

# Oscillazioni e onde



Corso di Fisica per CTF  
AA 2006/07



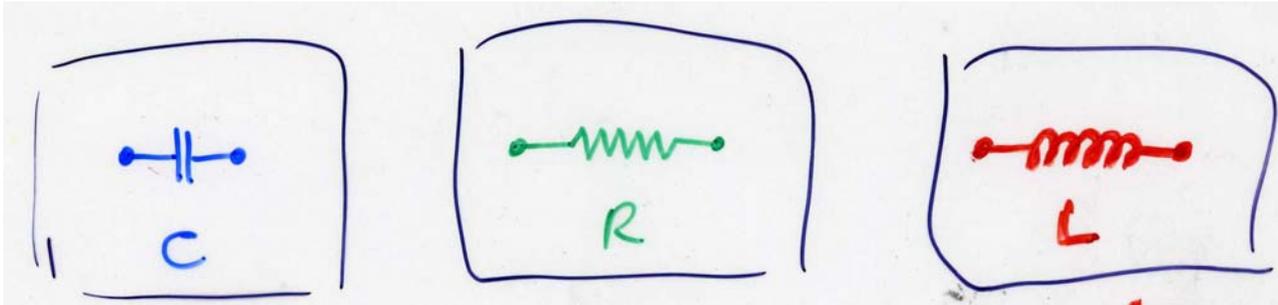
- Oscillazioni
  - circuito LC, sistema massa-molla, pendolo semplice
  - oscillazioni smorzate; oscillazioni forzate, risonanza
- Ottica geometrica
  - riflessione, specchi
  - rifrazione, fibre ottiche, diottri, lenti sottili, strumenti ottici
- Onde e ottica fisica
  - generalità, frequenza, lunghezza d'onda, velocità, intensità e ampiezza, principio di sovrapposizione, onde stazionarie
  - onde acustiche, livello d'intensità, effetto Doppler
  - principio di Huygens, diffrazione
  - interferenza della luce, reticolo di diffrazione, polarizzazione



# Oscillazioni



# Lavoro ed energia nei circuiti elettrici



$$V = q/C$$

$$\mathcal{L} = q^2/(2C)$$

energia di E

$$\eta_e = \epsilon_0 E^2/2$$

[J/m<sup>3</sup>]

- circuito RC → i esponenziale in t
- “ RL → i “ “ “
- “ LC → i oscillante

$$V = Ri$$

(i = dq/dt)

$$\mathcal{L} = Ri^2t$$

calore  
(dissipazione)

$$V = L di/dt$$

(di/dt = d<sup>2</sup>q/dt<sup>2</sup>)

$$\mathcal{L} = Li^2/2$$

energia di B

$$\eta_m = B^2/(2\mu_0)$$

[J/m<sup>3</sup>]

(transiente)

$$\tau = RC$$

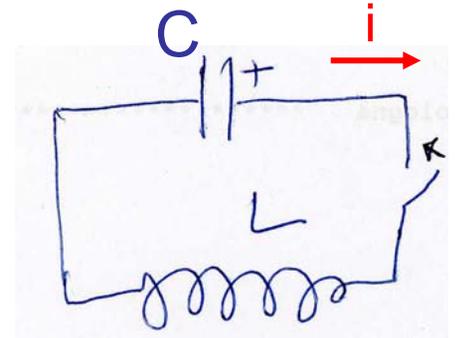
$$\tau = L/R$$

$$T = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{LC}$$



# Circuito LC

- $t = 0$ , C carico,  $q = q_0$
- chiudo il tasto: comincia a circolare  $i$  (le cariche + migrano verso l'armatura sinistra) ed entra in azione L, l'energia presente in C (E) passa in L (B), il processo continua finchè  $i$  diventa max e C è scarico ( $q=0$ ), a quel punto  $i$  continua a caricare + l'armatura sinistra e l'energia presente in L (B) è trasferita a C (E) ... e così via sempre oscillando (non ci sono R!):  
**somma dell'en. di C (E) e di L (B) = cost.**



- Kirchhoff, a  $t$  generico:  $L di/dt + q/C = 0$   
ossia  $L d^2q/dt^2 + q/C = 0$

cioè  $d^2q/dt^2 = -1/(LC)q = -\omega^2q$

$q(t) = q_0 \cos \omega t$

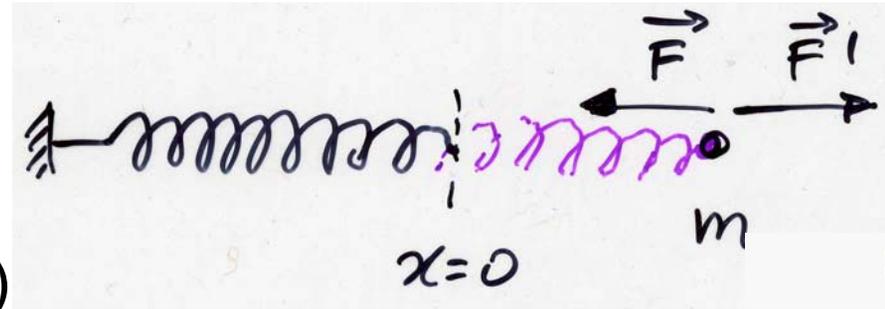
**soluzione del moto armonico**

$i(t) = dq/dt = -\omega q_0 \sin \omega t$



# Confronto col sistema massa-molla

- una massa oscilla attaccata ad una molla (ad es. sopra un piano senza attriti)
- per spostare la massa (molla) dalla posizione di eq.:



$$d\mathcal{L} = Fdx = -kxdx$$

$$\mathcal{L} = \int_0^x -kxdx = -k \int_0^x xdx = -\frac{1}{2}kx^2$$

$$\Delta W = \frac{1}{2}kx^2 = W(x) - W(0)$$

$$W(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad \text{se pongo } W(0) = 0$$

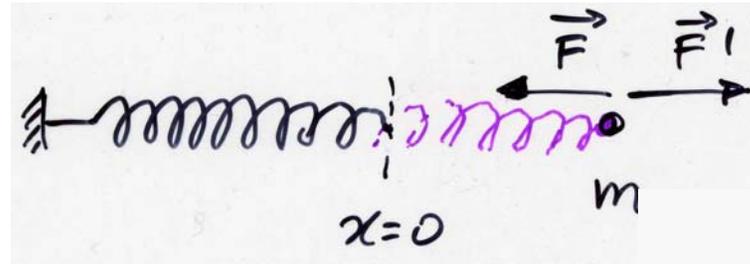
$$\text{A spostamento massimo: } W(A) = \frac{1}{2} kA^2$$

$$\text{en. cinetica della massa: } K = \frac{1}{2} mv^2$$

$$W(x) + K(x) = E_0 \quad \text{cons. en. meccanica}$$



# Energia nei sistemi meccanici



en. della molla (potenziale)

$$W = \frac{1}{2}kx^2 \quad [\text{cfr } q^2/(2C)]$$

ampiezza del moto  $A$

$$\text{en. totale } E_0 = W(x) + K(x) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

$$\omega^2 = k/m = (v_{\max}/A)^2$$

eq. di moto

$$a = -(k/m)x = -\omega^2x$$

soluzione con  $x=+A$  per  $t=0$  **matematicamente:**

$$x(t) = A\cos\omega t$$

$$v(t) = -\omega A\sin\omega t$$

$$a(t) = -\omega^2 A\cos\omega t$$

en. della massa (cinetica)

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad [\text{cfr } Li^2/2]$$

vel. massima  $v_{\max}$

**moto armonico semplice**

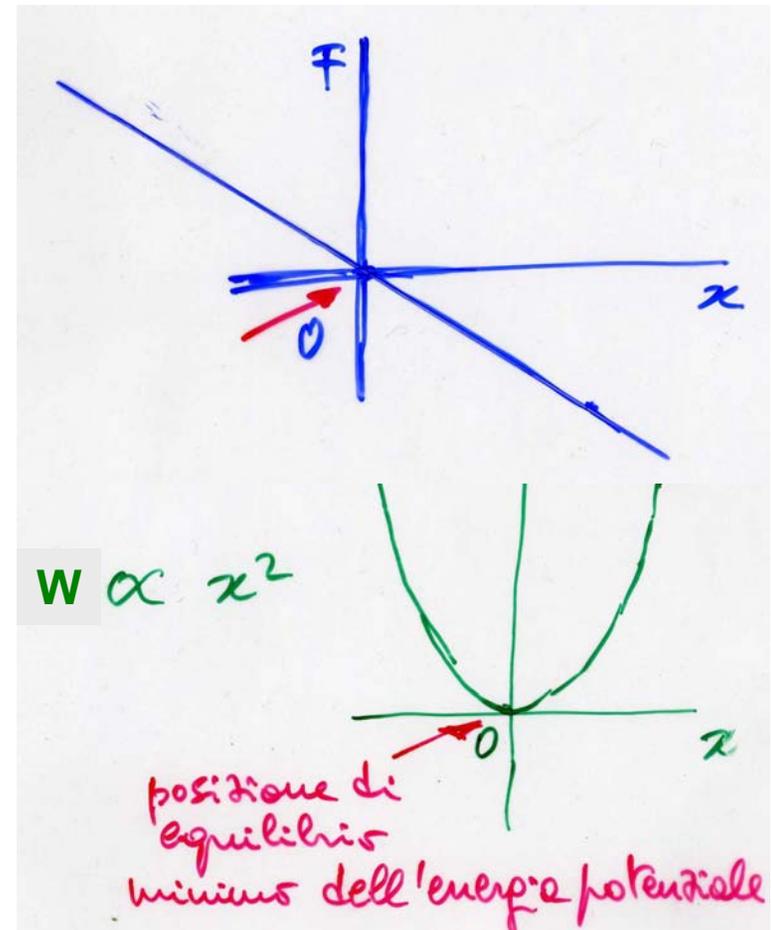


# Oscillazioni armoniche

- in generale: un sistema oscilla intorno ad una posizione di equilibrio stabile – con moto armonico semplice se la  $F$  di richiamo verso la posizione di eq. stabile è  $\propto -\text{spostamento}$  (piccole oscillazioni del pendolo, massa-molla, circuito LC, molecola  $H_2$ )

- $F(x) \propto -x$  (a  $\propto -x$ )

- $W(x) = -\mathcal{L}(x) \propto x^2/2$





# Oscillazione (passo passo)

- trasferimento: en. cinetica  $\longleftrightarrow$  en. potenziale

t	x	v	a	en.	$E_0$
0	+A	0	$-\omega^2 A$	pot.	$\frac{1}{2}kA^2$
$t_1$	0	$-\omega A$	0	cin.	$\frac{1}{2}mv_{\max}^2$
$t_2$	-A	0	$+\omega^2 A$	pot.	$\frac{1}{2}kA^2$
$t_3$	0	$+\omega A$	0	cin.	$\frac{1}{2}mv_{\max}^2$
$t_4$	+A	0	$-\omega^2 A$	pot.	$\frac{1}{2}kA^2$

sposto il sistema dall'equilibrio e lo lascio andare

il moto si ripete uguale

- $t_4 = T$ ;  $t_2 = t_4/2 = T/2$  per simmetria

$$t_1 = t_2/2 = T/4; \quad t_3 = t_2 + (t_4 - t_2)/2 = 3T/4 \text{ per simmetria}$$

- $\omega = \sqrt{k/m} = v_{\max}/A \rightarrow v_{\max} = \omega A$



## Soluzione (senza derivate)

- uso la cons. dell'en. meccanica (e  $m=k/\omega^2$ )

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \cancel{\frac{1}{2}kA^2}(x/A)^2 + \cancel{\frac{1}{2}kA^2}(v/(\omega A))^2 = \cancel{\frac{1}{2}kA^2}$$

$$\rightarrow (x(t)/A)^2 + (v(t)/(\omega A))^2 = 1 \quad \text{cfr } \cos^2\Phi + \sin^2\Phi = 1 \quad \forall \Phi$$

- se voglio  $x$  e  $v$  periodiche con periodo  $T$

$$x(t)/A = \cos(2\pi t/T) \quad v(t)/(\omega A) = -\sin(2\pi t/T)$$

che soddisfano  $x=A$  per  $t=0$  e  $v(T/4)=-\omega A$

- $T$  è un tempo caratteristico del sistema

$$T = 1/\nu = 2\pi/\omega = 2\pi\sqrt{m/k}$$

l'unico **dimensionalmente** possibile

$$[\omega^{-1}] = [(m/k)^{0.5}] = [(M/(MT^{-2}))^{0.5}] = [T]$$



## Oscillazioni (cont.)

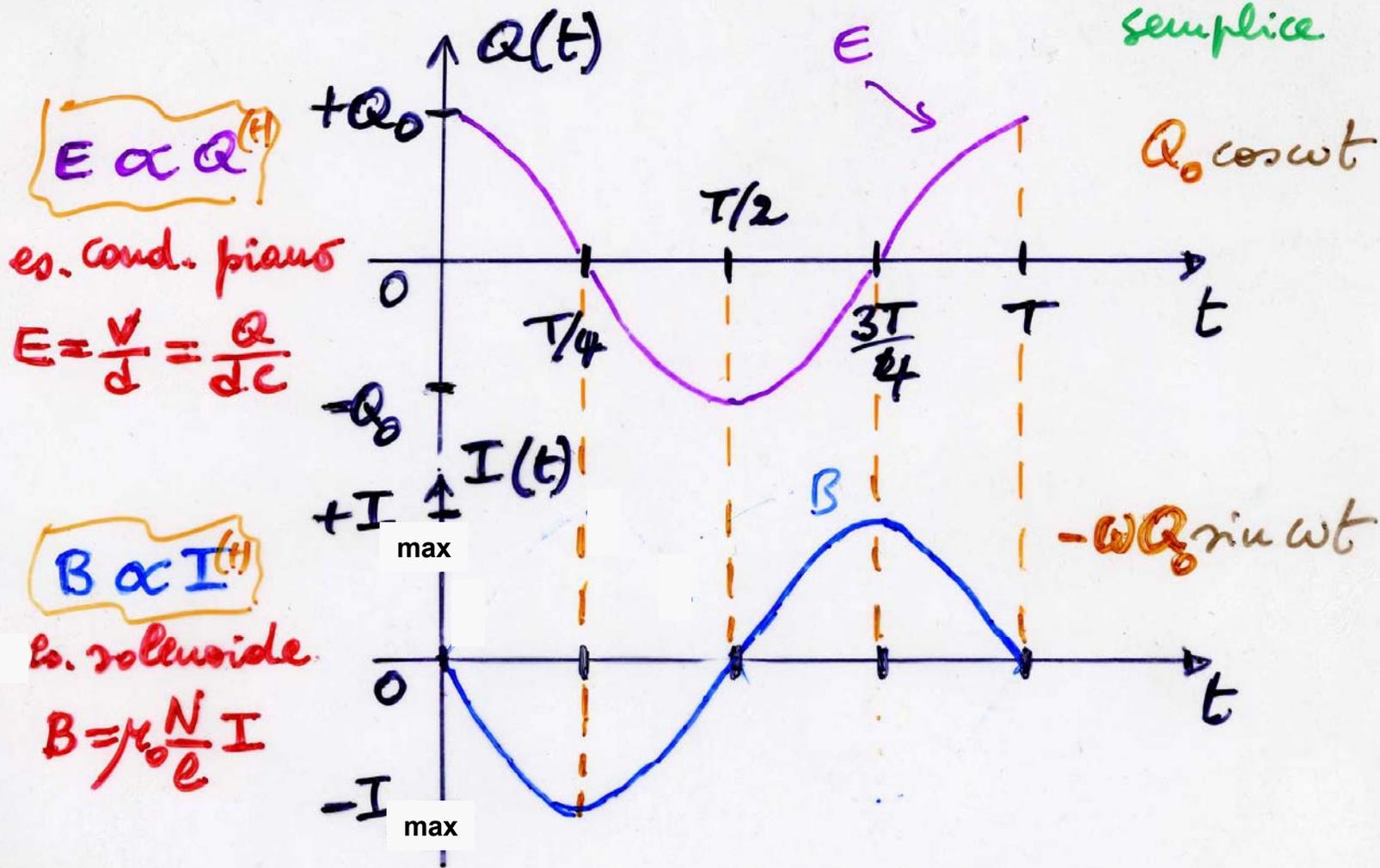
- tutte le oscillazioni si comporteranno allo stesso modo, cambia solo  $\omega$  ( $T$ ) a seconda del sistema e cambia lo spostamento dalla posiz. di equilibrio (distanza, angolo, carica)
- **massa-molla**       $\omega = \sqrt{k/m}$        $T = 2\pi\sqrt{m/k}$
- **pendolo semplice**       $\omega = \sqrt{g/L}$        $T = 2\pi\sqrt{L/g}$       piccole oscillaz.
- **circuito LC**       $\omega = 1/\sqrt{LC}$        $T = 2\pi\sqrt{LC}$
- **etc.**
- spostamenti, **velocità (lineari, angolari, correnti)**, **accelerazioni (lineari, angolari, deriv. della corrente)** saranno dati da funzioni sinusoidali (moto armonico semplice di pulsazione  $\omega = 2\pi\nu = 2\pi/T$ )



# Oscillazioni (cont.)

Circuiti LC - oscillazioni e.m.

moti  
armonici  
semplice





# Pendolo semplice

- $mg \cos\theta = T$  *tensione del filo*

- $-mg \sin\theta = ma = mL\alpha$

- piccole oscill.:  $\theta_0$  piccolo

$\rightarrow \sin\theta \sim \theta$

- $-g\theta = L\alpha$

$$\omega^2 = g/L$$

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}$$

indipendenti da  $\theta_0$

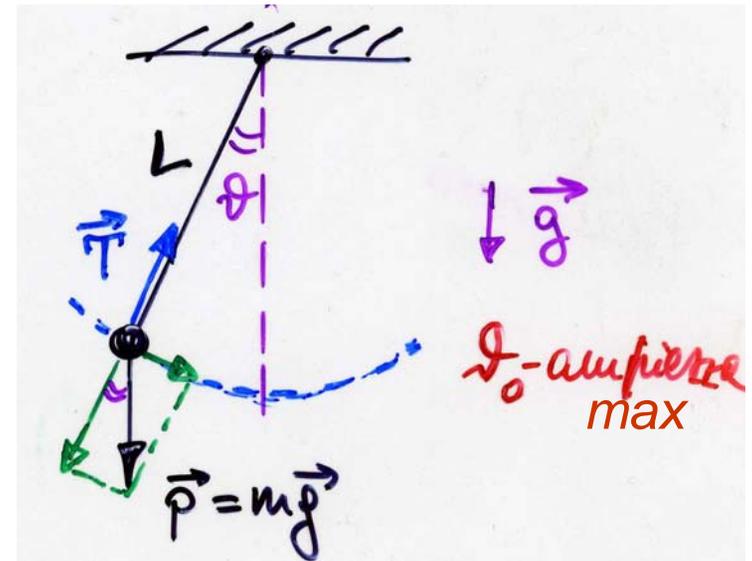
$$g = 4\pi^2 L/T^2$$

misurando  $L, T \rightarrow g$

- [pendolo fisico:  $m \rightarrow I$ ;  $F \rightarrow M = L \wedge (mg)$

$$-mgL \sin\theta = I\alpha; \quad -mgL\theta = I\alpha; \quad T = 2\pi\sqrt{(mgL/I)}$$

con  $L$  distanza del baricentro dal centro di sospensione]





# Angoli piccoli (\*)

$$\theta = 90^\circ = 1.5708 \text{ rad}$$

$$\sin \theta = 1$$

$$(\sin \theta - \theta) / \sin \theta = -0.57$$

$$\theta = 30^\circ = 0.5236 \text{ rad}$$

$$\sin \theta = 0.5$$

$$(\sin \theta - \theta) / \sin \theta = -0.047$$

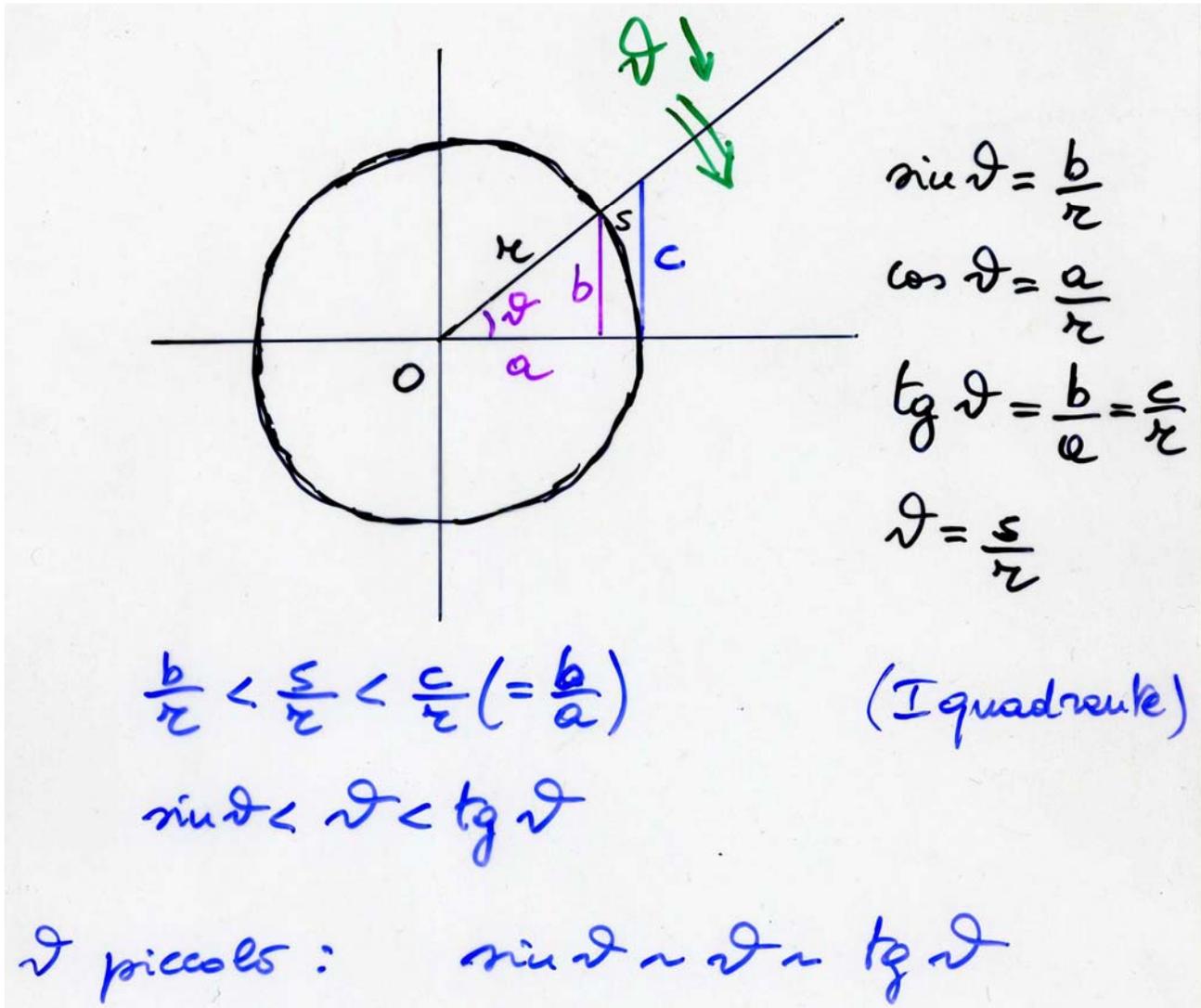
$$\theta = 3^\circ = 0.05236 \text{ rad}$$

$$\sin \theta = 0.05234$$

$$\text{tg} \theta = 0.05241$$

$$\begin{aligned} (\sin \theta - \theta) / \sin \theta &= \\ &= -0.00046 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{tg} \theta - \theta) / \text{tg} \theta &= \\ &= +0.00091 \end{aligned}$$

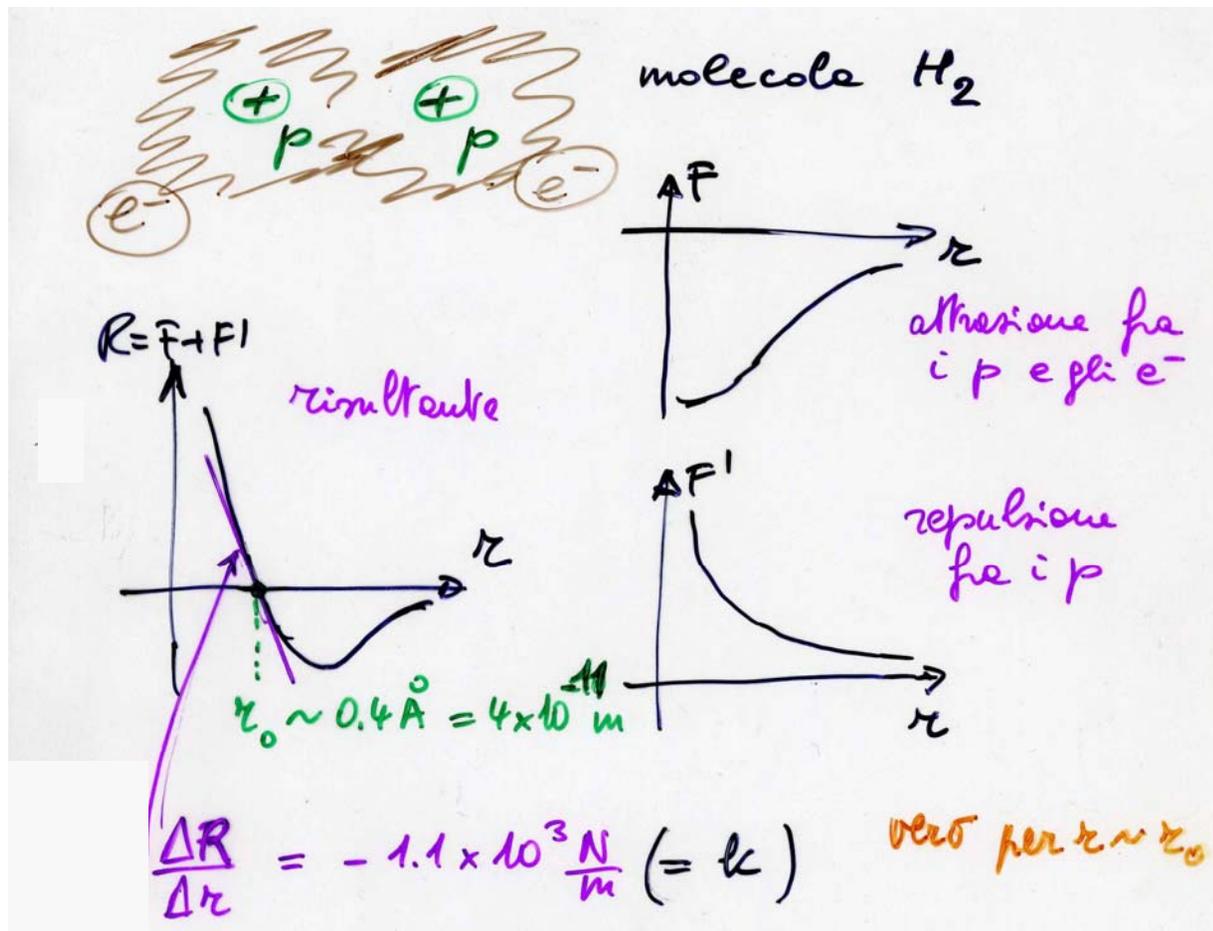




# Oscillazioni, applicazione

- molecola  $H_2$   $\omega = \sqrt{k/m} = \sqrt{1.1 \cdot 10^{-3} / 1.67 \cdot 10^{-27}} \sim 0.8 \cdot 10^{15}$  rad/s  
 $\nu = 1.3 \cdot 10^{14}$  Hz  
 $\lambda = c/\nu = 2.5 \mu\text{m}$

→ se si eccita  $H_2$  con luce IR, si metterà ad oscill., assorbirà energia e posso 'vederlo'





# Oscillazione e.m., applicazione

---

- oscillazioni del circuito LC: **energia di  $\mathbf{E}$  confinata in C**  
 $\leftrightarrow$  **energia di  $\mathbf{B}$  confinata in L**
- supponiamo di avere una regione dello spazio vuota in cui è presente un campo  $\mathbf{E}$  (o  $\mathbf{B}$ ) oscillante, per le leggi dell'e.m. sarà indotto un campo  $\mathbf{B}$  (o  $\mathbf{E}$ ) oscillante
- qualitativamente, questi campi oscillanti generano onde e.m. che si propagano nello spazio con velocità  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ , con la frequenza  $\nu$  dell'oscillazione, con lunghezza d'onda  $\lambda = c/\nu$  e con densità di energia

$$\eta_e + \eta_m = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2}B^2/\mu_0 = \text{cost}$$

(mentre le oscillazioni sono confinate in una regione dello spazio, quindi hanno solo frequenza  $\nu$ )

# Oscillazioni smorzate

- sistema massa-molla **con attrito**

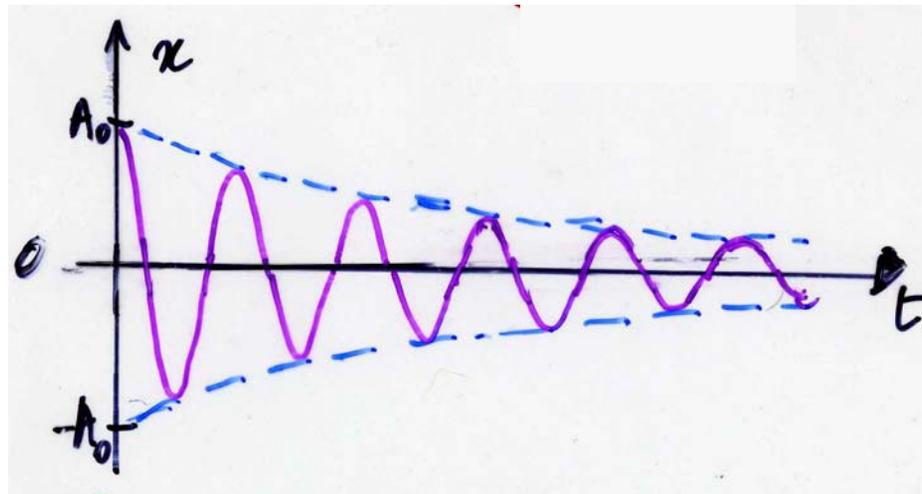
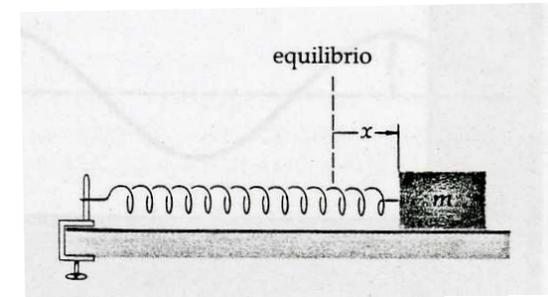
$$ma + \gamma v + kx = 0 \quad \text{termine } \propto v, \text{ attrito, smorzamento}$$

- $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2(t) < \frac{1}{2}kA_0^2$

ad es.  $A(t) = A_0 \exp(-\gamma t / (2m))$

- se  $\gamma \geq 2\sqrt{km}$  il moto è aperiodico

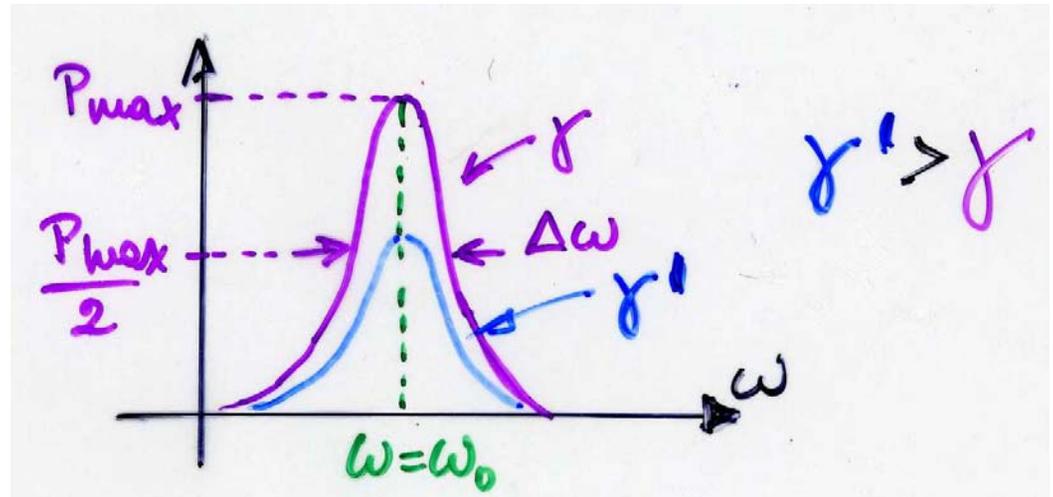
se  $\gamma < 2\sqrt{km}$  oscillazione con  $A$  decrescente

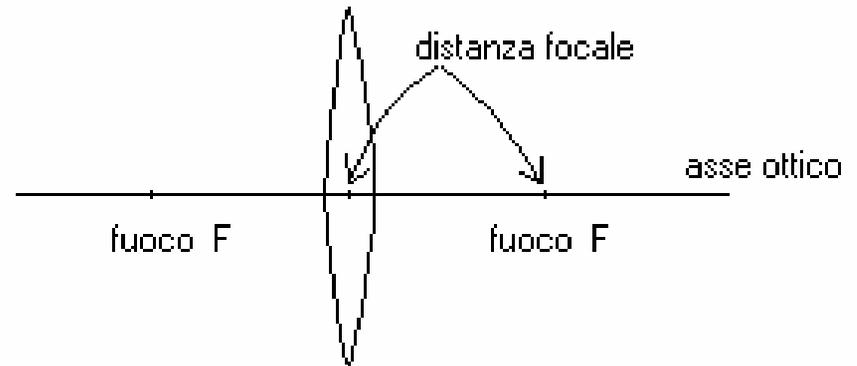




# Oscillazioni forzate, risonanza

- sistema sottoposto ad una  $F$  esterna sinusoidale  
ma + ( $\gamma v$ ) +  $kx = F(t) = F_e \cos \omega t$   
 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$     $\nu_0 = \omega_0/2\pi$    **frequenza propria del sistema**
- se  $\gamma=0$  il trasferimento di energia diventa  $\infty$  per  $\omega=\omega_0$   
(in pratica si avrà una 'rottura')
- se  $\gamma \neq 0$  il trasferimento di energia (potenza) è max per  $\omega=\omega_0$  : es. assorb. di radiazione e.m. da parte di atomi e molecole





## Ottica geometrica



# La luce

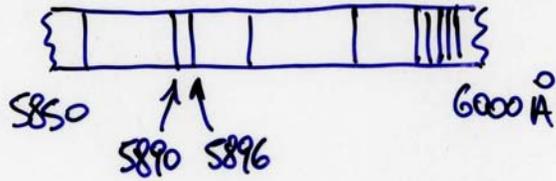
- onda e.m.  $v = \lambda \nu$
- ampiezza:  $\vec{E}$
- intensità:  $I = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E^2$  \*
- velocità:  $c \sim 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  \*
- spettro e.m.
  - $\lambda \in (\sim 10^{-18} \div \sim 10^5) \text{ m}$  \*
  - $\nu \in (\sim 10^3 \div \sim 10^{26}) \text{ Hz}$
- visibile
  - $\lambda \in (0.4 \div 0.7) \times 10^{-6} \text{ m}$  \*
  - $\nu \in (4.3 \div 7.5) \times 10^{14} \text{ Hz}$

energia/(m<sup>2</sup>s)

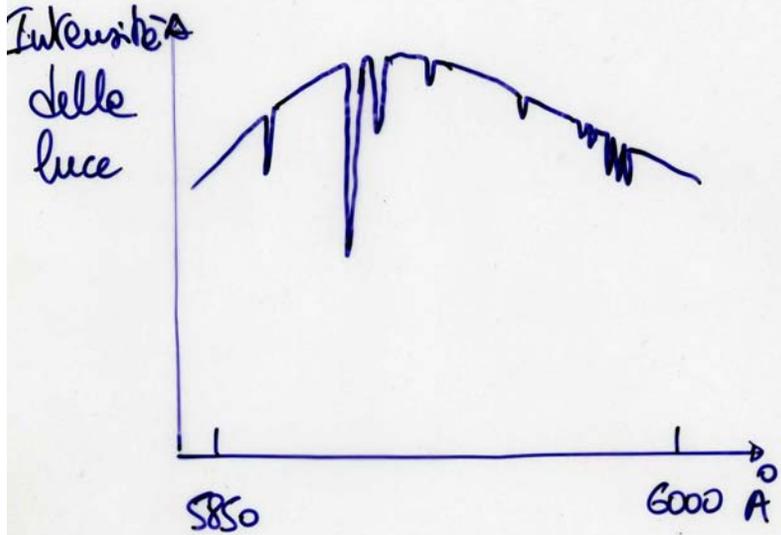
\* nel vuoto



# Luce visibile



linee scure  
assorbimenti



Spettro  
Solare

legge di Wien  
 $\lambda = 2.898 \text{ mm/T(K)}$

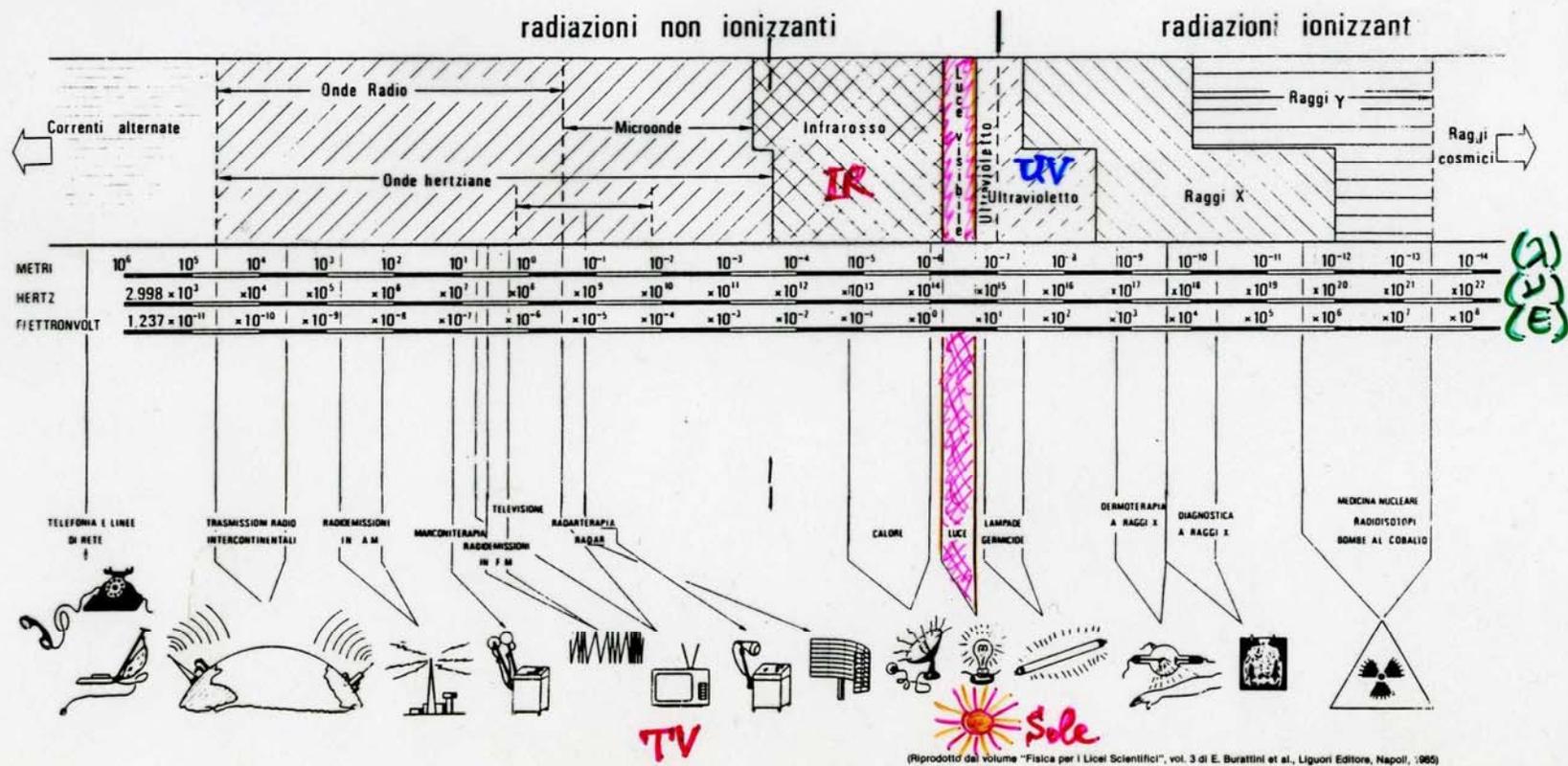
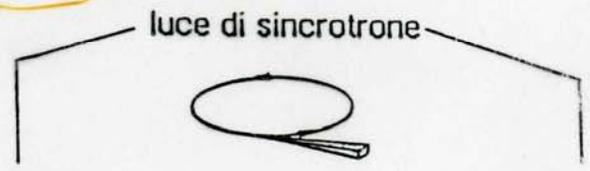
$T_{\text{sup. sole}} \approx 6000 \text{ K}$

$\lambda$ (nm)	colore
400-450	violetto
450-500	blu
500-550	verde
550-600	giallo
600-650	arancione
650-700	rosso

# Spettro delle onde e.m. (\*)

**La luce**  
Spettro delle onde elettromagnetiche

$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$  (esatta)  
 $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$





# Propagazione della luce

- nel vuoto (dalle eq. di Maxwell), velocità dell'onda

$$c = 1/\sqrt{(\epsilon_0\mu_0)} = 299792458 \text{ m/s}$$

massima velocità di un segnale

- mezzi trasparenti omogenei e isotropi

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad \epsilon_r > 1; \quad \mu \sim \mu_0$$

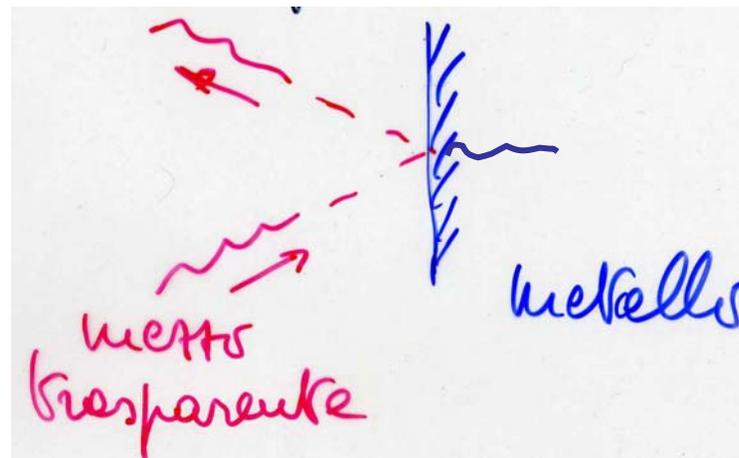
$$v = 1/\sqrt{(\epsilon_r \epsilon_0 \mu_0)} = c/n \quad \rightarrow \quad n = \sqrt{\epsilon_r}$$

indice di rifrazione

$$n = c/v$$

$$n \geq 1$$

- mezzi assorbenti, metalli:  
sono parzialmente riflettenti  
(mentre parte dell'energia è  
assorbita entro  $1-2 \lambda$ )



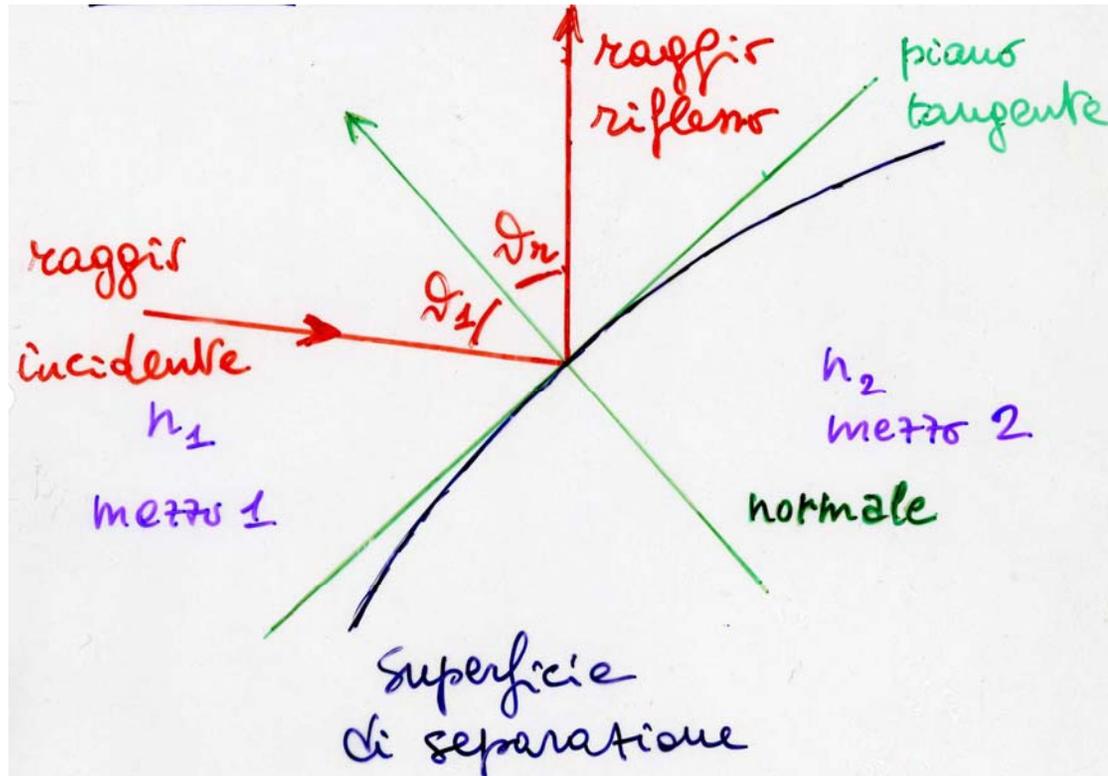


# Condizioni dell'ottica geometrica

---

- limite per  $\lambda \rightarrow 0$  (dimensioni di ostacoli, disomogeneità etc.,  $d \gg \lambda$ )
- si considerano i raggi luminosi
- nei mezzi trasparenti omogenei e isotropi la luce si propaga in linea retta
- i raggi luminosi sono deviati da ostacoli, disomogeneità etc.
  - riflessione al passaggio fra mezzi diversi
  - rifrazione al passaggio fra mezzi diversi

# Riflessione



- leggi della riflessione

- r. incidente, normale, r. riflesso  $\in$  stesso piano

- $\theta_r = \theta_i$

- $I_{\text{inc.}} = I_{\text{rifl.}} + I_{\text{trasm.}}$



# Riflessione, potere riflettente

---

- $R = I_r/I_i \leq 1$     potere riflettente
- incidenza normale ( $\theta_1 = 0$ )
  - aria-metallo, specchi, R:  $\sim 0.9$ (Ag),  $\sim 0.8$ (Al),  $\sim 0.6$ (Fe)  
(da un mezzo trasparente ad uno assorbente)
  - mezzo trasparente 1 – mezzo trasparente 2

$$R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 = \left( \frac{v_1 - v_2}{v_1 + v_2} \right)^2$$

ad es. aria-vetro, lenti:  $n_1 \sim 1$ ,  $n_2 \sim 1.5$ ,  $R \sim 0.04$  ( $\rightarrow$  la riflessione **non** è il fenomeno dominante)

- incidenza rasente ( $\theta_1 = 90^\circ$ )
  - $R = 1$



# Sistema ottico

---

- fa corrispondere un'immagine ad un oggetto oppure viceversa: si propagano i raggi luminosi, reversibili
- stigmatico: ad un punto oggetto corrisponde un solo punto immagine (punti coniugati)
- **se il sistema è stigmatico, basta conoscere due raggi per trovare la corrispondenza** (altri r. possono servire per verificare che la corrispondenza trovata è corretta)
- ad es. **riflessione: specchio piano, specchio sferico etc.**; **rifrazione: lenti, microscopi etc.**

# Specchio piano

costruzione dell'immagine:  
l'immagine è virtuale dritta,  
non vi passa energia

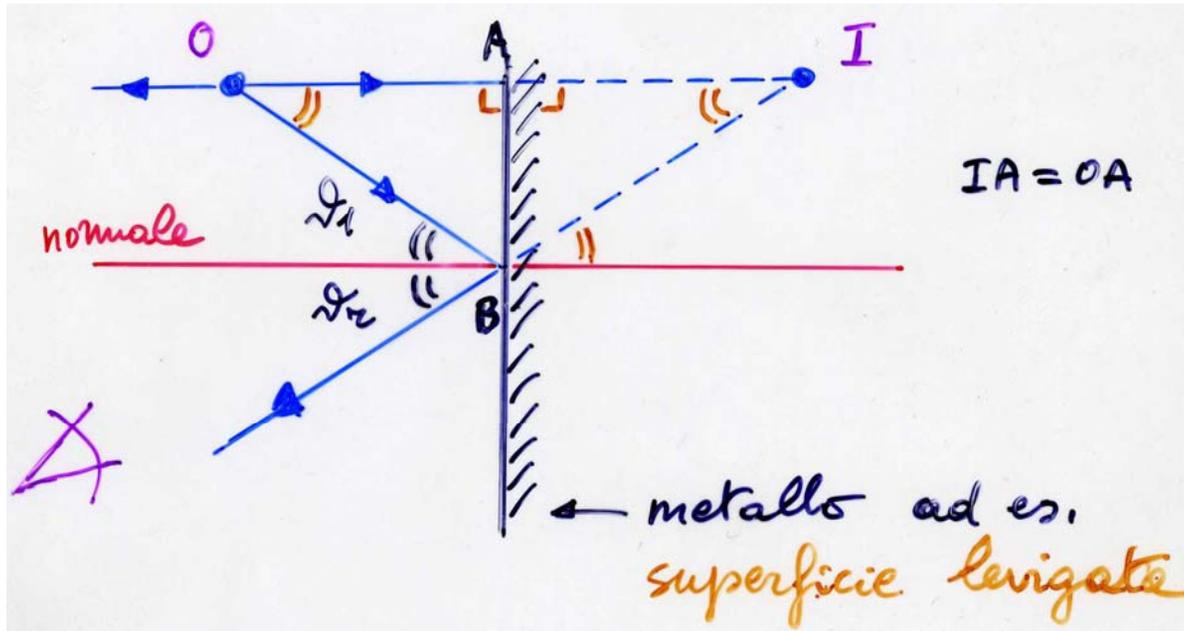
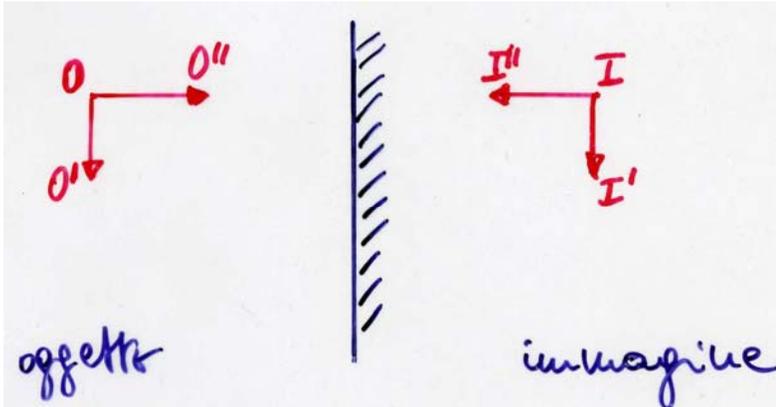
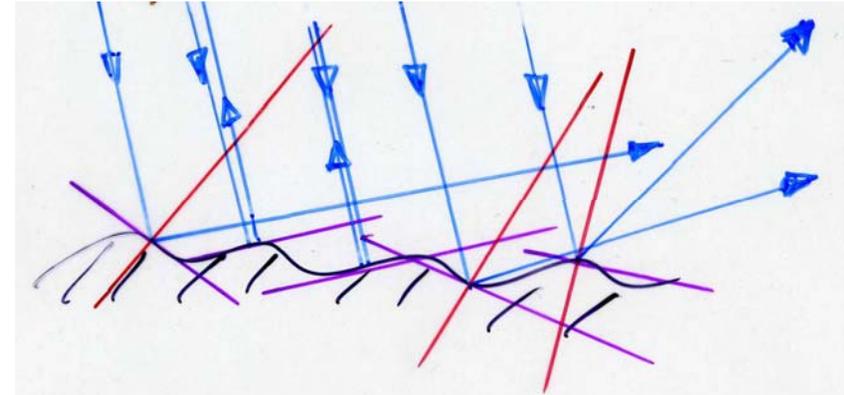


immagine trasversa e longitudinale



superficie ruvida, diffusione



ingrandimento:  $+1(t)$ ,  $-1(l)$

# Specchi sferici, fuoco

- C centro di curvatura, r raggio, V vertice
- CV asse ottico
- lo sp.sf. è stigmatico se la calotta in V è piccola,  $\theta$  piccolo
- $AD = CD$ ;  $AC = r$
- $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos\theta$

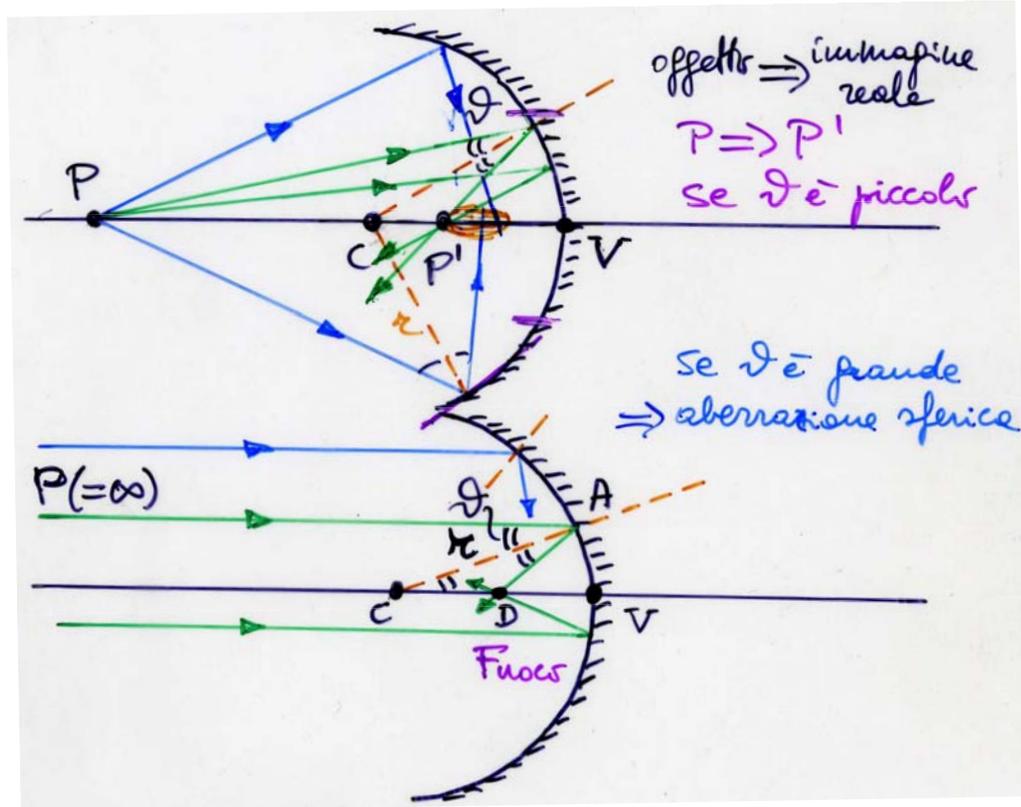
$$\cancel{CD}^2 = r^2 + \cancel{CD}^2 - 2r \cdot CD \cos\theta$$

$$CD = r/(2\cos\theta)$$

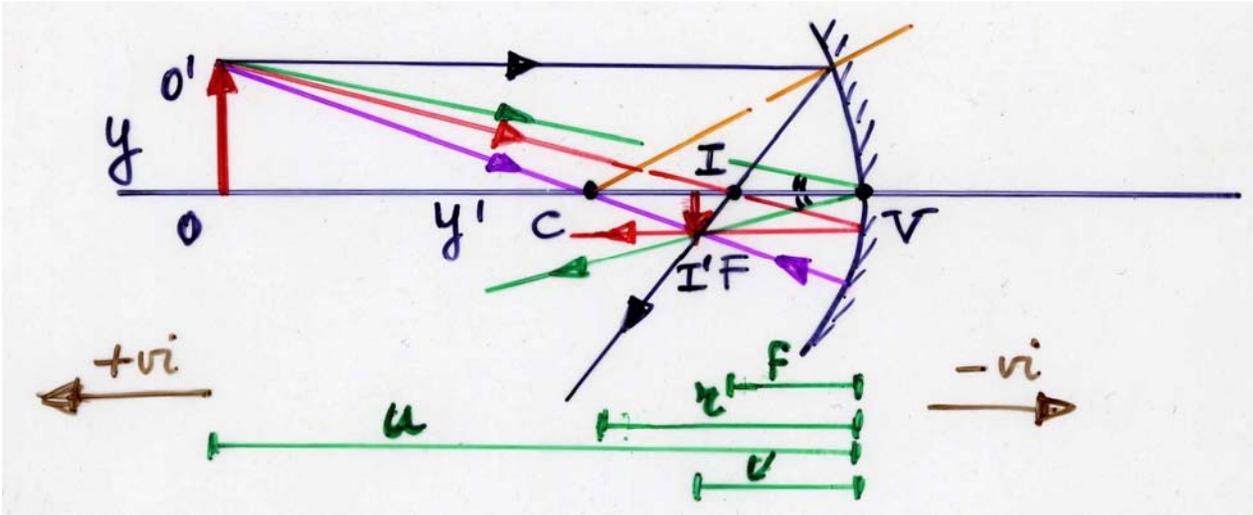
$$\text{se } \theta \sim 0, CD = DV = r/2 \Rightarrow \boxed{f = r/2}$$

( $\theta \neq 0, \cos\theta \neq 1$ :  $5^\circ, 0.9962$ ;  $\Delta \sim 4\%$ )

fuoco, coniugato di  $P = \infty$



# Costruzione dell'immagine con lo specchio sferico



- raggio  $\parallel$  all'asse, si riflette passando per F
- passante per F, si riflette  $\parallel$  all'asse
- passante per C ( $\theta_1=0$ ), si riflette nella direz. d'incidenza
- passante per V:  $OO'V$  e  $II'V$  simili  $\rightarrow OO'/u = II'/v$

$$m = y'/y = -v/u$$

ingrandimento lineare trasversale



# Formula dei punti coniugati

- O e I, O' e I' p. coniugati

- OO'V e II'V simili:

$$OO'/II' = u/v$$

- OO'C e II'C simili

$$OO'/II' = (u-r)/(r-v)$$

$$\rightarrow u/v = (u-r)/(r-v)$$

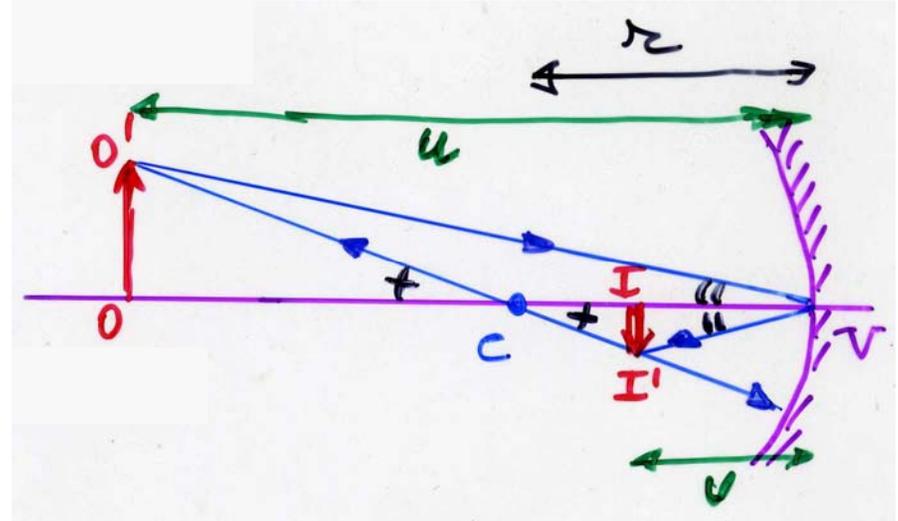
$$ru - uv = uv - rv$$

(moltiplico per  $1/(ruv)$  a dx e sx)

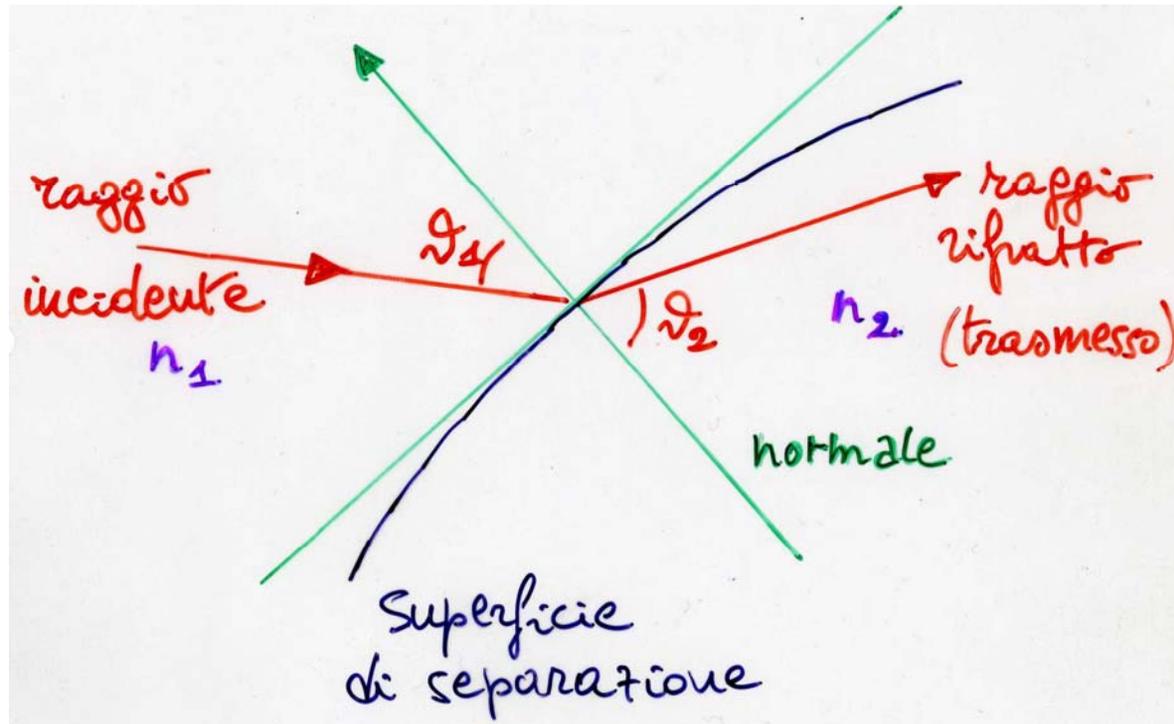
$$1/v - 1/r = 1/r - 1/u$$

$$1/u + 1/v = 2/r = 1/f$$

formula dei punti coniugati (degli specchi)



# Rifrazione



- leggi della rifrazione (trasmissione)
  - r. incidente, normale, r. rifratto (trasmesso)  $\in$  stesso piano
  - $\sin\theta_2 = (n_1/n_2)\sin\theta_1$  (legge di Snell)
  - $I_{\text{inc.}} = I_{\text{rifl.}} + I_{\text{trasm.}}$



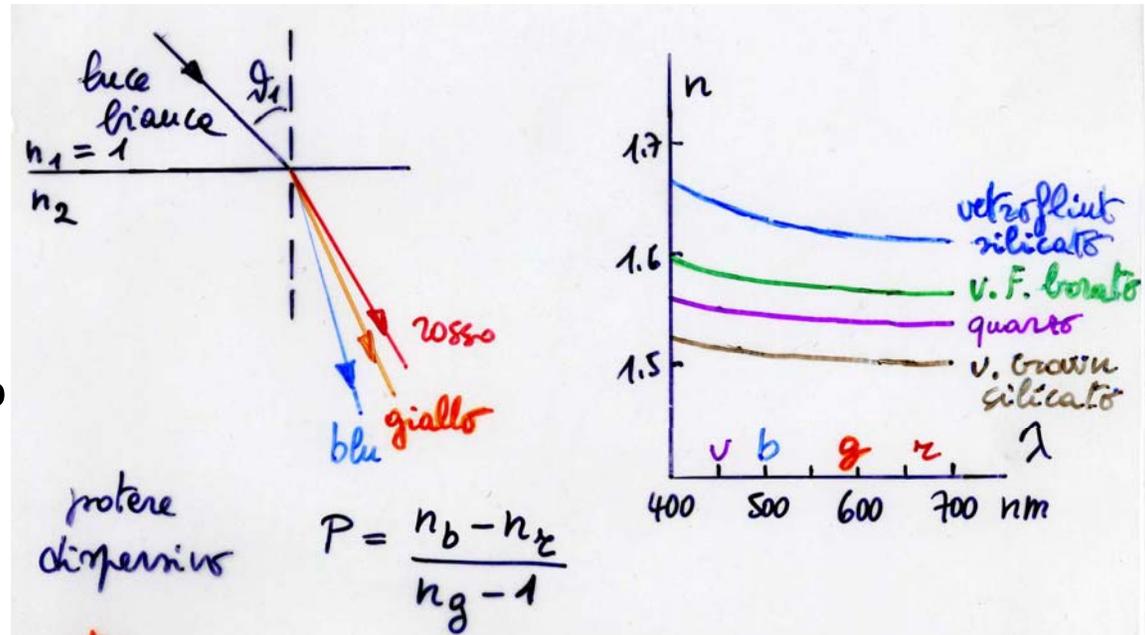
# Legge di Snell

- $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$
- per angoli piccoli,  $\sin \theta \sim \theta \rightarrow n_1 \theta_1 = n_2 \theta_2$   
es. aria-vetro  $\theta_1 = 15^\circ$ ,  $n_{\text{aria}} = 1$ ,  $n_{\text{vetro}} = 1.52$   
 $\sin \theta_1 / \sin \theta_2 = 1.52$ ;  $\theta_1 / \theta_2 = 1.53$ ;  $\Delta = 7\%$
- anche  $\sin \theta_1 / v_1 = \sin \theta_2 / v_2$  oppure  $\sin \theta_1 / \lambda_1 = \sin \theta_2 / \lambda_2$
- dispersione,  $n = n(\lambda)$

potere dispersivo

$$P \sim 0.009 / 0.5 = 1.8\%$$

(vedi pag. 51)





## Legge di Snell (2)

---

- $n_1 < n_2$  (da un mezzo otticamente meno denso ad uno più denso)

$$\sin\theta_2 = (n_1/n_2)\sin\theta_1 < \sin\theta_1 \rightarrow \theta_2 < \theta_1$$

il raggio rifratto si avvicina alla normale

es. H<sub>2</sub>O-vetro  $n_1 = 1.33$   $n_2 = 1.52$ ,  $\sin\theta_2 = 0.875 \sin\theta_1$   
→ se  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $\theta_2 = 25.9^\circ$

- $n_2 < n_1$  (da un mezzo otticamente più denso ad uno meno denso)

$$\sin\theta_2 = (n_1/n_2)\sin\theta_1 > \sin\theta_1 \rightarrow \theta_2 > \theta_1$$

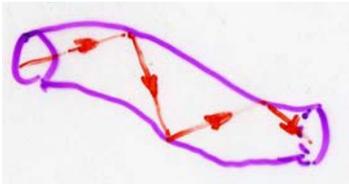
il raggio rifratto si allontana dalla normale

es. H<sub>2</sub>O-vetro  $n_1 = 1.52$   $n_2 = 1.33$ ,  $\sin\theta_2 = 1.14 \sin\theta_1$   
→ se  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $\theta_2 = 34.8^\circ$



# Riflessione totale

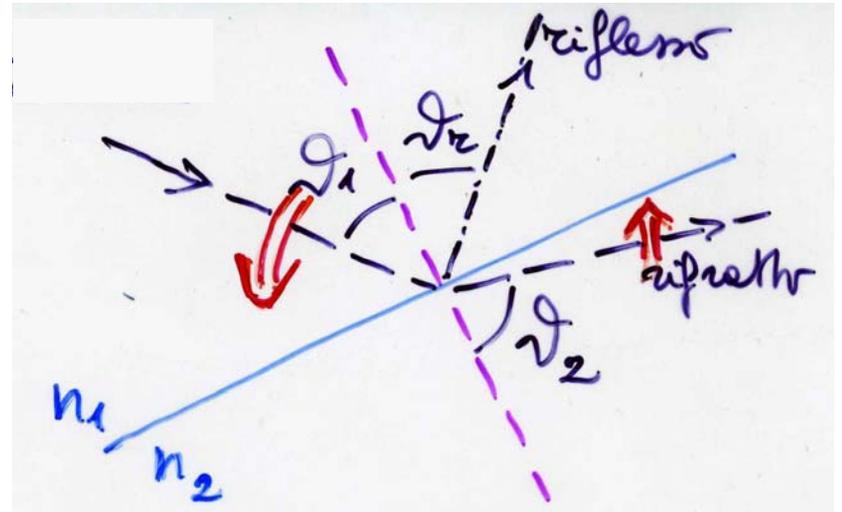
- $n_1 > n_2$ : se aumento  $\theta_1$  aumenta anche  $\theta_2$  ... **fino a che è possibile**, si arriva a  $\theta_2 = \pi/2$  e allora non ci sarà più rifrazione, ma solo riflessione (**riflessione totale**); l'angolo  $\theta_1$  corrispondente si chiama angolo limite  
$$\sin\theta_{1\text{lim}} = (n_2/n_1)\sin(\pi/2) \quad \theta_{1\text{lim}} = \arcsin(n_2/n_1)$$
- per  $\theta_1 > \theta_{1\text{lim}}$  si ha riflessione totale, potere riflettente  $R=1$  (guide di luce, **fibre ottiche: comunicazioni, endoscopia**)



- es. vetro-aria

$$n_1 = 1.52; \quad n_2 = 1$$

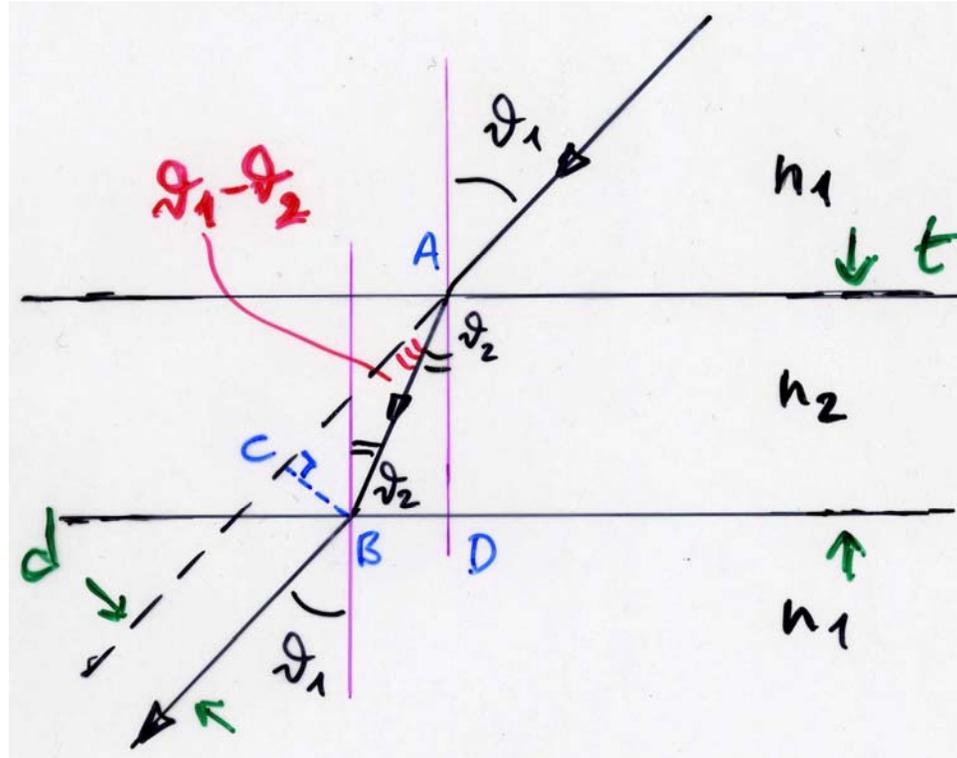
$$\theta_{1\text{lim}} = \arcsin(1/1.52) = 41.1^\circ$$



# Passaggio attraverso una lastra piano-parallela (\*)

$$AB = t / \cos\theta_2$$

$$CB = AB \sin\widehat{CAB}$$

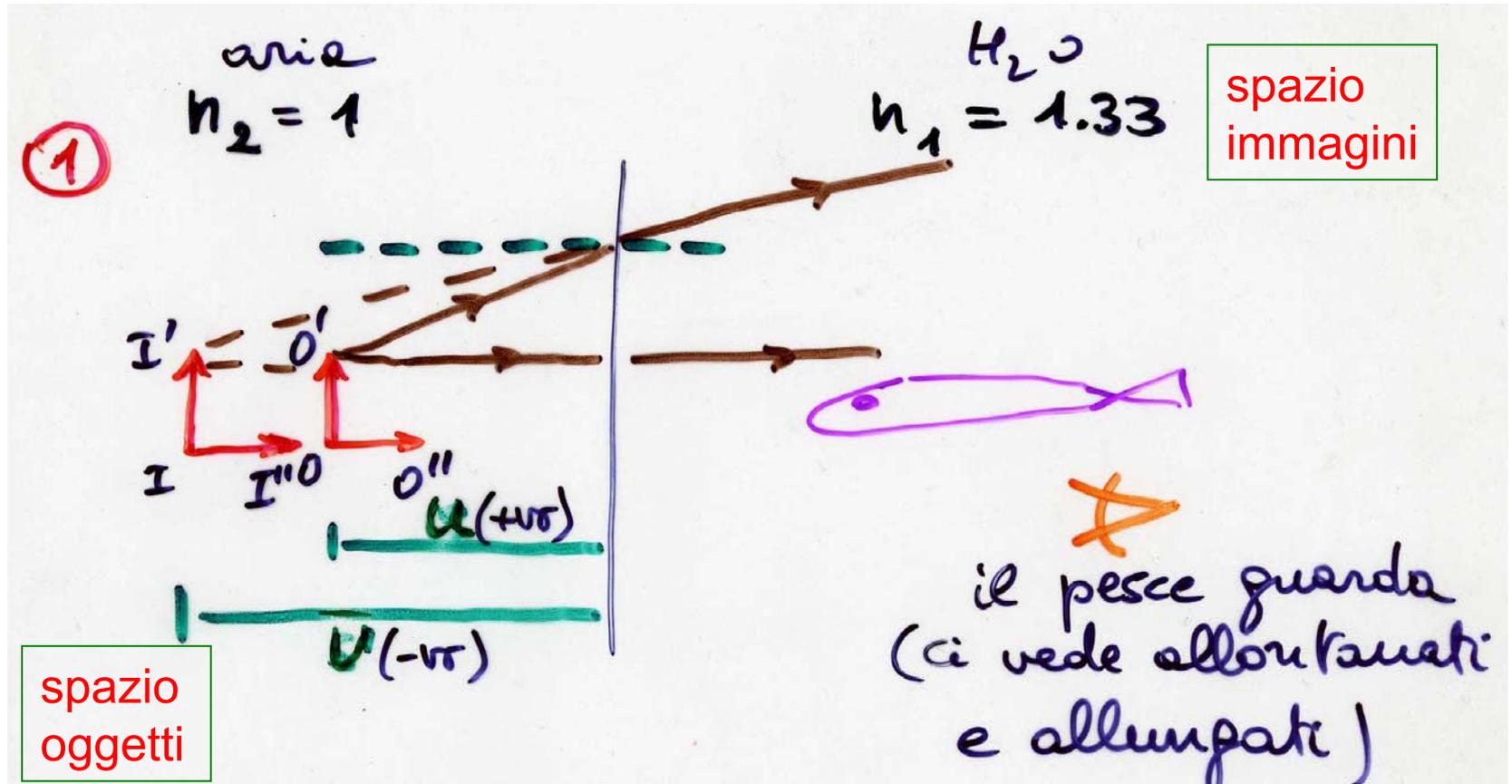


- lastra trasparente di spessore  $t = AD$ , spostamento  $d = CB$ 
  - 1a rifrazione  $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$
  - 2a rifrazione  $n_2 \sin\theta_2 = n_1 \sin\theta_1$
- $d = t \sin(\theta_1 - \theta_2) / \cos\theta_2$

(\*) facoltativo

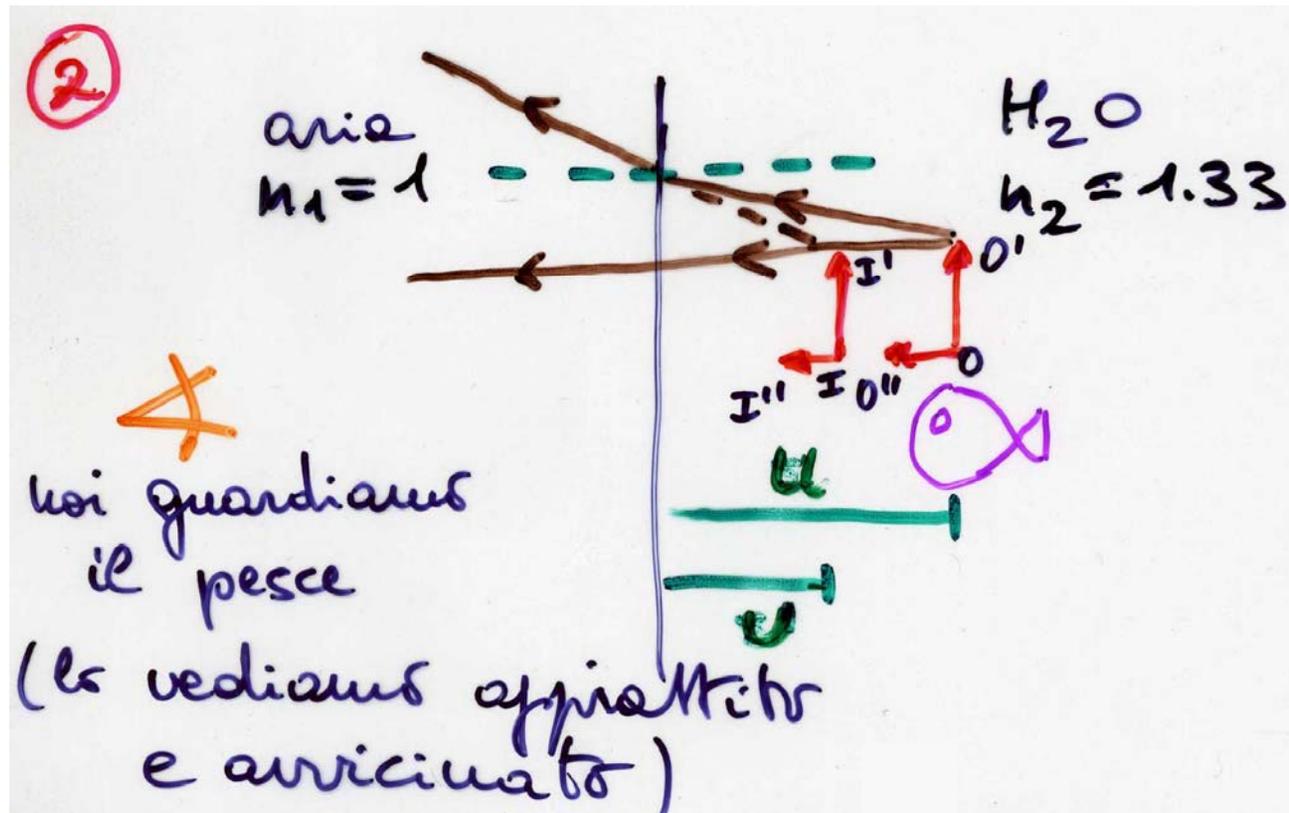
# Diottri piani

- un diottro piano è formato da due mezzi trasparenti separati da una superficie piana ( $u$  e  $v$  sono  $+v_i$  nei rispettivi spazi)



- $m_{\text{trasv}} = +1$ , **immagine virtuale diritta**;  $m_{\text{longit}} = -v/u = +n_1/n_2$

## Diottri piani (2)



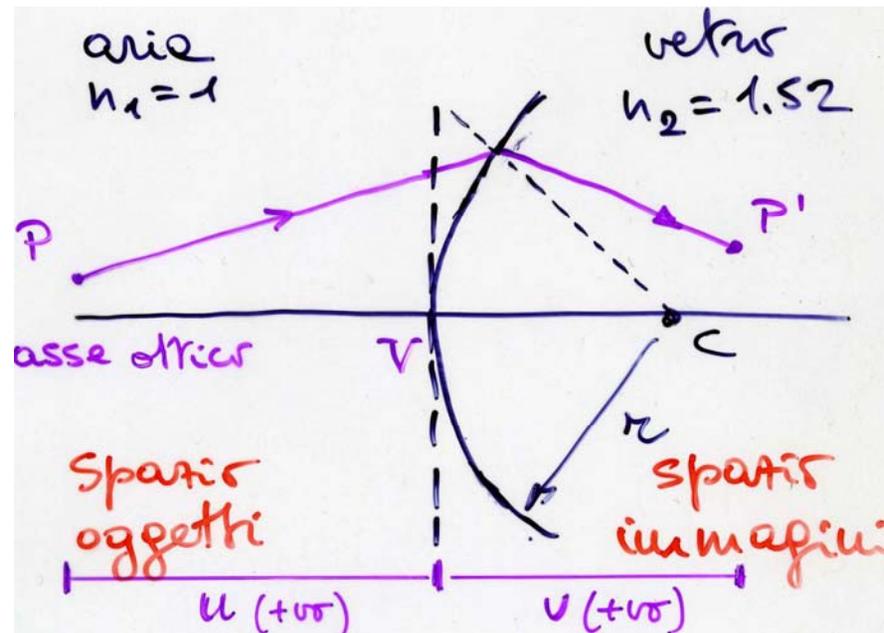
- $m_{\text{trasv}} = +1$ , **immagine virtuale dritta**;  $m_{\text{longit}} = -v/u = +n_1/n_2$

①  $n_2/u + n_1/v = 0$ ;

②  $n_2/u + n_1/v = 0$

# Diottri sferici e lenti

diottro  
sferico

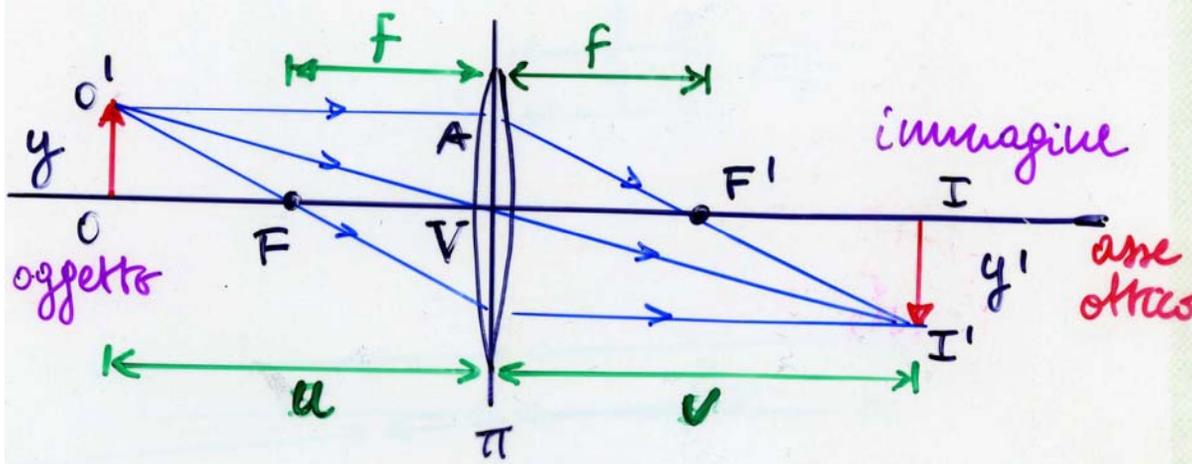


o altro materiale  
trasparente

- diottro: due mater. traspar. separati da una superf. sferica
- lente: due diottri, di cui almeno uno sferico; i raggi che la attraversano subiscono una doppia rifrazione
- (i diottri e) le lenti, se valgono le approssimazioni (di Gauss)
  - 1) onde monocromatiche
  - 2) piccola apertura
  - 3) raggi parassiali,
 sono un sistema stigmatico (punto oggetto  $\longleftrightarrow$  punto immagine) – altrimenti: aberrazioni

# Lenti sottili

- **lente sottile**: spessore trascurabile, al limite un piano ( $\pi$ )



l'asse ottico  
congiunge FF'  
(o i centri di  
curvatura)

- $OO'V$  e  $II'V$  simili:  $OO'/II' = u/v$
- $AVF'$  e  $II'F'$  simili:  $OO'/II' = f/(v-f)$
- $u/v = f/(v-f) \rightarrow uv - uf = fv$  [moltiplico per  $1/(uvf)$  a dx e sx]
- $1/u + 1/v = 1/f$

formula dei punti coniugati (delle lenti), f distanza focale



## Lenti sottili (2)

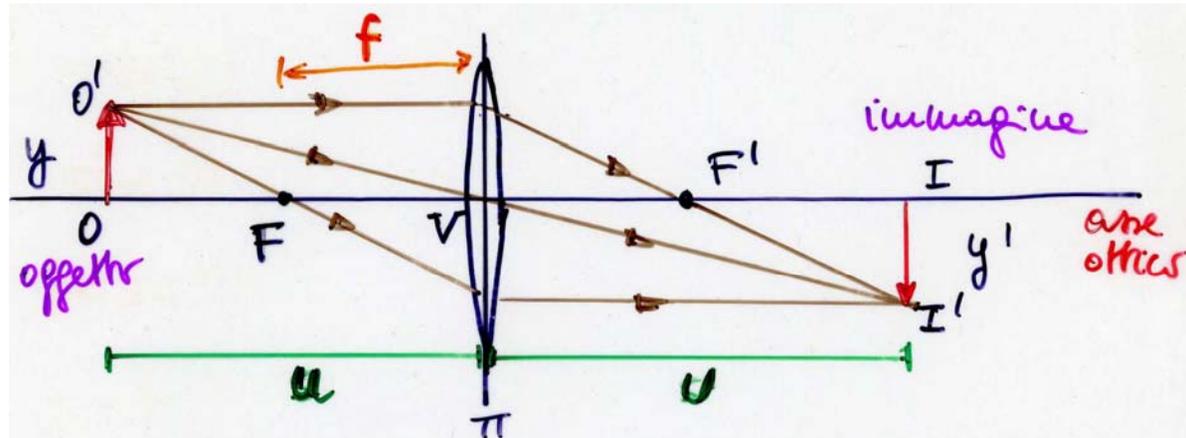
- una lente ha due fuochi,  $F$  e  $F'$ , equidistanti da  $V$ , punti coniugati dei punti all' $\infty$  ( $1/v = 1/f - 1/\infty = 1/f$  etc.)
- considerando la lente costituita da due diottri sferici, di raggio di curvatura  $r_1$  e  $r_2$ , si può mostrare che

$$1/f = (n-1)(1/r_1 + 1/r_2)$$

con  $n$  indice di rifrazione del materiale della lente (immersa in aria), tipicamente  $\sim 1.5$  (vetro, plastica);  
[cfr con lo specchio sferico:  $1/f = 2/r$ ]

- **lente convergente**: più spessa al centro,  $f$  +va
- **lente divergente**: più spessa ai bordi,  $f$  -va
- l'inverso di  $f$  (in m) si chiama potere diottrico  $P = 1/f$  della lente e si misura in diottrie (D)

# Costruzione dell'immagine



rapp. utili

(verifica: analitica, eq. punti coniugati)

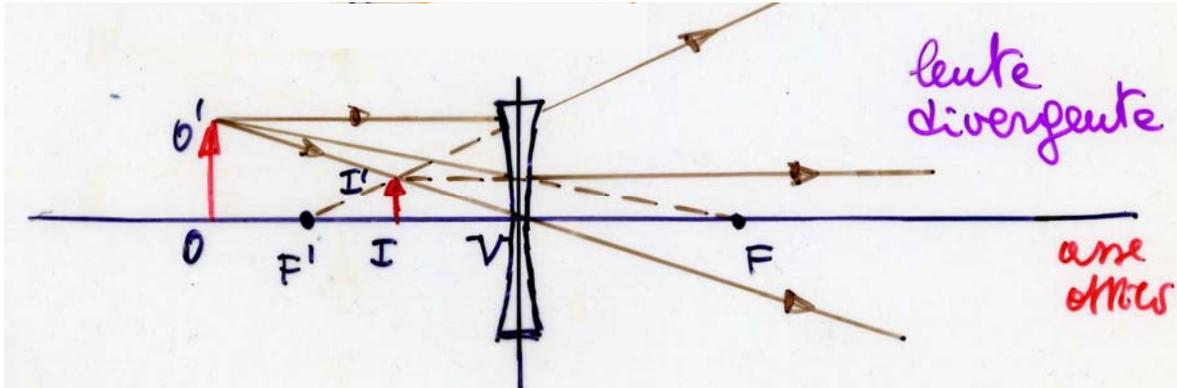
- // all'asse, parte per  $F'$
  - per il vertice, continua (quasi) diritto
  - per  $F$ , esce // all'asse
- [comunque // , vedi pag. 36]

- ingrandimento lineare trasverso

$OO'V$  simile a  $II'V$

$$m = y'/y = -v/u = - (v-f)/f = -f/(u-f)$$

# Lente divergente

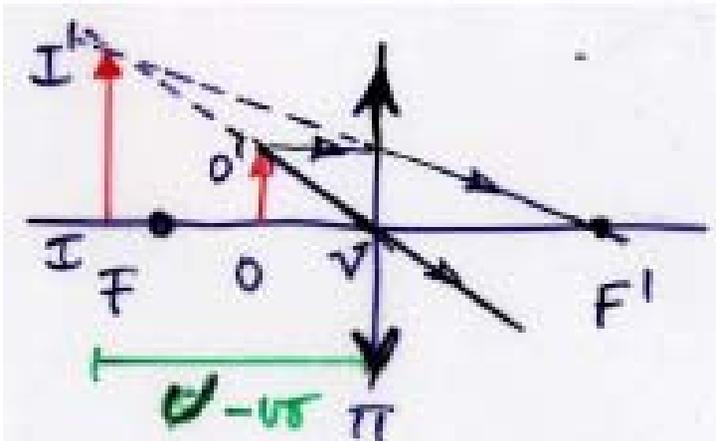


- **lente divergente, più spessa ai bordi** (ad es. se i due diottri sono concavi): raggi da  $P=\infty$ , dopo la doppia rifrazione, provengono da  $F'$  (quelli da  $P'=\infty$ , da  $F$ ); se si usa la formula di pag. 41,  **$f$  risulta  $-va$  (sia  $r_1$  che  $r_2$  sono  $-vi$ )**
- il terzo raggio utile passa per  $V$  ed esce parallelo a se stesso (estrapolato all'indietro è sempre nella stessa direzione)
- l'immagine è sempre virtuale, diritta, rimpicciolita: **risolvendo per  $v$  l'eq. dei punti coniugati  $1/v = 1/f - 1/u = (u-f)/(uf)$  si ha  $v = uf / (u-f)$  sempre  $-va$ , visto che  $u$  è  $+va$  e  $f$   $-va$**

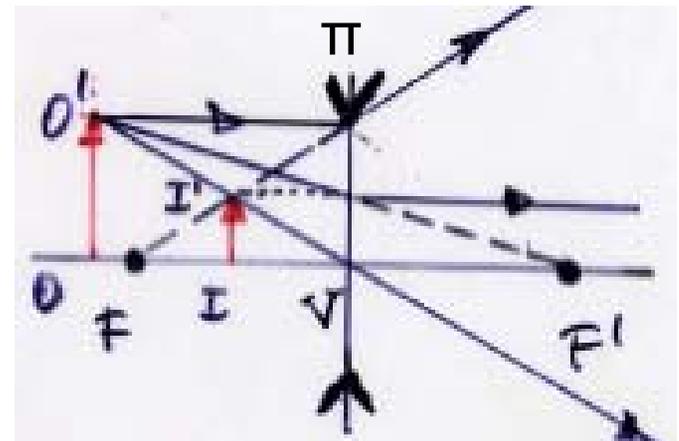
# Lenti sottili, posizione e tipi di immagine

- eq. dei punti coniugati:  $v = uf/(u-f)$ ;  $m = -v/u$
- |                 |              |                                 |
|-----------------|--------------|---------------------------------|
| 1. $u > 2f$     | $f < v < 2f$ | reale, invertita, rimpicciolita |
| 2. $u = 2f$     | $v = 2f$     | “ “ unitaria                    |
| 3. $f < u < 2f$ | $v > 2f$     | “ “ ingrandita                  |
| 4. $u = f$      | $v = \infty$ | “ “ “                           |
| 5. $u < f$      | $v -va$      | virtuale, diritta “             |
| 6. diverg.      | $v -va$      | “ “ rimpicciolita               |

5.



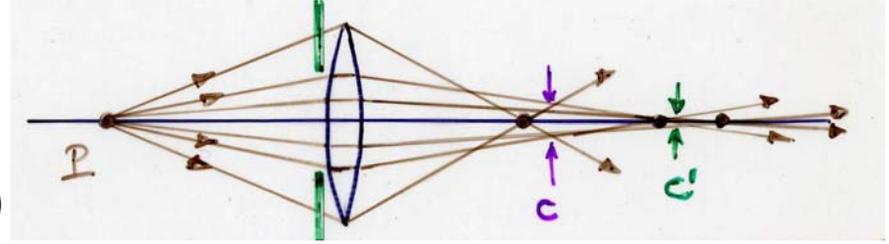
6.



# Aberrazioni delle lenti

- aberrazione sferica (simile agli specchi): oggetto sull'asse

- diaframma, però si riduce la luce
- C, C' cerchi di minima confusione
- oppure sup. non sferiche (parabol.)

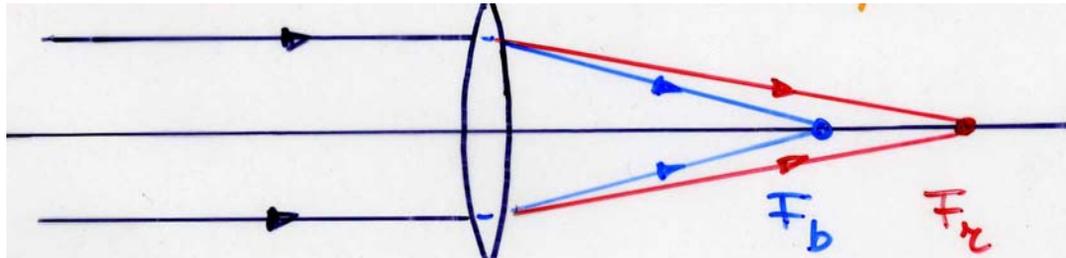


- altri effetti geometrici

- coma/astigmatismo: oggetto poco/molto fuori asse
- distorsione: l'ingrandimento varia con la distanza dall'asse

- aberrazione cromatica, dispersione (assente negli specchi)

- combinazioni di lenti con dispersione diversa



vetro crown K3:

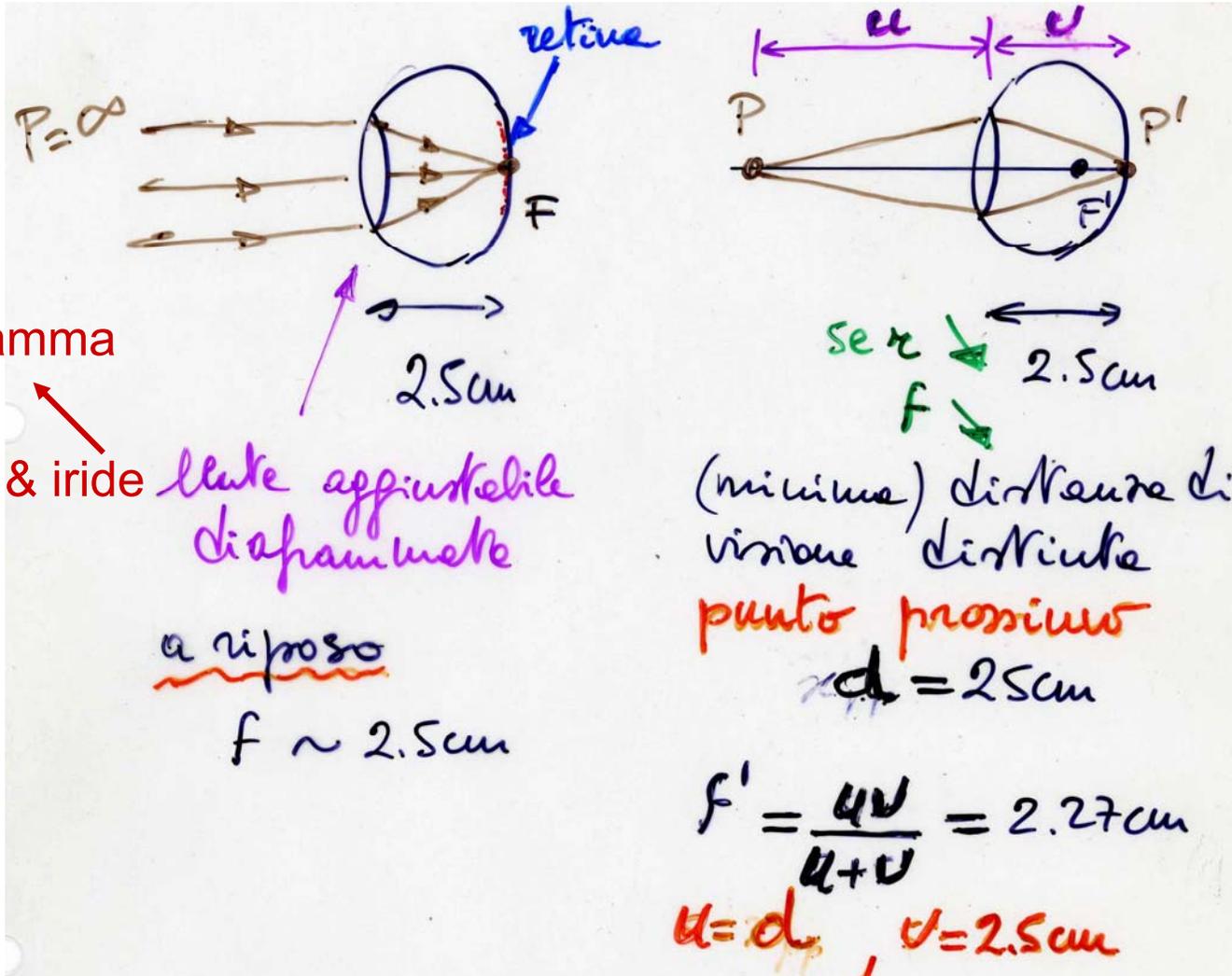
$$n_{\text{blu}} = 1.525$$

$$n_{\text{rosso}} = 1.516$$



# L'occhio

- retina - visione b/n, bastoncelli: pixel  $1 \times 1 \mu\text{m}^2$  (a colori, conici  $4 \times 4 \mu\text{m}^2$ )



diaframma

crystallino & iride

lente

adattabile

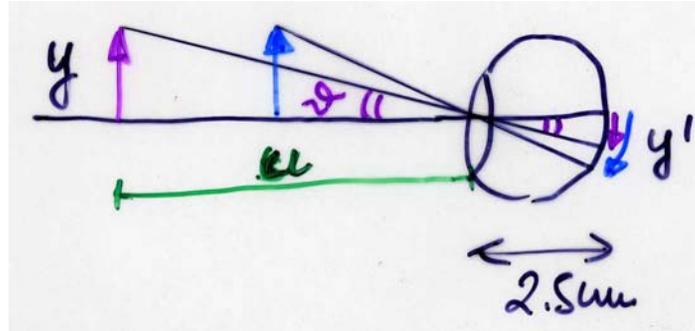
lente aggiustabile  
diaframma

a riposo

$f \sim 2.5\text{cm}$

## L'occhio (2)

- grandezza apparente di un oggetto

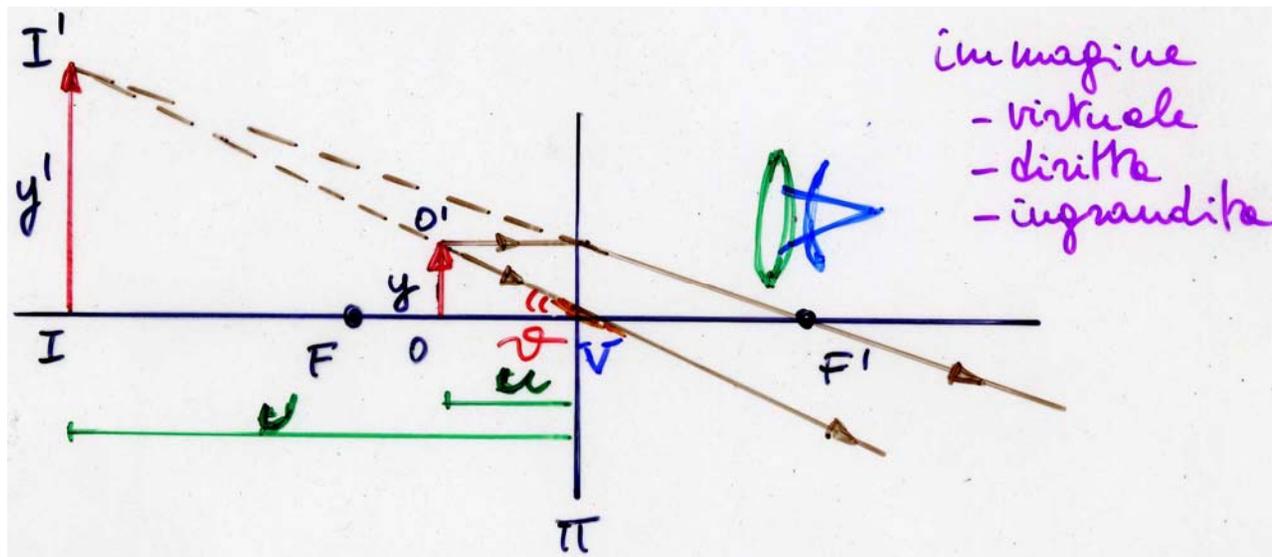


- $y'$  lunghezza dell'immagine sulla retina, l'angolo sotto cui vedo l'oggetto di lunghezza  $y$  è  

$$\theta = y'/2.5\text{cm}$$
d'altra parte  $\text{tg}\theta = y/u \sim \theta$  (angoli piccoli)  

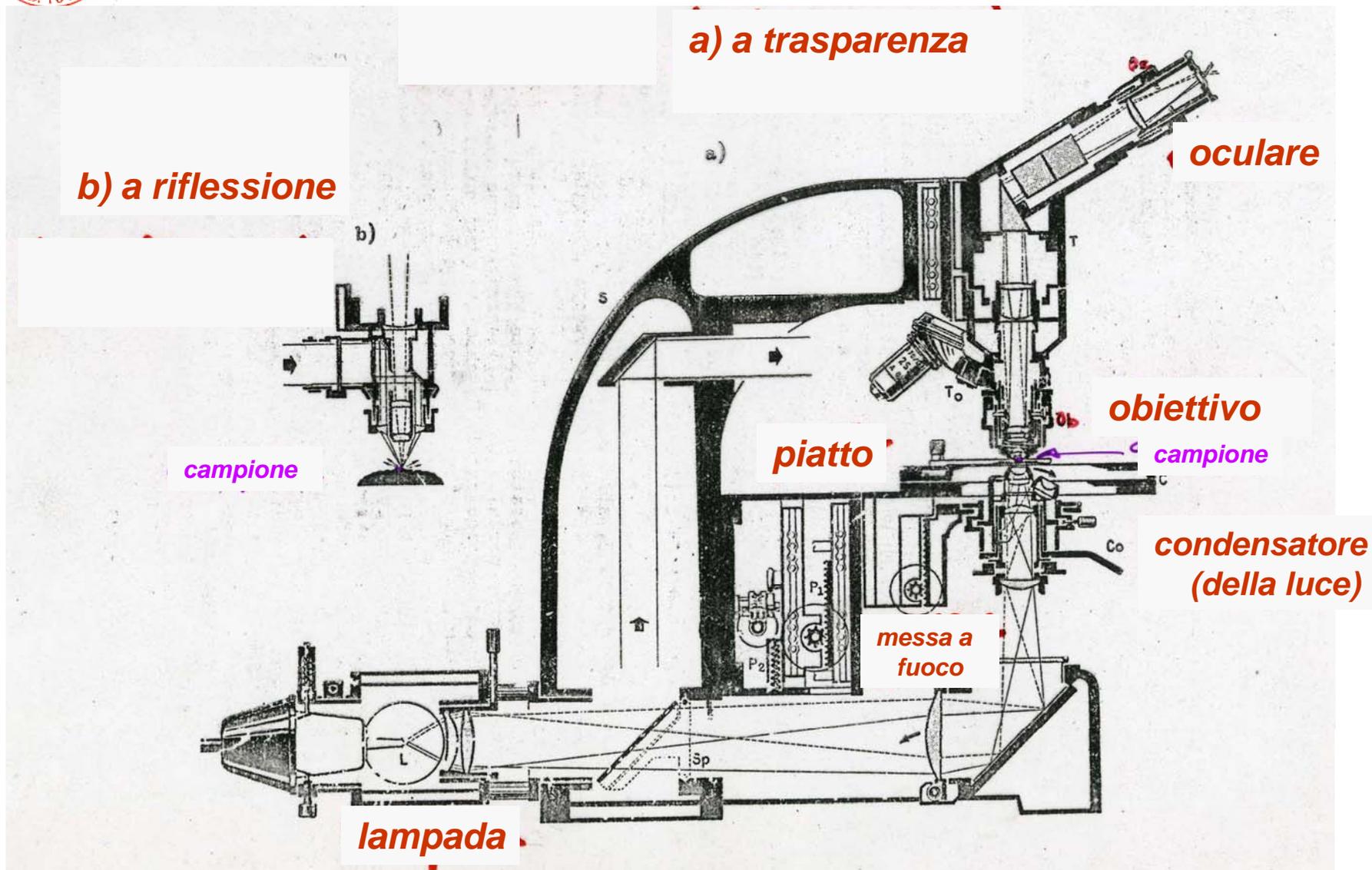
$$y' = 2.5 \text{ cm } y/u$$
 $y'$  cresce se  $y \nearrow$  e se  $u \searrow$
- la risoluzione angolare dei pixel è  $2\mu\text{m}/2.5\text{cm} \sim 8 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$

# La lente d'ingrandimento

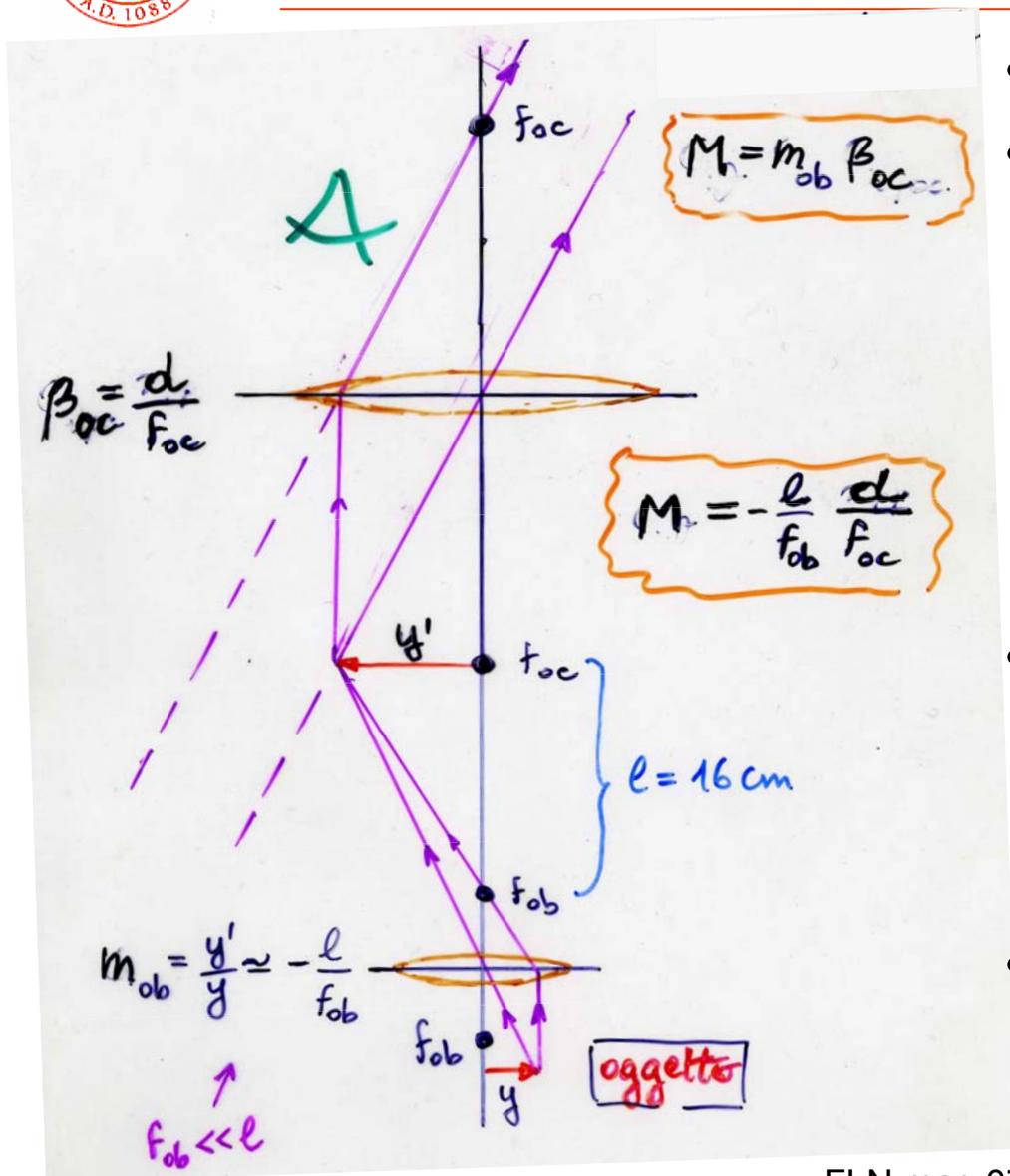


- a occhio nudo:  $\text{tg}\theta_0 = y/d = y/25\text{cm} \sim \theta_0$  oggetto avvicinato alla distanza di visione distinta
- con la lente (convergente):  $\text{tg}\theta = y/u \sim \theta (= y'/v)$  vicino all'occhio
- ingrandimento angolare o visuale  
 $\beta = \theta/\theta_0 = d/u \approx 25\text{cm}/f$  ( $m = -v/u = 1 + 25\text{cm}/f$ )  
 in pratica  $f_{\text{min}} \sim 2.5\text{cm}$  (40 D)  $\rightarrow \beta_{\text{max}} \sim 10$  (compensando le aberrazioni si arriva a 40, microscopio semplice)

# Microscopio ottico composto



# Microscopio ottico (2)



- l'immagine finale è invertita
- l'oggetto è posto vicino a  $F_{ob}$ , l'immag. reale si forma in  $F_{oc}$  ed è vista dall'oculare:  $\rightarrow$  l'ingrandim. è il prodotto dell'ingr. lineare dell'obiettivo per quello visuale dell'oculare (lente d'ingr.)
- con  $f_{ob} \sim 4 \text{ mm}$ ,  $f_{oc} \sim 10 \text{ mm}$  si ha, per costruzione,
 
$$M \sim -(16 \text{ cm} / f_{ob})(25 \text{ cm} / f_{oc}) = -1000$$
- in pratica la limitazione è data dalla  $\lambda$  della luce (vedi oltre, pag. 92-93)

# Prisma

- deflessione

$$\delta = (i-r) + (i'-r') = (i+i') - (r+r')$$

$$\alpha + (90^\circ - r) + (90^\circ - r') = 180^\circ$$

$$\rightarrow \alpha = r+r'$$

- rifrazioni/Snell

$$- \sin i = n \sin r \quad \text{angoli}$$

$$- n \sin r' = \sin i' \quad \text{piccoli}$$



$$\underline{i+i' = n(r+r')}$$

$$i = nr$$

$$i' = nr'$$

es.  
 $\alpha = 60^\circ$   
 $n = 1.52$

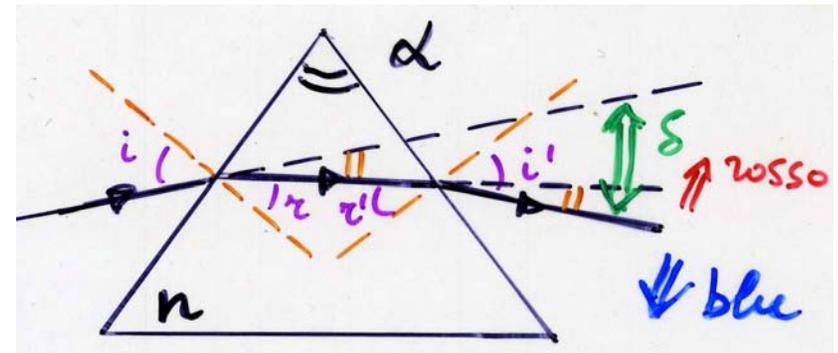
- $\delta \approx (n-1)(r+r') = (n-1)\alpha$  es.  $\delta = 31.2^\circ$

- dispersione e potere dispersivo

$$n = n(\lambda) \quad \Delta\delta/\Delta\lambda = \alpha\Delta n/\Delta\lambda$$

$$n_b = 1.525 \quad n_r = 1.516 \quad \Delta\delta = 0.54^\circ \text{ rosso-blu}$$

$$\Delta\delta/\delta = \Delta n/(n-1) = 1.7\% \text{ vetro crown K3} \quad \nabla \alpha$$





# Onde



# Richiamo: oscillazioni e oscillazioni armoniche

---

ripetendo e riassumendo:

- $y$ : “spostamento dalla posizione di equilibrio,  $y=0$ ”  
(spostamento lineare, angolo, carica etc.);  
forza di richiamo “elastica”

- oscillazione in genere

$$y = y(t) \quad \text{con } y \in (-A, +A)$$

- fenomeno temporale periodico
- regione spaziale fissata e limitata
- energia  $E \propto A^2$ , confinata

- oscillazione armonica

$$y = A \sin(\omega t + \delta) = A \sin[\omega(t + t_0)]$$

dove  $(\omega t_0 + \delta) = \omega(t + t_0)$  è la fase



# Dalle oscillazioni alle onde

- trasferimento di E (ad es. serie di pendoli accoppiati: un pendolo oscillante trasferisce E al pendolo vicino inizialmente fermo e così via – ritardo, sfasamento)
- mezzo elastico (atomi oscillanti trasferiscono E agli atomi adiacenti – ritardo, sfasamento)

$(d \text{ di trasferimento}) / (t \text{ impiegato}) = \text{velocità}$

di propagazione della perturbazione (onda)

- $\lambda$ , lunghezza d'onda, minima distanza fra punti in concordanza di fase (dopo un periodo T)

$$v = \lambda / T = \lambda \nu$$

(T periodo del moto armonico semplice)

# Onde

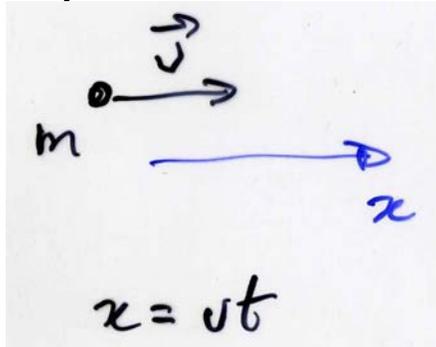
- $f(x,t)$  – propagazione nello spazio (con velocità  $\mathbf{v}$ ) di una perturbazione oscillatoria (in  $t$ ), ossia di energia
- es. onde liquide, serie di pendoli uguali, corda lunga/ $\infty$  tesa, onde sonore, onde e.m., tsunami
- la sorgente fissa la frequenza  
 $\nu = 1/T$  (parte temporale)
- il mezzo 'elastico' è perturbato (messo in oscillazione) al passaggio dell'onda, ma mediamente fermo – non si muove secondo  $\mathbf{v}$  – serve da “sostegno” (un punto oscillante mette in agitazione oscillatoria il vicino, con un certo ritardo)
- l'energia si muove senza trasporto di materia





# Movimento di onde e particelle

particella

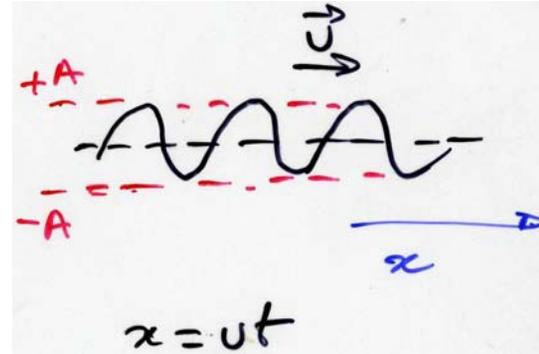


m.r.u.

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

ci vuole una **F**  
per accelerare  
ad es.  $\mathbf{F} = \Delta\mathbf{p}/\Delta t$   
 $= m(\mathbf{v}-0)/\Delta t$

onda



m.r.u.

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad (*)$$

ci vuole una sorgente/**F**  
per accelerare/mettere  
in oscillazione il mezzo  
(sasso sul liquido,  
pendolo etc.)

superf.  $\perp$  alla  
propagazione

(\*) si usa  $I = E/(tS)$



# Rappresentazione matematica dell'onda

- si può mostrare che la **perturbazione  $y$**  in un'onda progressiva (si muove nel verso +vo dell'asse  $x$ ) è data da
- es.1 onda impulsiva/impulso: corda tesa vibrante lunga  $l$

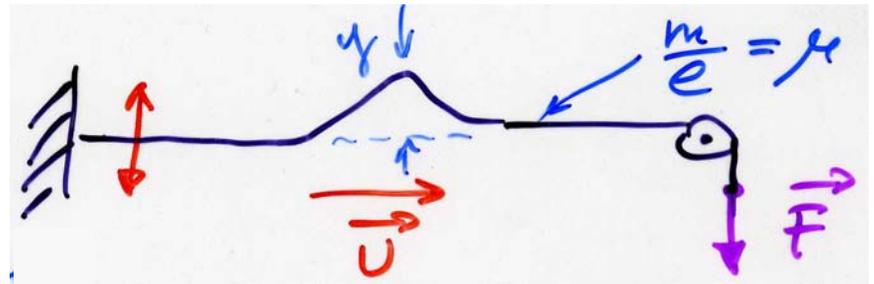
$$y = y(x,t) = y(x-vt)$$

dove  $v$  è la velocità di fase

$$y = y(x-vt)$$

è l'allontanamento dalla posizione di equilibrio, con

$v^2 = F/\mu$  che dipende dall'elasticità ( $F$ ) e dall'inerzia ( $\mu = m/l$ ) del mezzo (vero in generale)



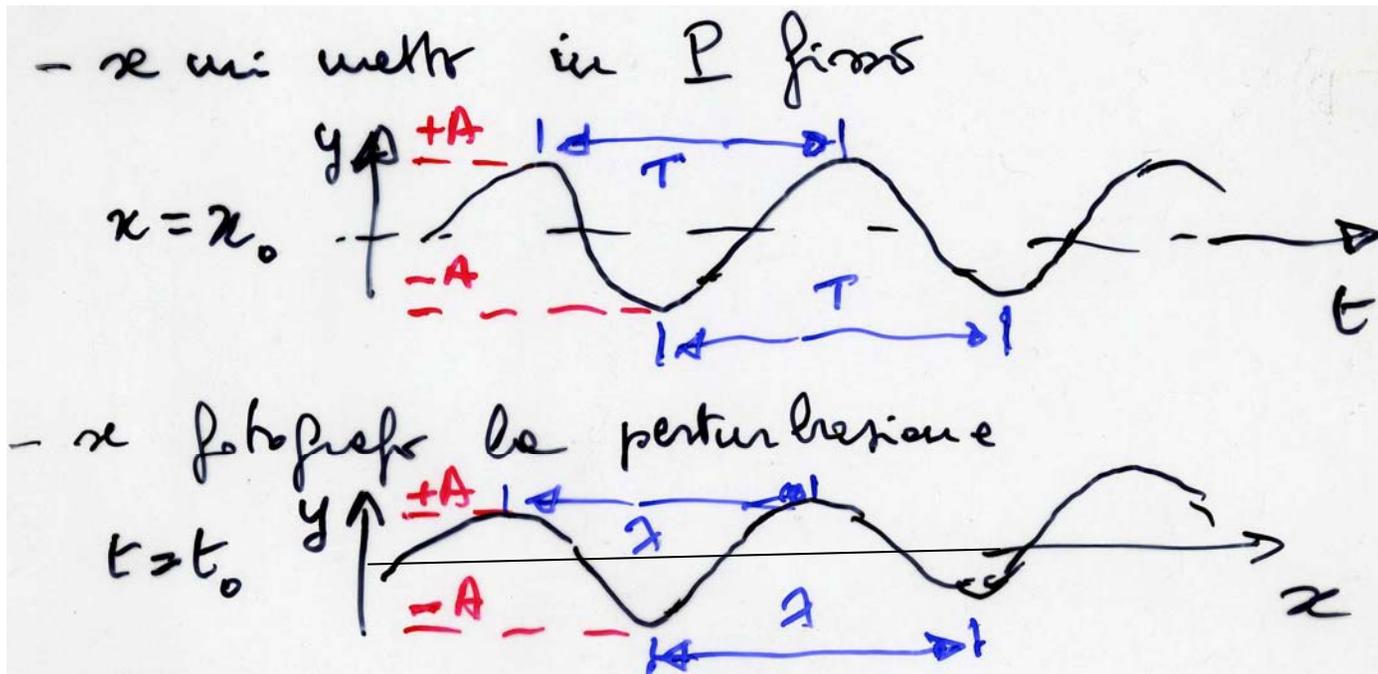


## Rappresentazione matematica dell'onda (2)

- es.2 onda armonica / periodica: l'eq. di un'onda piana monocromatica progressiva è

$$y = A \sin\left[\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(x-vt)\right]$$

dove l'espressione in [ ] è la **fase** dell'onda

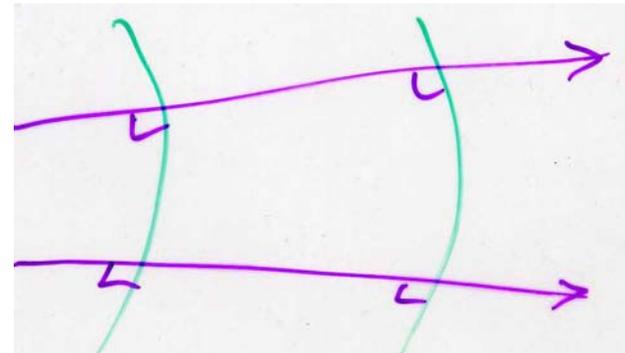




# Rappresentazione matematica dell'onda (3)

- $v = \omega/2\pi$  dipende dalla sorgente
- $v$  e  $\lambda$  dipendono dal mezzo
- fase: descrive lo stato di oscillazione
- fronte d'onda / superficie d'onda: luogo dei punti con la stessa fase; ad es. onda piana, i fronti d'onda sono piani equidistanti  $\lambda$ ; onda sferica, i fronti d'onda sono superfici sferiche equidistanti  $\lambda$  etc.
- raggi:  $\perp$  ai fronti d'onda, direzioni in cui si muove l'onda (cioè l'energia, la qdm) – li abbiamo usati in ottica geometrica

$$\lambda v = \lambda/T = v$$



# Energia e intensità, ampiezza

- l'intensità  $I$  è definita come la potenza media (nel  $t$ ) divisa l'area della superficie  $\perp$  direz. di propagazione

$$I = E/(tS) = P_{\text{media}}/S \quad \text{in W/m}^2$$

- es. onda sferica  $I = P_{\text{media}}/4\pi r^2$   
al tempo  $t$  l'energia è nulla fuori di una sfera di raggio  $r = vt$

- l'en. che traversa  $S$  in  $\Delta t$  è  
 $\Delta E = \eta \Delta V = \eta S \Delta r = \eta S v \Delta t$

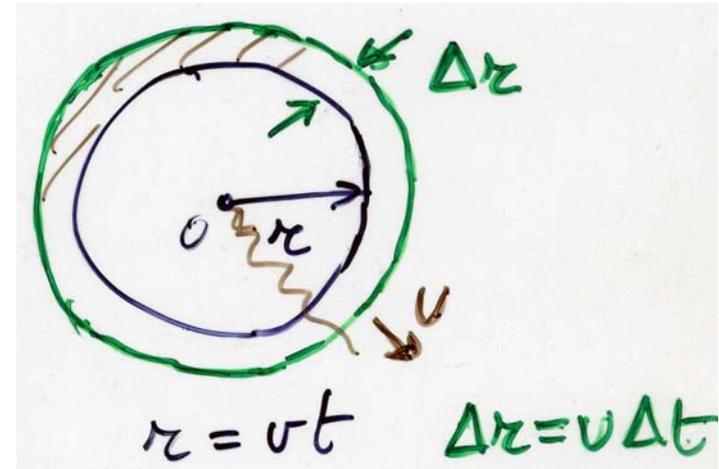
ossia  $P_{\text{media}} = \Delta E/\Delta t = \eta S v$

$$\rightarrow I = P_{\text{media}}/S = \eta v$$

valida per  $\forall$  onda

ma  $\eta \propto A^2$  moto armon. sempl.  $\rightarrow I \propto A^2$

- onda sferica:  $I \propto 1/r^2$ ;  $A \propto 1/r$  (cost. per un'onda piana)





# Velocità di propagazione dell'onda

---

si può mostrare che

- corda tesa vibrante

$$v^2 = F/\mu$$

F tensione della corda,  $\mu = m/\text{lunghezza}$

- onde elastiche nei solidi

$$v^2 = Y/\rho$$

Y modulo di Young,  $\rho$  densità

- onde sonore nei gas

$$v^2 = B/\rho = \gamma RT/M$$

B modulo di volume,  $\gamma = c_p/c_v$

- onde e.m. nel vuoto

$$v^2 = c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$$

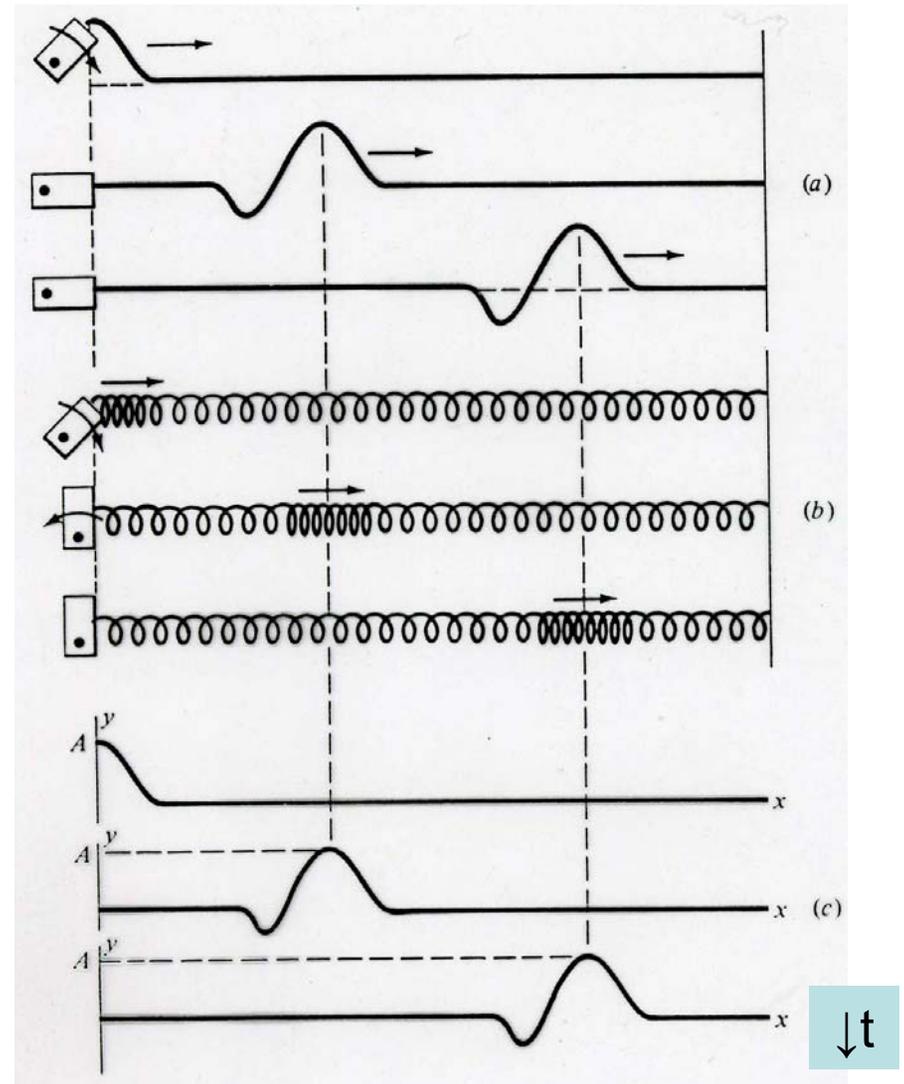
- etc. quindi in generale

$$v^2 \propto \frac{\text{(modulo di) elasticità del mezzo}}{\text{inerzia (o densità di massa) del mezzo}}$$



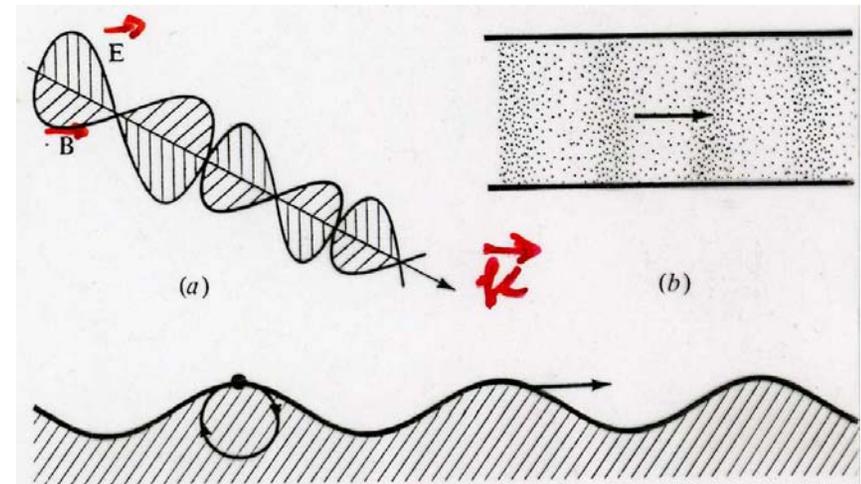
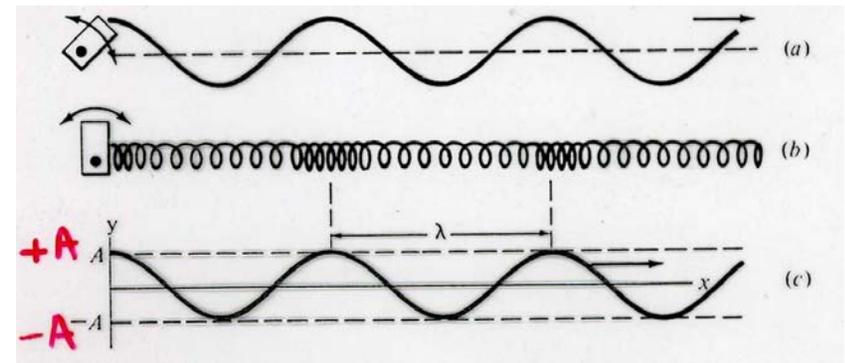
# Esempi di impulsi

- (a) impulso (corda sotto tensione) - trasversale
  - (b) impulso (molla o slinky) - longitudinale
  - (c) rappresentazione grafica di (a) e (b)
- 
- corda:  $y$  misura lo spostamento dalla posizione di equilibrio
  - molla:  $y$  misura la compress./allungamento



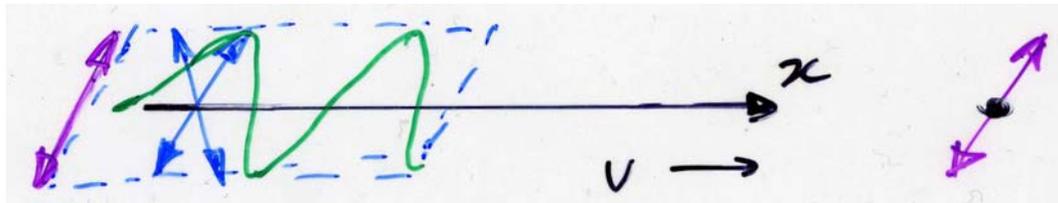
# Esempi di onde periodiche

- (a) onda periodica (corda)
- (b) onda periodica (molla)
- (c) rappresentazione grafica di (a) e (b)
  
- (a) onda e.m.
- (b) onda sonora (pressione)
- onde d'acqua



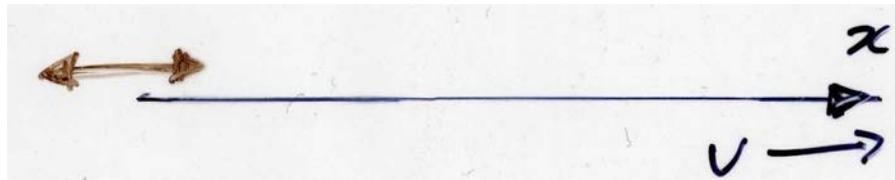
# Onde trasversali e longitudinali

- **onda trasversale: perturbazione  $\perp$  direzione di propagazione** (onde e.m., onde su una corda vibrante, onde dovute all'elasticità di taglio nei solidi)



**polarizzabile:** ad es. piano definito dalla perturb. e dalla direz. di propagazione fisso, polariz. lineare

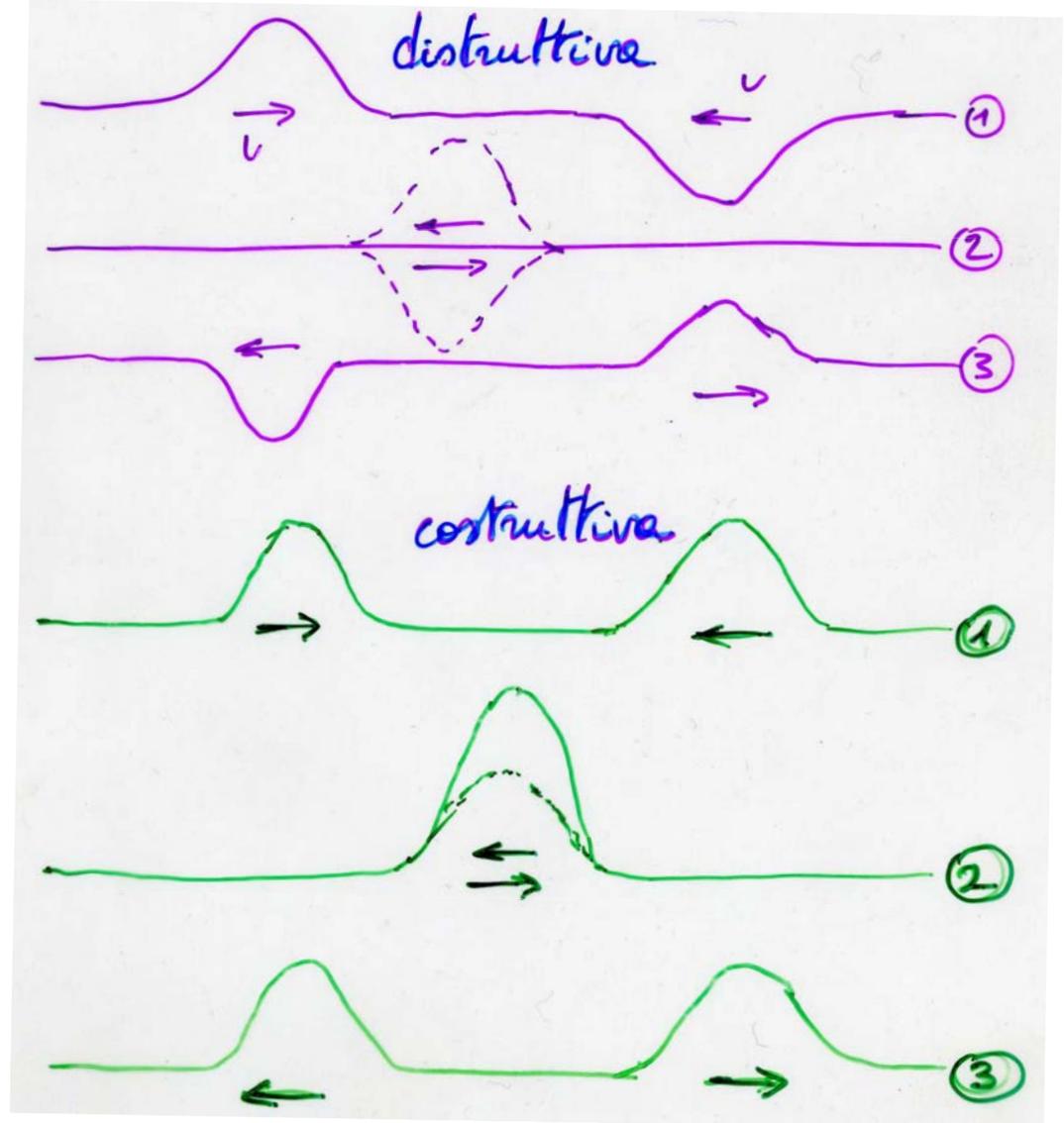
- **onda longitudinale: perturbazione  $//$  direzione di propagazione**



**non polarizzabile** (non si può individuare alcun piano)

# Principio di sovrapposizione

- le eq. sono lineari: in ogni punto in cui arrivano 2 (o più) onde / impulsi si sommano le perturbazioni → interferenza (somma delle ampiezze)





# Onde che si propagano in verso opposto – onde stazionarie

- ad es. in una corda tesa vibrante di lunghezza  $L$ : la riflessione dell'onda ad un estremo si somma con l'onda con l'onda incidente (riflessione con inversione di polarità agli estremi fissi)

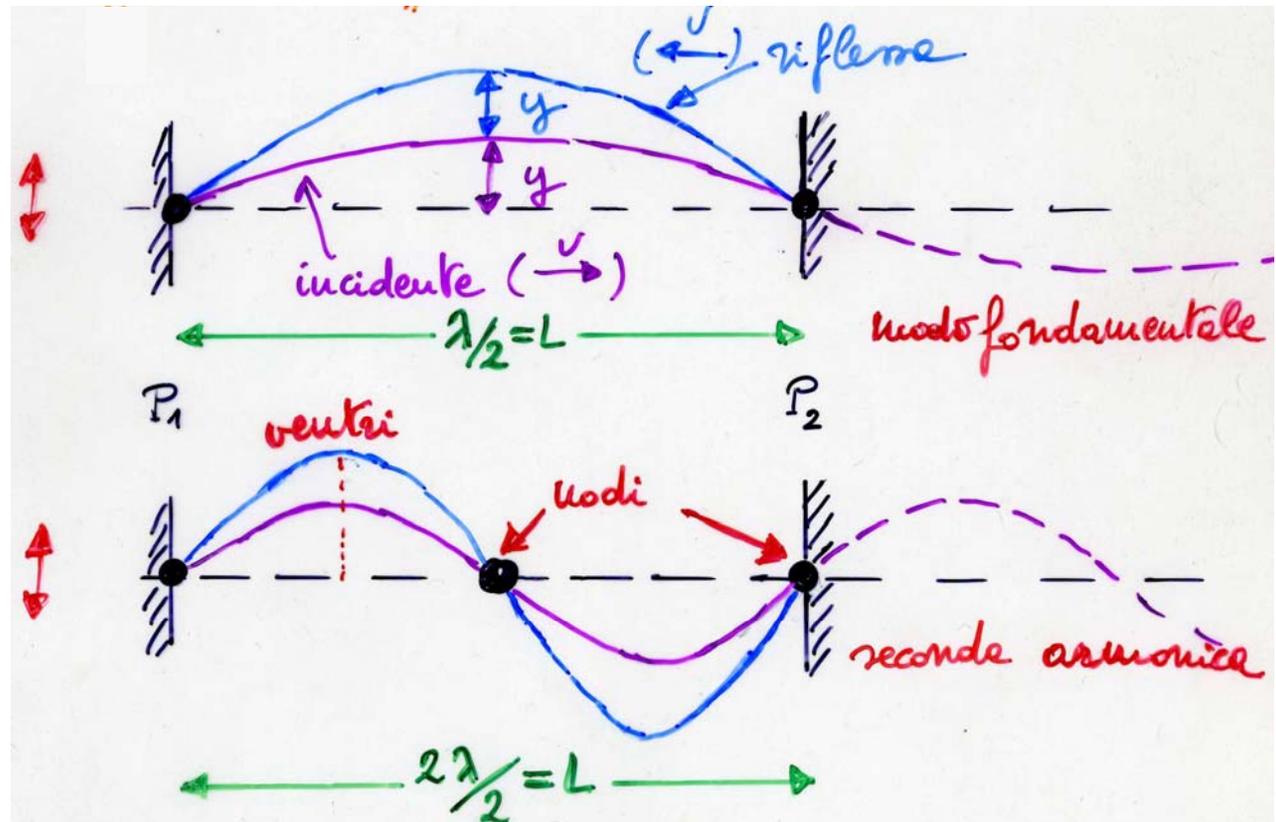
- interferenza, in gen. distruttiva
- relazione fra  $\lambda = v/\nu$  e  $L$  per avere interferenza costruttiva

- risonanza:

$$L = n(\lambda_n/2)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

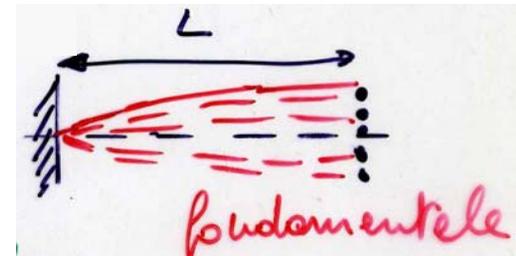
intero





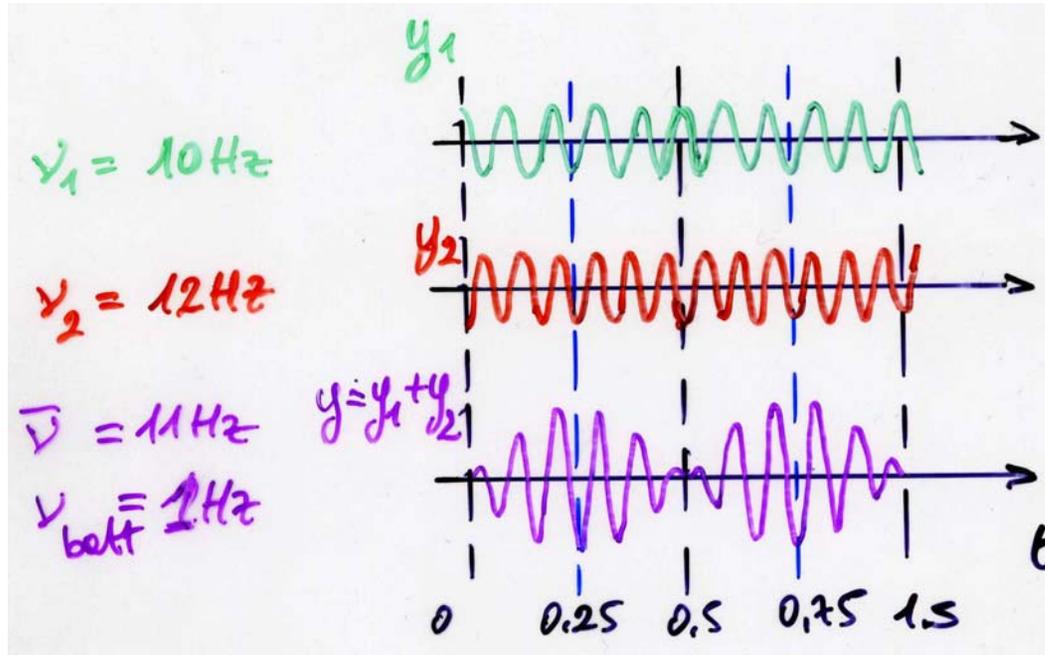
## Onde stazionarie (2)

- per ottenere la risonanza tutte le onde devono essere in fase  
 $v_n = v/\lambda_n = nv/(2L) = nv_1 \quad n = 1,2,3 \dots$   
dove  $v_1 = v/(2L) = 1/(2L)\sqrt{F/\mu}$  è la frequenza fondamentale
- i nodi sono i punti dove l'ampiezza dell'onda è sempre = 0,  
i ventri quelli dove l'ampiezza è massima
- non c'è propagazione di energia fuori della corda, l'onda non viaggia (onda stazionaria)
- si può mostrare che la dipendenza da x e t si separa  
 $y = 2A\sin(2\pi x/\lambda)\cos(2\pi vt)$   
la condizione dei nodi  $\sin(2\pi x/\lambda) = 0$  dà  $2L/\lambda_n = n$  con n intero
- se invece un estremo è fisso (nodo) e l'altro mobile (ventre) –  
ad es. canna d'organo  
 $n\lambda_n/4 = L$  con  $n = 1,3,5 \dots$  dispari  
 $v_1 = v/(4L)$



# Battimenti (\*)

- due (o più) onde di frequenza vicina e di uguale ampiezza, ad es.



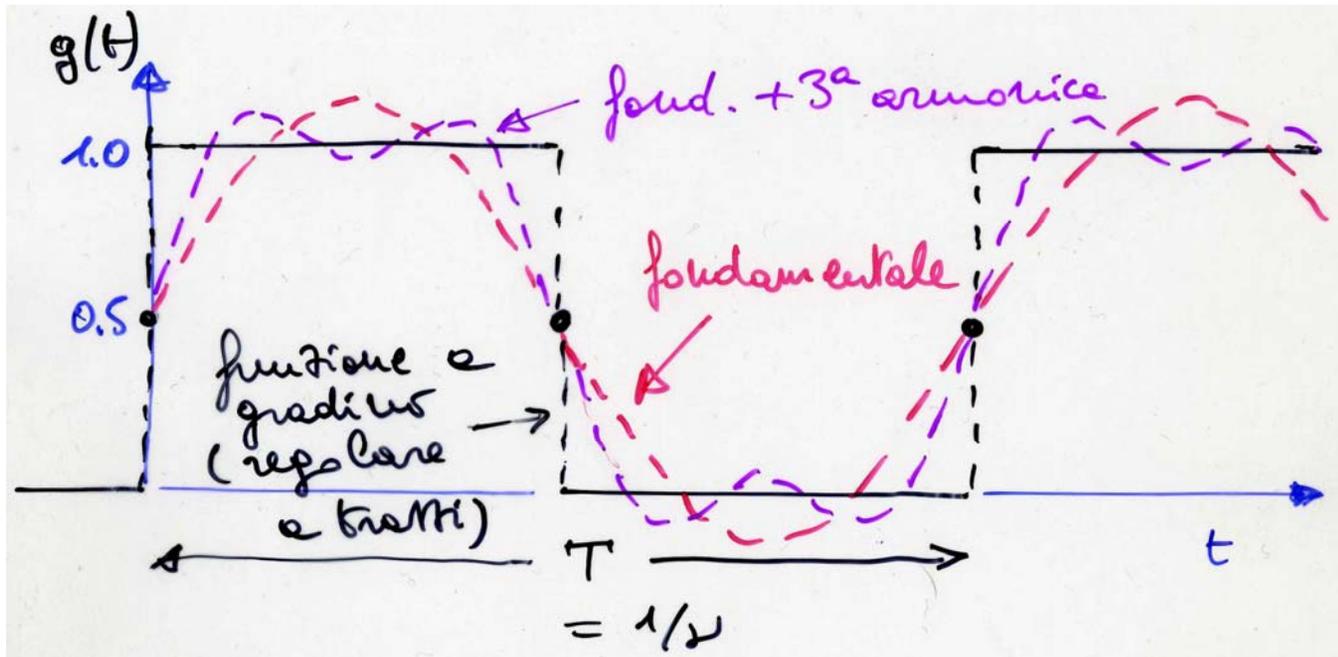
interferenza  $\rightarrow$  frequenza media  $\bar{\nu} = (\nu_1 + \nu_2)/2$  per un termine modulante  $\nu_{\text{batt}} = (\nu_2 - \nu_1)/2$

- usati per accordare strumenti musicali



# Moto periodico generico: teorema di Fourier

- il moto armonico semplice è il più semplice moto periodico → un generico moto periodico, ad es.  $g(t)$ , è esprimibile con una sovrapposizione di m.a.s.,  $f(t)$

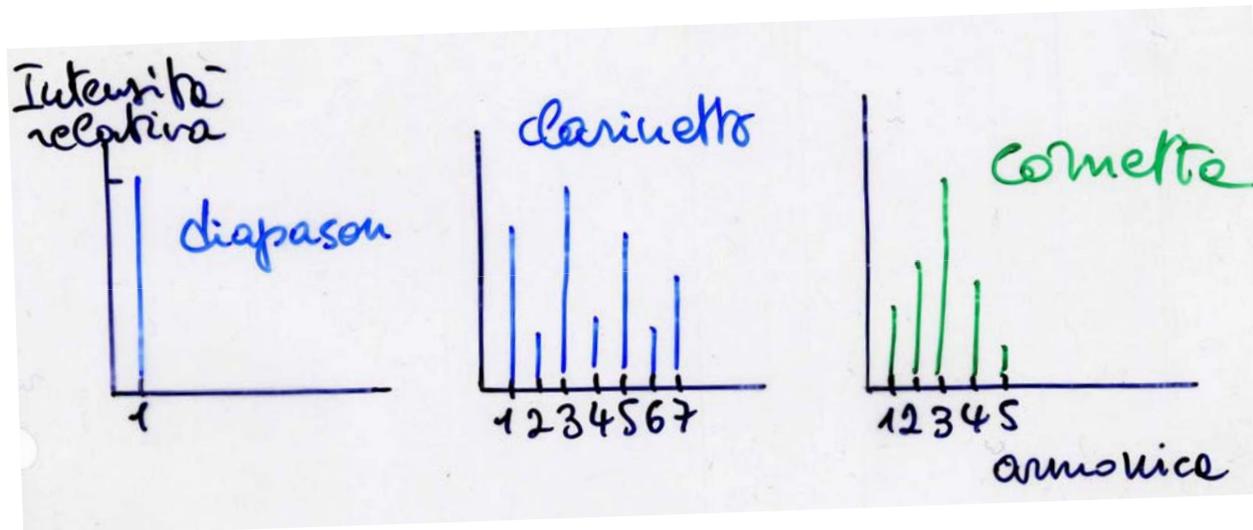


$$f(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left[ \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(3 \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) + \dots + \frac{1}{2n+1} \sin\left((2n+1) \cdot 2\pi \frac{t}{T}\right) + \dots \right]$$



## Teorema di Fourier (2)

- $\forall$  moto periodico di dato  $T$  ( $\nu$ ) è rappresentabile come somma di tanti (in generale  $\infty$ ) m.a.s. di frequenza  $\nu$  (fondament.),  $2\nu$ ,  $3\nu$  ... (armoniche super.), in generale sfasati fra loro – **teorema di Fourier**
- strumenti diversi hanno, per una stessa nota, la stessa fondamentale ma diverse armoniche (diverso spettro)





# Onde sonore

- onde di pressione in gas, liquidi, solidi
- aria (20°C)  $v = \sqrt{(\gamma RT/M)} = 343 \text{ m/s}$
- H<sub>2</sub>O  $v = 1450 \text{ m/s}$
- $I = p_{\text{max}}^2 / (2\rho v)$

dove  $(\rho v)$  è l'impedenza acustica e  $p_{\text{max}}$  è in effetti un  $\Delta p$ , sovrapposto a  $p_0 = 101.3 \text{ kPa}$

$p_{\text{max}} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ Pa}$   $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  soglia di udibilità

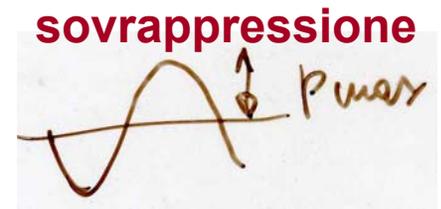
“ “  $30 \text{ Pa}$   $I$  “  $1 \text{ W/m}^2$  soglia del dolore

- $v$  e  $\lambda$ , l'orecchio umano è sensibile nell'intervallo

$v \in (30, 20000) \text{ Hz}$  [ $< 30 \text{ Hz}$  infra-s.,  $> 20 \text{ kHz}$  ultra-s.]

$\rightarrow \lambda \in (10, 0.02) \text{ m}$  in aria

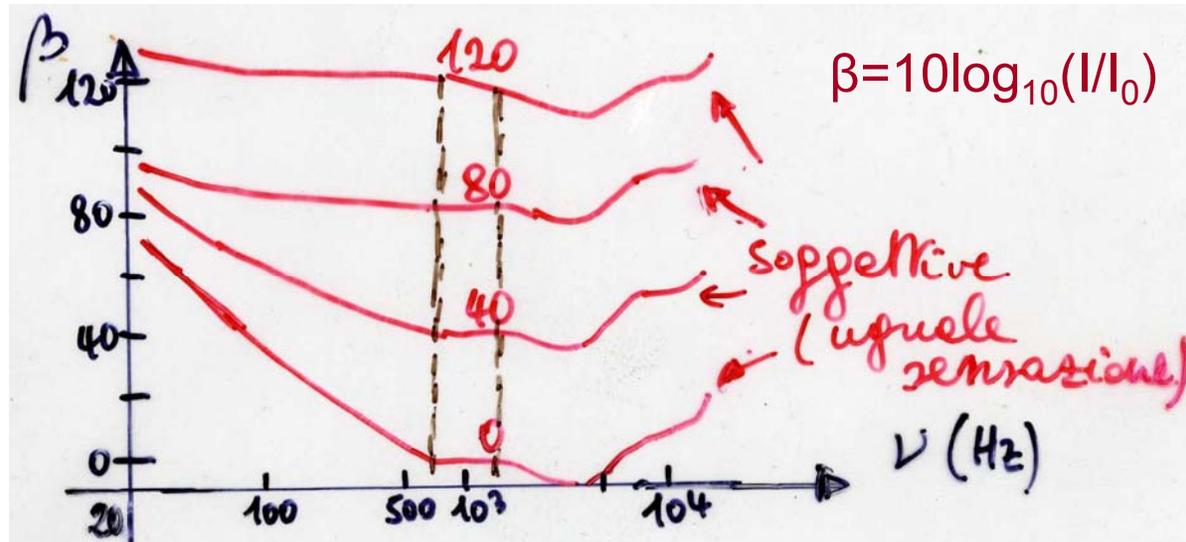
(l'orecchio del *Myotis lucifugus*  $v_{\text{max}} \sim 200 \text{ kHz}$  u.s.  $\lambda \sim 2 \text{ mm}$ )





## Onde sonore (2)

- u.s. in H<sub>2</sub>O es. 5 MHz →  $\lambda \sim 0.3$  mm  
si usano cristalli piezoelettrici: ecografia, produzione di emulsioni, lavaggi, effetti biologici su batteri
- sensibilità dell'orecchio: 12 ordini di grandezza in intensità ~ logaritmica (legge di Fechner) → scala logaritmica





## Onde sonore (3)

---

- si definisce livello d'intensità

$$\beta = 10\log_{10}(I/I_0)$$

che si misura in decibel (dB), dove  $I$  è l'intensità che corrisponde a  $\beta$  e  $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$  la soglia di udibilità (con riferimento all'orecchio umano)

- soglia di udibilità:  $\beta = 10\log_{10}(I_0/I_0) = 0 \text{ dB}$   
“ del dolore:  $\beta = 10\log_{10}(10^{12}) = 120 \text{ dB}$

traffico stradale  $\sim 70\text{-}80 \text{ dB}$  (inquinamento acustico)

- siccome  $I \propto A^2$  si ha una definizione analoga di  $\beta$   
 $\beta = 20\log_{10}(A/A_0)$   
con  $A$  ampiezza corrispondente a  $\beta$  etc.



# Effetto Doppler

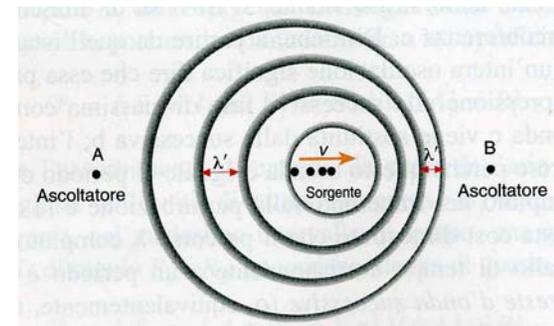
- consideriamo una sorgente S di onde sonore di frequenza  $\nu$  ed un osservatore O ad una certa distanza; se i due sono relativamente fermi, O sentirà un suono avente la stessa  $\nu$
- supponiamo che S si muova verso O con vel.  $v_s$  ed emetta una cresta per  $t=0$ : la successiva sarà emessa dopo  $T=1/\nu$ , intanto la 1<sup>a</sup> ha viaggiato  $\lambda=vT=v/\nu$  mentre S ha viaggiato  $v_s/\nu \rightarrow$  separazione fra due creste success.

$$\lambda' = v/\nu - v_s/\nu = (v - v_s)/\nu$$

e O sente una frequenza

$$\nu' = \nu v / (v - v_s)$$

( $\nu' = v/\lambda'$ , se si muove S, la vel. delle onde non cambia)





## Effetto Doppler (2)

---

- se S si allontana da O, si avranno creste più spaziate  
 $\lambda' = (v+v_s)/v$  e  $v' = v v/(v+v_s)$
- supponiamo ora S ferma e O che si avvicina con vel.  $v_o$ , la vel. delle onde relativa ad O è  $v+v_o$ , quindi O incontra le creste con frequenza

$$v' = (v+v_o)/\lambda = v (v+v_o)/v$$

( $\lambda = v/v$ , il moto di O non ha effetto sulla  $\lambda$  del suono, O intercetta solo più creste di quando è fermo relativamente ad S)

- S ferma e O si allontana, la vel. delle onde relativa ad O è  $v-v_o$  e avremo

$$v' = (v-v_o)/\lambda = v (v-v_o)/v$$



## Effetto Doppler (3)

- riassumendo: quando S e O si avvicinano, la frequenza del suono percepita da O aumenta; quando si allontanano, diminuisce – lo spostamento di frequenza può servire a misurare la velocità relativa
- riassumendo in una sola formula

$$v' = v \frac{V - v_o}{V - v_s}$$



dove  $v_s$ ,  $v_o$  vanno presi con valore e segno: saranno +vi se sono paralleli a  $v$ , -vi se antiparalleli

- le formule valgono per tutte le onde meccaniche (nei gas, liquidi, solidi); per la luce valgono in 1<sup>a</sup> approx, se le vel. sono  $\ll c$ , inoltre conta solo la vel. relativa



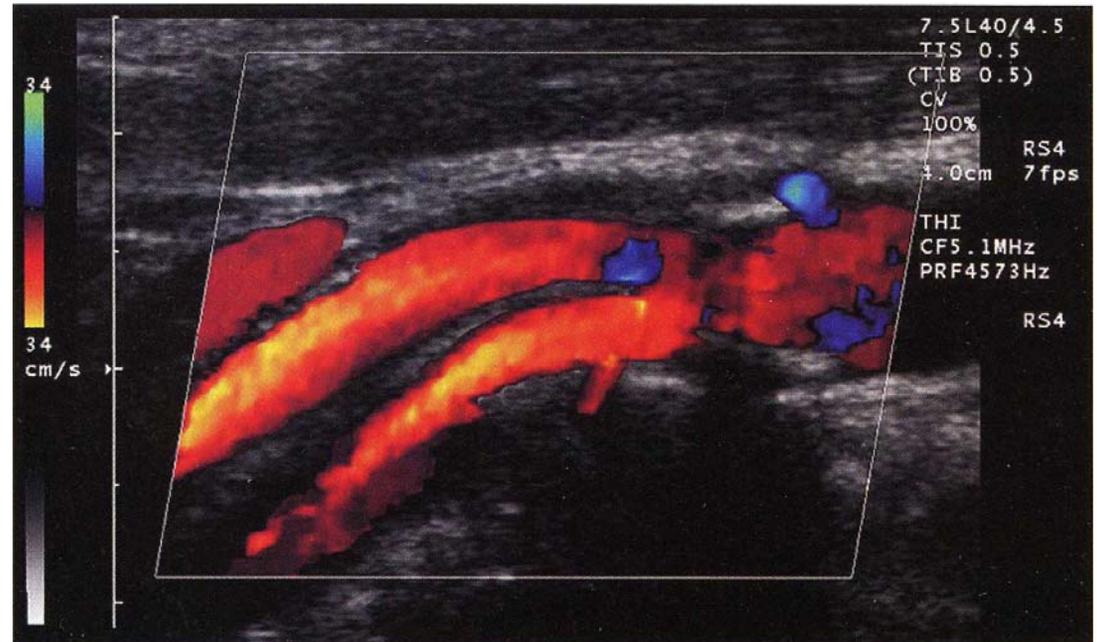
# Applicazioni dell'effetto Doppler

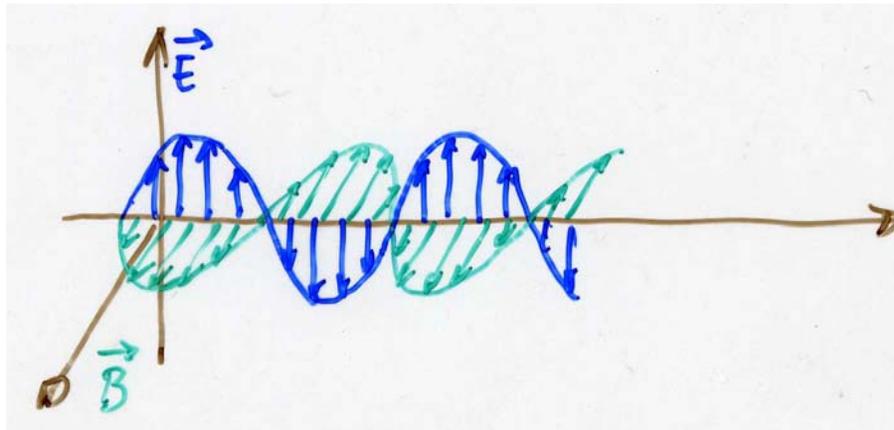
- radar (radio detecting and ranging) per misura di  $v_s$
- ecoDoppler con US; lo spostamento di frequenza è

$$\Delta v = 2(v_s/v) v \cos\theta$$

dove  $v_s$  è la vel. della sorgente (sangue, globuli rossi),  $v = 1540$  m/s quella del suono nei tessuti molli,  $\theta$  è l'angolo fra trasduttore e vaso sanguigno

- si lavora con impulsi brevi (come i delfini, pipistrelli etc.) ed i segnali riflessi (eco) sono processati matematicamente – rosso e blu indicano  $v_s +va$  e  $-va$ , rispettt.



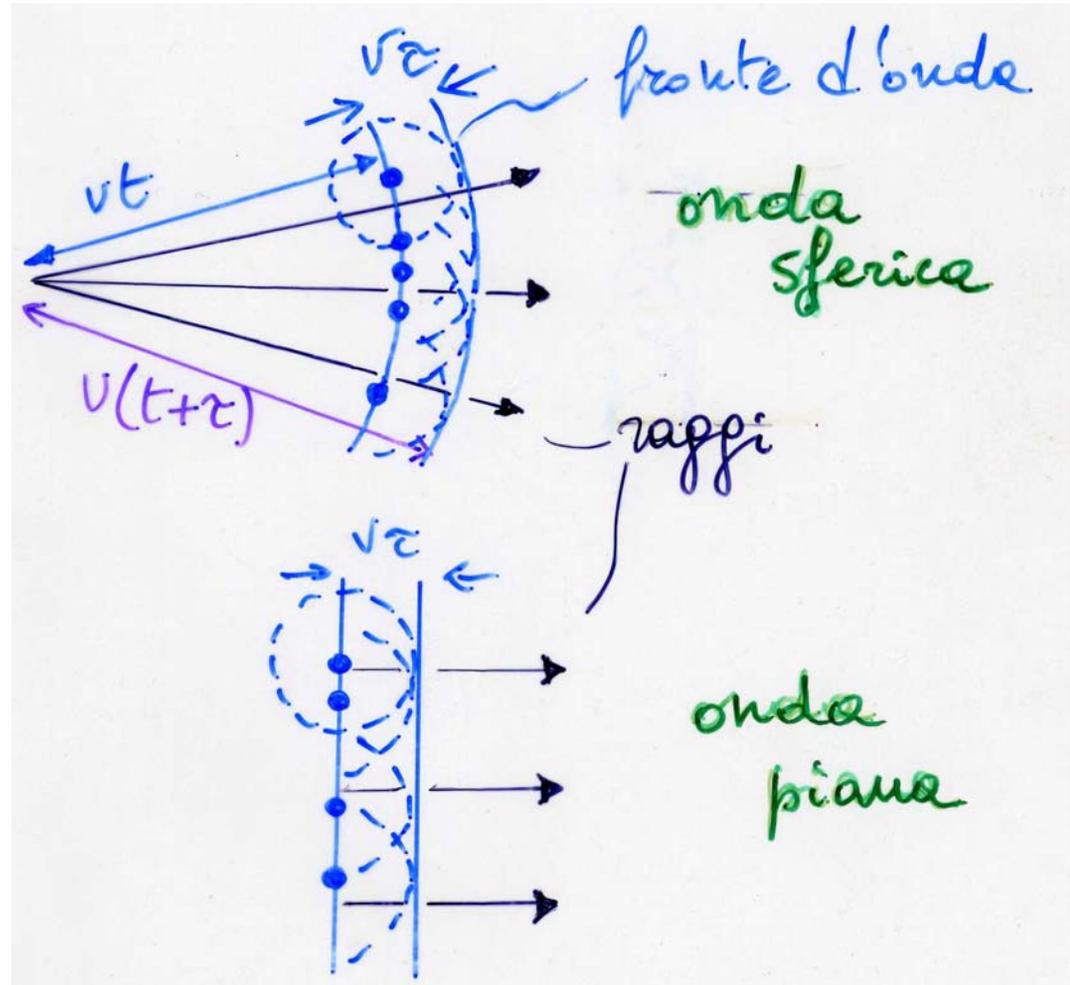


# Ottica fisica



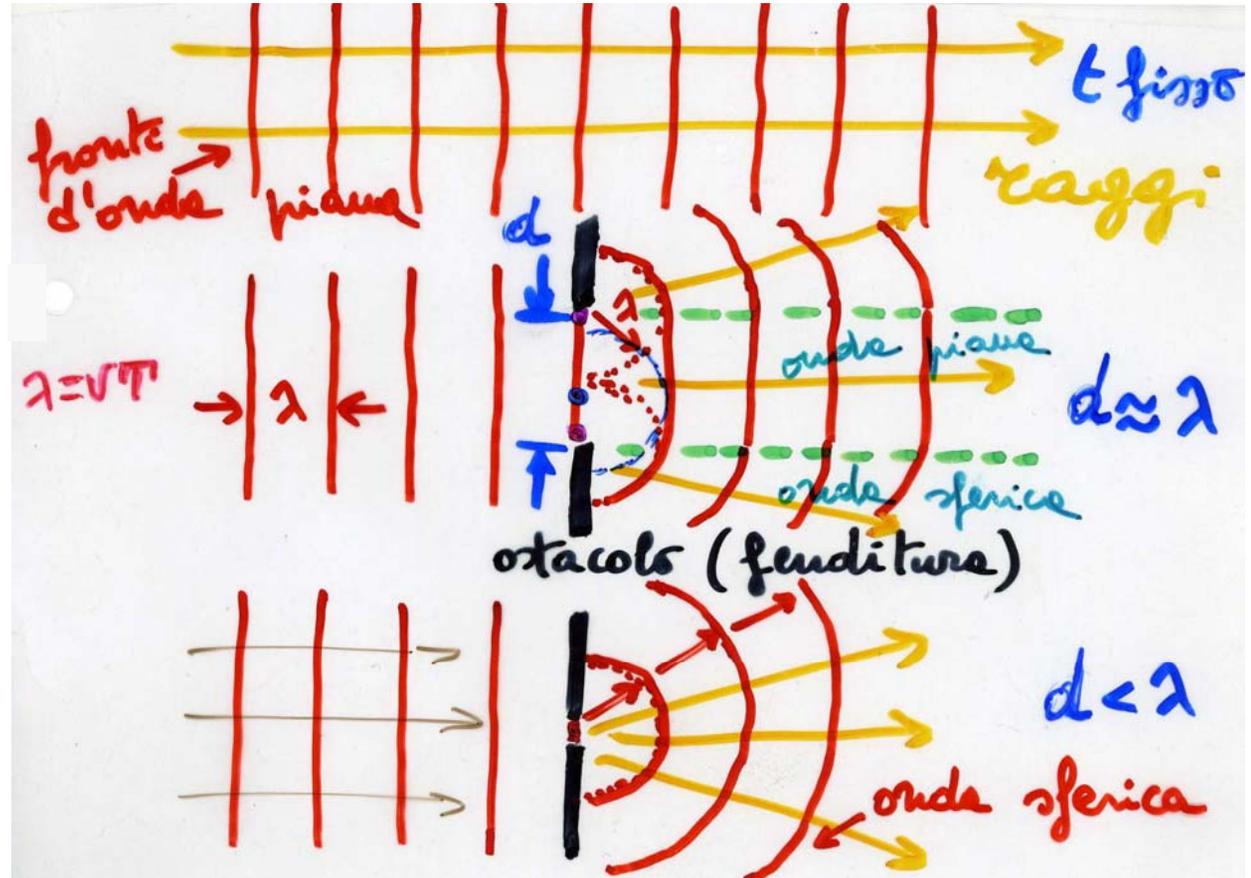
# Principio di Huygens

- propagazione di onde in mezzi omogenei e isotropi: l'involuppo delle onde sferiche elementari emesse dai punti di un fronte d'onda dà il nuovo fronte d'onda
- [ampiezza onde elem. max in avanti e = 0 per  $\theta \geq \pi/2$  (non ci sono onde regressive)]
- può essere esteso a mezzi anisotropi (birifrangenza) e alla propagazione in mezzi diversi (riflessione e rifrazione)



# Applicazione del principio di Huygens

- il principio di Huygens spiega naturalmente la **diffrazione delle onde**
- ad es. un fronte d'onda piano è trasmesso solo parzialm. da una fenditura, ai bordi si sviluppa un'onda sferica la cui ampiezza decresce come  $1/(\text{distanza dalla fenditura})$





# Diffrazione delle onde

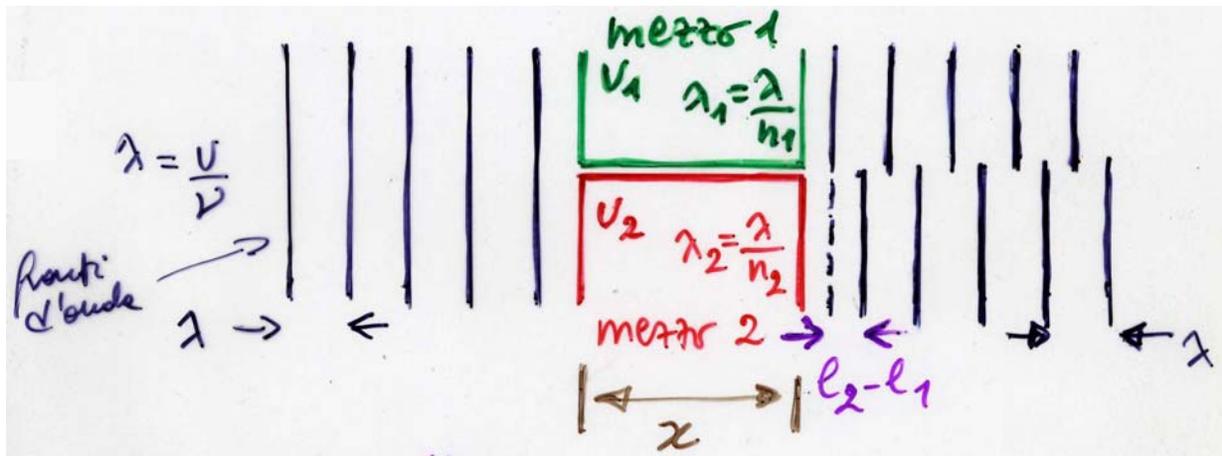
- non si possono selezionare i raggi! quando un'onda incontra un ostacolo/fenditura di larghezza  $d$ 
  - $d \gg \lambda$ , si seleziona una larga parte del fronte d'onda, effetti di diffrazione solo ai bordi
  - $d \sim \lambda$ , diffrazione e trasmissione
  - $d < \lambda$ , dopo l'ostacolo l'onda è interamente diffratta ( $\sim$  onda sferica o cilindrica)
- **onde sonore**  $\lambda \in (0.02, 10) \text{ m}$  **diffrazione importante**
- **onde luminose**  $\lambda_{\text{vis}} \in (0.4, 0.7) \cdot 10^{-6} \text{ m}$  **ottica geometrica**
- risoluzione di punti vicini/ potere di localizzazione degli strumenti ottici (ad es. microscopio)
  - risoluzione  $\approx \lambda$
  - $\lambda_{\text{blu}} = 4.5 \cdot 10^{-7} \text{ m} \sim 10^3 r_0$ , raggio di Bohr (H)

non si possono  
“vedere” gli atomi



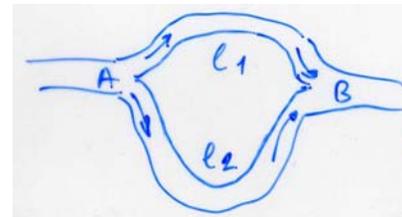
# Cammino ottico

- in un'onda piana varia solo la fase  
t fisso:  $y = A \sin(2\pi x/\lambda)$   $A = \text{cost}$
- onda che segue cammini diversi (passa in mezzi diversi)



- cammino ottico:  $l_{1,2} = n_{1,2}x$  ( $x/\lambda_{1,2} = n_{1,2}x/\lambda$ )
- differenza di fase:  $\delta = (2\pi/\lambda)(l_2 - l_1)$
- oppure si può variare il cammino geometrico

**sfasamento: effetto del mezzo sull'onda**



# Interferenza di onde armoniche

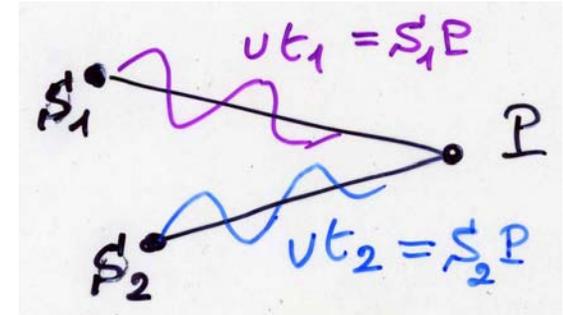
- x fisso (P), onde monocrom., stessa A

$$y_1 = A \cos \omega t$$

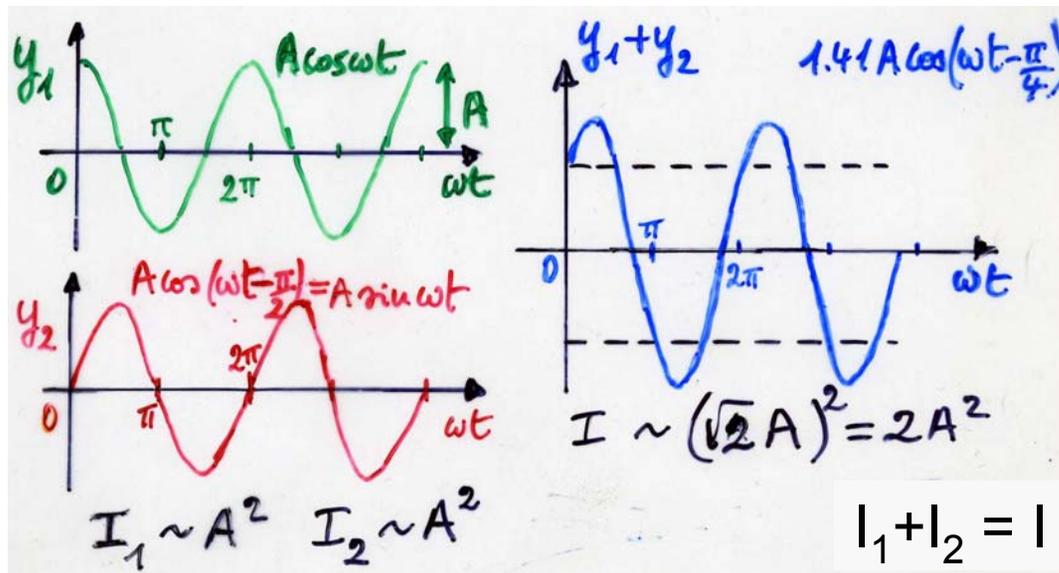
$$y_2 = A \cos(\omega t + \delta)$$

differenza di fase

$$\delta = 2\pi\nu(t_2 - t_1)/\lambda$$



- si ha sempre interferenza (ma con la luce normale, emissioni atomiche scorrelate e brevi, non si evidenzia)
- c'è interferenza sia con onde longitudinali che trasversali
- ad es.





## Interferenza (2)

---

- se  $\delta = 2m\pi$        $m = 0, 1, 2 \dots$   
[ $\Delta x = m\lambda$ ]

si ha **interferenza costruttiva**: le ampiezze si sommano

$$I \propto (A+A)^2 = (2A)^2 = 4A^2$$

- se  $\delta = (2m+1)\pi$        $m = 0, 1, 2 \dots$   
[ $\Delta x = (2m+1)\lambda/2$ ]

si ha **interferenza distruttiva**, le ampiezze si sottraggono

$$I \propto (A-A)^2 = 0$$

NB per evidenziare l'interferenza  $\delta$  deve essere fisso

( $\rightarrow$  sorgenti coerenti, relazione di fase fissa, il che non è vero per la luce normale)



# Interferenza della luce – esperienza di Young

---

- da una sorgente monocromatica (ad es. linea D del Na,  $\lambda = 589 \text{ nm}$ ) se ne ottengono due coerenti, relazione di fase fissa, con artifici: due fenditure (Young) [o due specchi (Fresnel)]
- la luce prodotta dalle fenditure  $S_1$  e  $S_2$  è raccolta su uno schermo lontano (oppure si inserisce una lente) dove si osservano le frange d'interferenza
- in O, equidistante da  $S_1$  e  $S_2$ , le due onde arrivano sempre in fase  $\rightarrow$  interferenza costruttiva, max d'intensità, frangia chiara
- muovendosi sullo schermo, la diff. di cammino aumenta fino all'opposizione di fase, 0 di intensità, frangia scura; poi le onde ritornano in fase, frangia chiara etc.





## Interferenza della luce (3)

- in P generico, le onde difratte da  $S_1$  e  $S_2$  sono in fase se la diff. di cammino ottico è un numero intero di  $\lambda$  (in opposizione se numero dispari di  $\lambda/2$ )

in fase  $dy/L = m\lambda$   $m = 0, 1, 2, \dots$

in opposiz.  $dy/L = (2m+1)\lambda/2$  ”

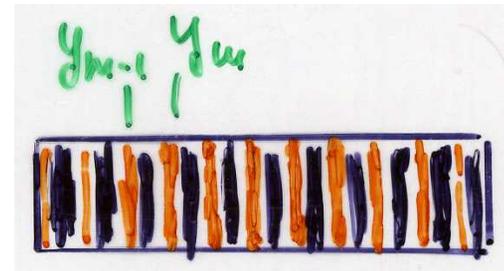
diff. di fase  $2\pi dy/(\lambda L)$

- distanza fra massimi / righe gialle (o minimi / righe scure) sullo schermo

$$y_m - y_{m-1} = L\lambda/d$$

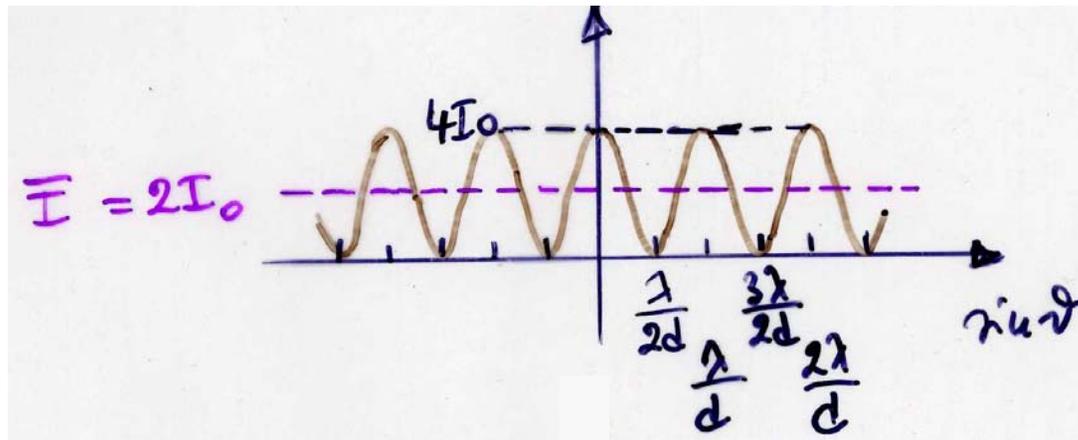
$$\rightarrow \lambda = (d/L)\Delta y$$

con  $\lambda \sim 0.6 \mu\text{m}$ ,  $d = 1 \text{ mm}$ ,  
 $L = 2 \text{ m} \rightarrow \Delta y = 1.2 \text{ mm}$



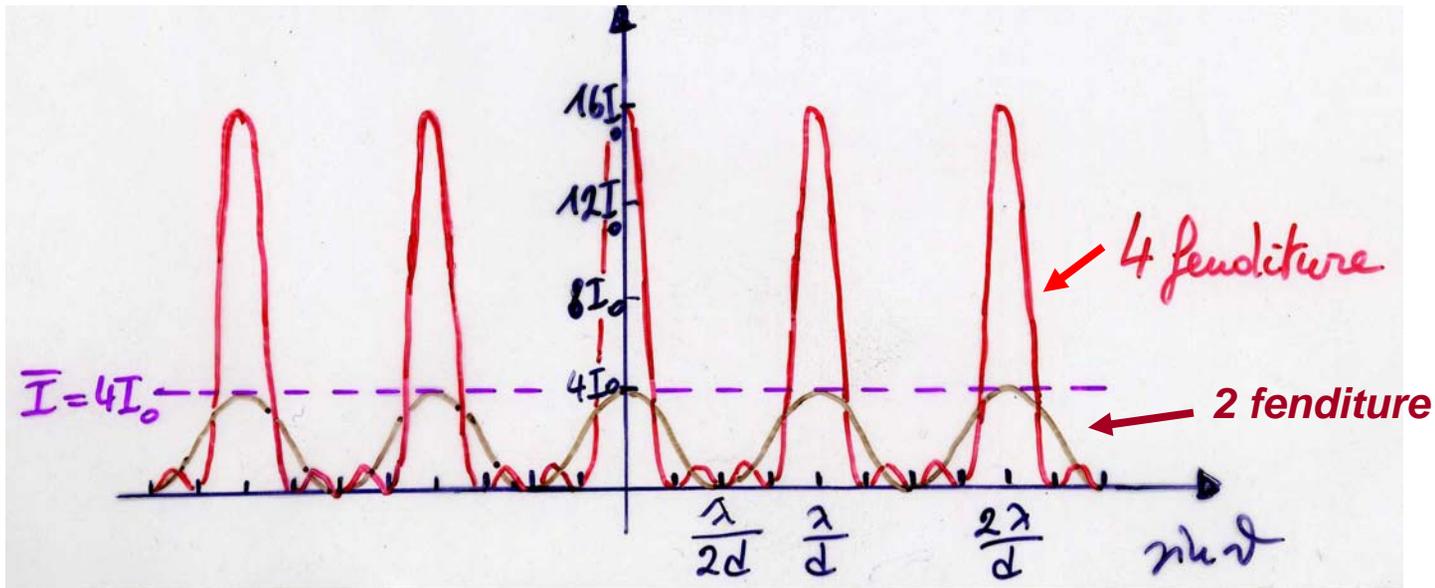
## Interferenza della luce (4)

- l'interferenza della luce prova che la luce è un fenomeno ondulatorio (ma non se è trasversale o longitudinale, per distinguere bisogna studiare la polarizzazione)
- se non si usa una sorgente monocromatica → max e min sovrapposti (a parte il primo) e non si osservano le frange
- intensità sullo schermo con 2 fenditure



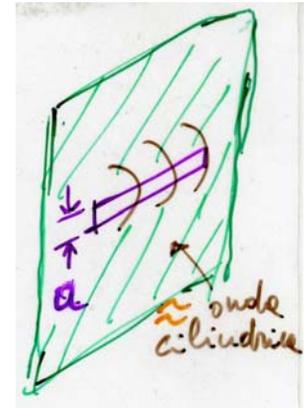
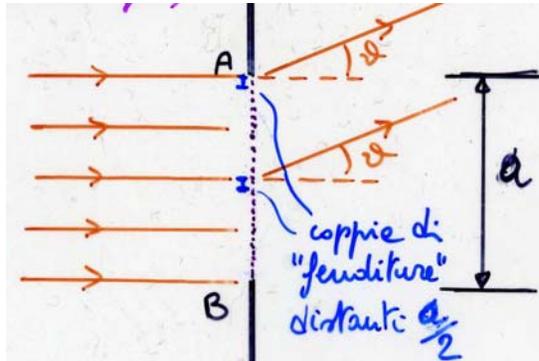
## Interferenza della luce (5) (\*)

- se si ripete l'esperimento con un numero maggiore di fenditure si ottengono massimi più separati (e si sviluppano max secondari → è più facile misurare  $\lambda$ ); ad es. con 4 fenditure l'intensità è

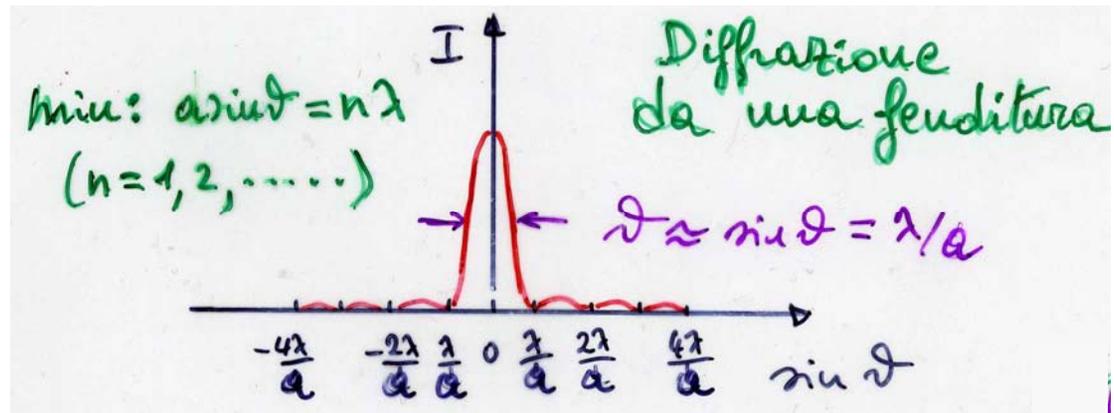
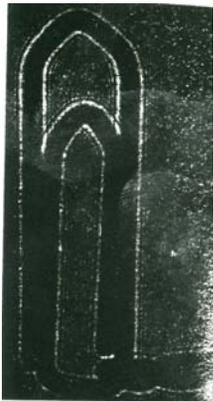


# Diffrazione da una fenditura

- diffrazione à la Fraunhofer (schermo a grande distanza o nel piano focale di una lente)

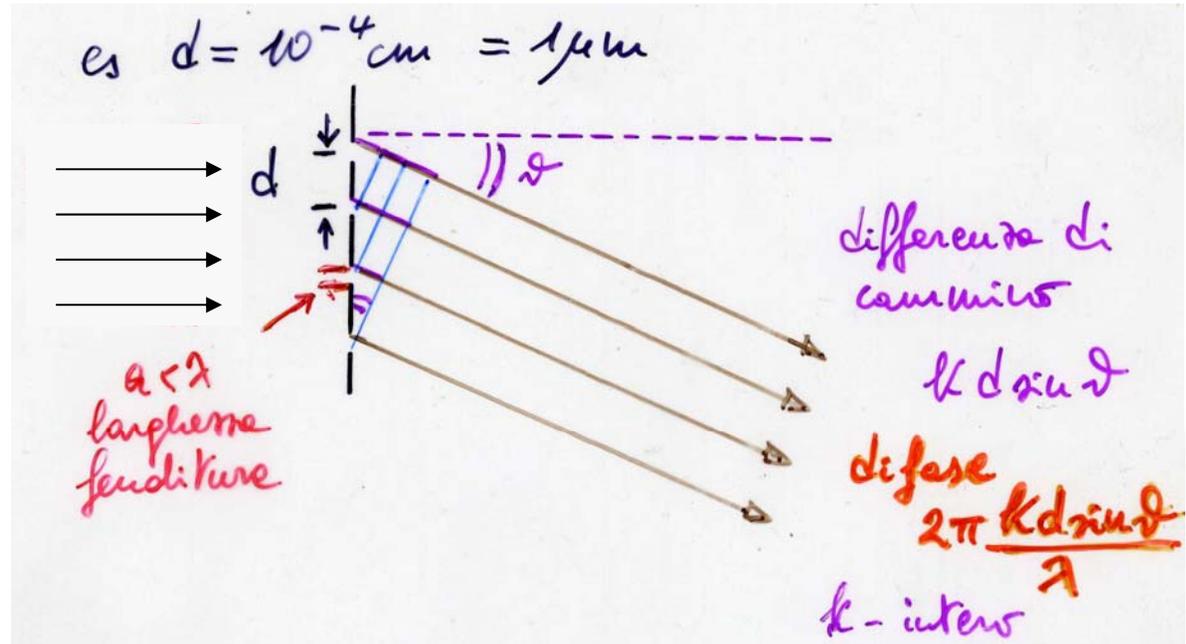


- scomponendo la fenditura in coppie di fenditure distanti  $a/2$  si può vedere che c'è un max di  $I$  per  $\theta = 0$  e max secondari molto deboli



# Reticolo di diffrazione

- realizzato con incisioni // su vetro o plastica
- se c'è un max per una coppia di fenditure, tutte le altre sono in fase



$$\sin\theta = m\lambda/d$$

$$m = 0, 1, 2, 3 \dots$$

ora  $\theta$  è grande, es.  $\lambda = 0.589 \mu\text{m}$ ,  $\theta_1 = 36.1^\circ \rightarrow$  misura di  $\lambda$  più precisa

- se  $\sin\theta \neq m\lambda/d$  si ha interferenza distruttiva  $\rightarrow$  max ben separati



# Limitazioni dei microscopi

---

- l'ingrandimento del microscopio ottico è dato approx da

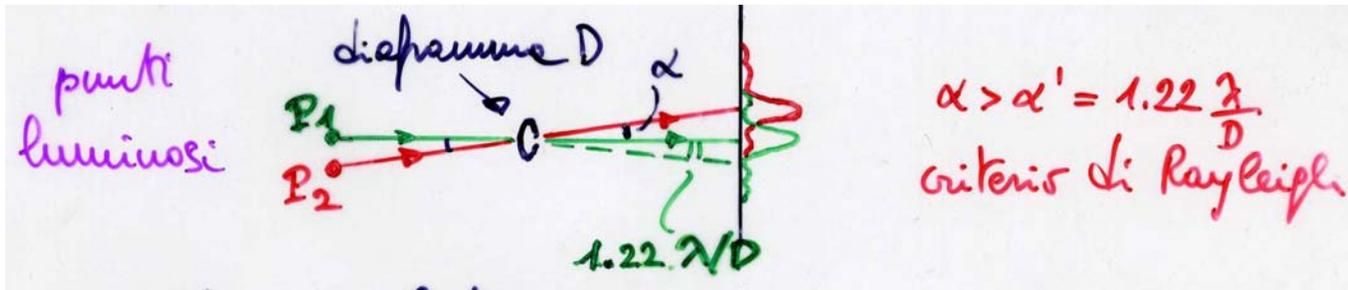
$$M = -(16 \text{ cm}/f_{ob})(25 \text{ cm}/f_{oc})$$

- limitazioni

- aberrazioni geometriche → diaframmi, sistemi di lenti (perdita di luce)
- aberrazioni cromatiche → lenti composte (perdita di luce, ogni rifrazione aria-vetro implica 4% di luce persa in riflessione, 4 lenti, 8 riflessioni, 32% di luce persa etc.)
- $f_{ob,min} \sim 4 \text{ mm}$ ,  $f_{oc,min} \sim 10 \text{ mm}$   
→  $M \sim -1000$
- limite intrinseco: dato dalla natura ondulatoria della luce, due punti luminosi appariranno in effetti come figure di diffrazione di larghezza  $\propto \lambda$

## Limitazioni dei microscopi (2)

- diffrazione da un'apertura / ostacolo di diametro  $D$ , **larghezza della macchia**  $\sim 1.22\lambda/D$  – due punti saranno separabili solo se le macchie non si sovrappongono

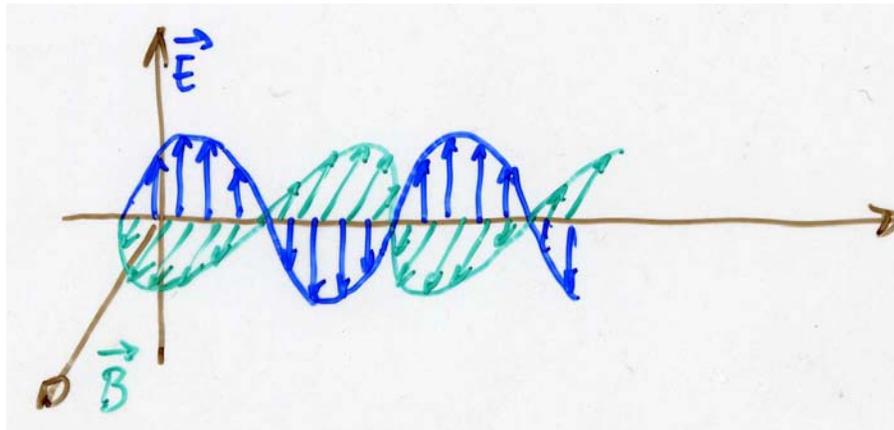


- si può mostrare che  $d_{\min} = 0.61\lambda/(n\sin\theta)$  dove  $n$  è l'ind. di rifraz. del mezzo intorno all'obiet. e  $\theta$  l'angolo sotto cui è visto l'obiettivo  $\rightarrow$  ingrand. utile  
 $M_{\text{utile}} \sim d/d_{\min} \sim 0.1 \text{ mm}/0.2 \mu\text{m} \sim 500$
- $\rightarrow$  obiettivi a immersione (olio  $n = 1.55$ ,  $\lambda' = \lambda/n$ ); UV, però lenti di  $\text{SiO}_2$  e fotografia  $\rightarrow$  microscopio elettronico,  $\lambda \propto 1/(mv)$  (vedi microfisica)



# Polarizzazione della luce

- le onde e.m. sono trasversali: si dimostra osservando la polarizzazione della luce, ad es. se  $\mathbf{E}$  oscilla // direzione fissa si ha polarizzazione lineare



- polarizzazione: si ottiene con polaroids (catene allungate conduttrici in una direzione, assorbono una componente di  $\mathbf{E}$ ), riflessione, dicroismo, birifrangenza

## Polarizzazione (2)

- ad es. polarizz. per riflessione

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 ; \quad \theta_r = \theta_1$$

$$\text{se } \alpha = 90^\circ, \quad \theta_2 = 90^\circ - \theta_r$$

$$\sin \theta_2 = \cos \theta_1$$

d'altra parte se le onde e.m.

sono trasversali, l'onda riflessa,

dovuta all'oscillazione nel mezzo 2, non può avere

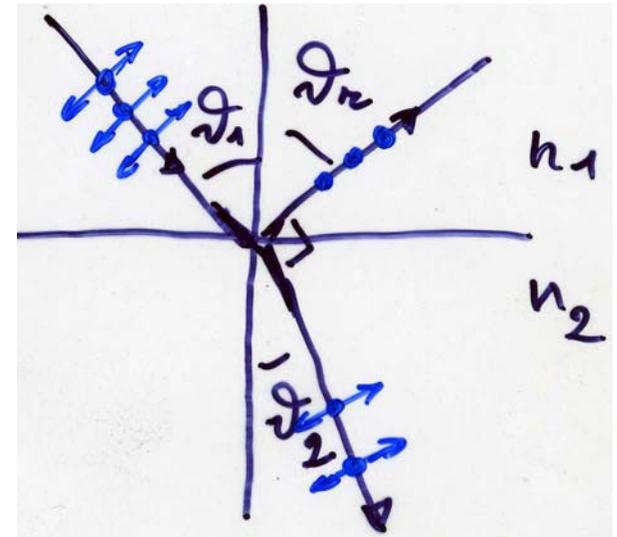
una componente nella direzione di propagazione →

risulta polarizzata  $\perp$  al piano del disegno per un

angolo  $\theta_1 = \theta_p$

$$\text{tg} \theta_p = \sin \theta_p / \cos \theta_p = \sin \theta_1 / \sin \theta_2 = n_2 / n_1$$

**legge di Brewster**





## Polarizzazione (3)

---

- se un fascio di luce traversa un (o più) polaroid, solo una componente di  $\mathbf{E}$  può passare, l'altra sarà assorbita → riduzione di ampiezza e di intensità
- legge di Malus, luce polarizzata linearmente in ingresso di ampiezza  $E_0$ , intensità  $I_0$

$$E_1 = E_0 \cos \theta_1 \quad I_1 = I_0 \cos^2 \theta_1$$

dove  $\theta_1$  è l'angolo fra  $\mathbf{E}$  e l'asse di trasmissione del polaroid, secondo cui la luce è polarizzata in uscita;

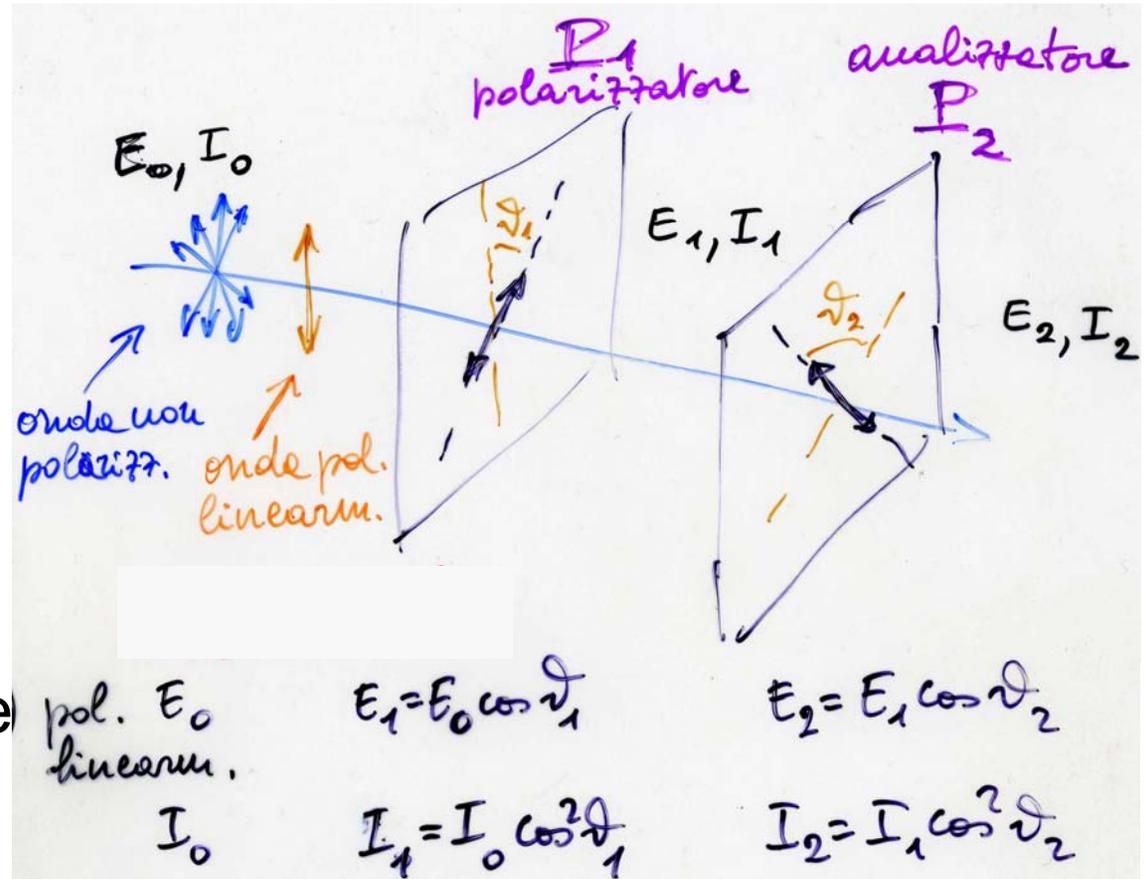
se la luce non è polarizzata,  $\theta_1 = 45^\circ$ , valor medio sul 1° quadrante,

$$E_1 = E_0 / \sqrt{2} \quad I_1 = I_0 / 2$$

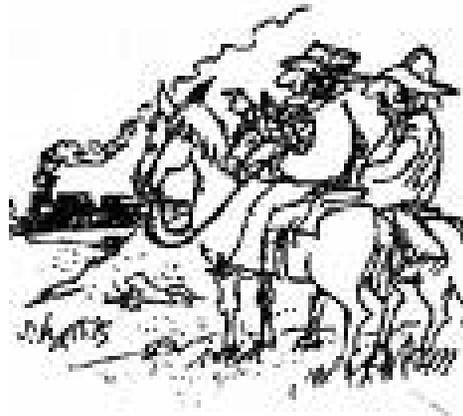


# Polarizzazione (4)

- con due polaroid in serie, il 2° vede la luce passata dal 1° e basterà applicare due volte la legge di Malus
- con questo sistema è possibile studiare ad es. una soluzione otticamente attiva posta fra  $P_1$  e  $P_2$  e misurarne la concentrazione  $\propto$  angolo di cui ruota  $E$



non pol.	$E_0$ $I_0$	$E_1 = E_0/\sqrt{2}$ $I_1 = I_0/2$	$E_2 = E_0 \cos \theta_2 / \sqrt{2}$ $I_2 = I_0 \cos^2 \theta_2 / 2$
----------	----------------	---------------------------------------	---



Two cowboys marvelling at the  
Doppler effect in a train whistle

**Fine di oscillazioni e onde**