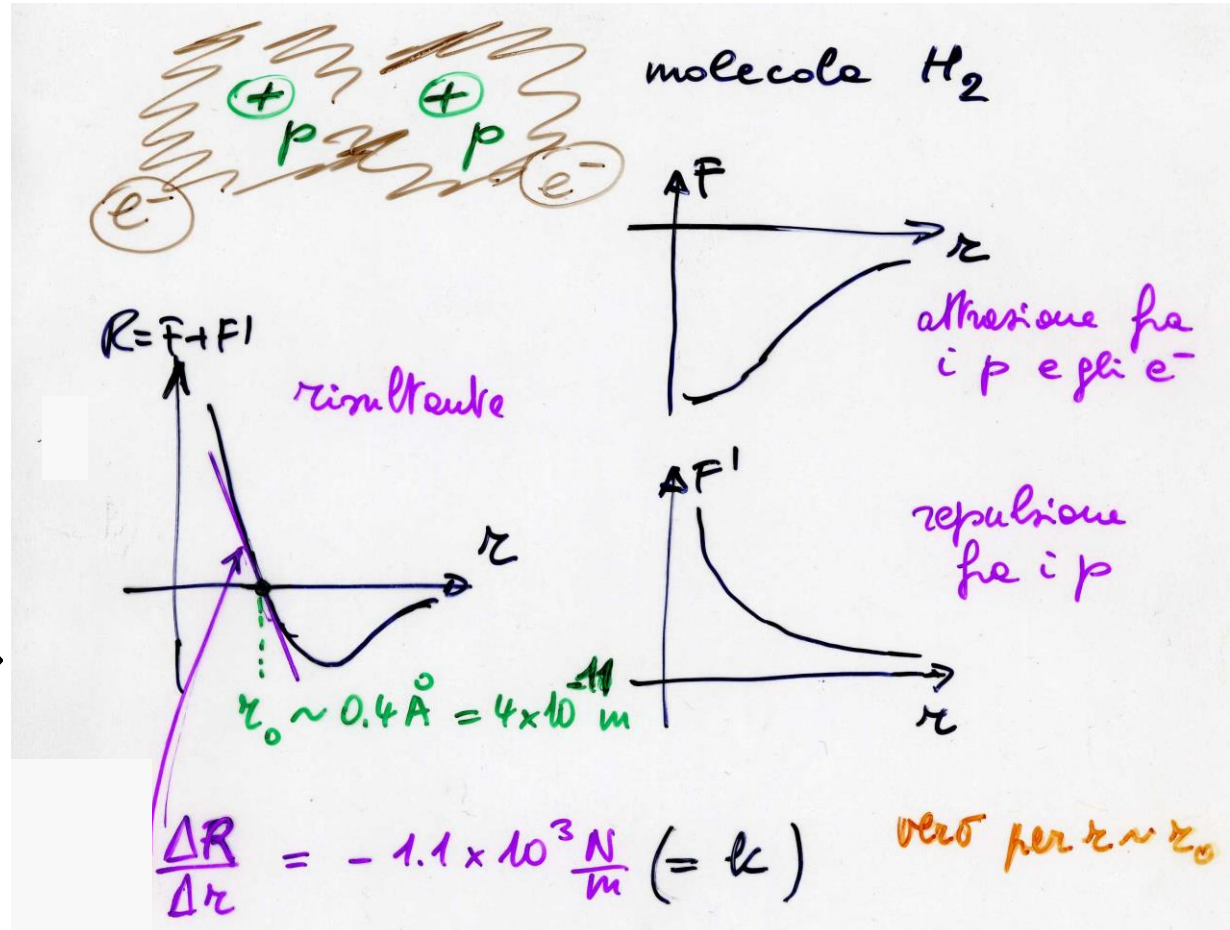
- molecola H_2 $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{1.1 \cdot 10^{-3} / 1.67 \cdot 10^{-27}} \sim 0.8 \cdot 10^{15} \text{ rad/s}$

$$\nu = 1.3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$$

$$\lambda = c/\nu = 2.5 \text{ } \mu\text{m}$$

(vedi Onde)

→ se si eccita H_2 con luce IR, si metterà ad oscill., assorbirà energia e posso «vederlo»



(*) facoltativo



Two cowboys marvelling at the
Doppler effect in a train whistle

Fine delle oscillazioni