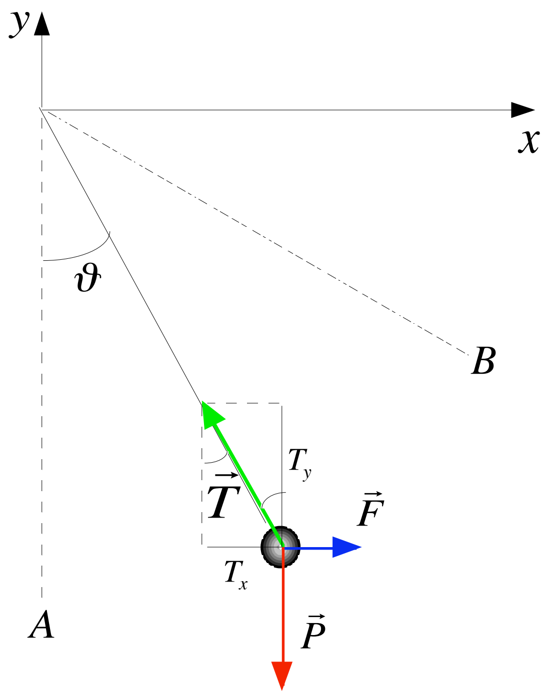
Lavoro necessario per portare il pendolo ad una quota y (1/2)



Vogliamo calcolare il lavoro compiuto da una forza $\vec{F}$ per portare un pendolo di massa m dal punto A al punto B. $\vec{F}$ è scelta in modo tale da avere, istante per istante, una condizione di equilibrio; possiamo quindi applicare le equazioni cardinali della statica:

$$\begin{cases} \vec{P} = -mg\hat{j} \\ \vec{T} = -T_x\hat{i} + T_y\hat{j} = -T\sin\vartheta\hat{i} + T\cos\vartheta\hat{j} \\ \vec{F} = F\hat{i} \end{cases}$$

All'equilibrio quindi avremo per le risultanti lungo gli assi x ed y:

$$T\cos\vartheta - mg = 0$$

$$-T\sin\vartheta\hat{i} + F = 0$$

Dalla prima ricaviamo il valore del modulo di $\vec{T}$:

$$T = \frac{mg}{\cos\vartheta}$$

mentre dalla seconda, sostituendo il valore di T appena trovato, ricaviamo il valore di $\vec{F}$:

$$F = T\sin\vartheta = \frac{mg}{\cos\vartheta}\sin\vartheta = mg\tan\vartheta$$

Per scrivere l'espressione del lavoro infinitesimo $dL = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \left(F_x\hat{i} + F_y\hat{j}\right)\cdot\left(dx\hat{i} + dy\hat{j}\right) = F_x dx + F_y dy$ dobbiamo ricavarci i differenziali delle coordinate x ed y:

$$\begin{cases} x = l\sin\vartheta \\ y = -l\cos\vartheta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = l\cos\vartheta d\vartheta \\ dy = l\sin\vartheta d\vartheta \end{cases}$$

Lavoro necessario per portare il pendolo ad una quota y (2/2)

Il lavoro infinitesimo risulta quindi

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = mg\tan\vartheta \cdot l\cos\vartheta d\vartheta + 0 \cdot l\sin\vartheta d\vartheta = mgl\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\cos\vartheta d\vartheta = mgl\sin\vartheta d\vartheta$$

Il lavoro complessivo si ottiene integrando l'espressione precedente tra i due punti A e B corrispondenti agli angoli $\vartheta = 0$ e $\vartheta = \vartheta_{MAX}$:

$$L_{A\Gamma B} = \int_{A\Gamma B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\vartheta_{MAX}} mgl\sin\vartheta d\vartheta = mgl\int_0^{\vartheta_{MAX}} \sin\vartheta d\vartheta = mgl\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\vartheta_{MAX}} = mgl\left(1-\cos\vartheta_{MAX}\right)$$

Il lavoro della forza peso:si calcola in maniera analoga. Il lavoro infinitesimo infatti è dato da

$$\vec{P} \cdot d\vec{r} = -mg \cdot l\sin\vartheta d\vartheta = -mgl\sin\vartheta d\vartheta$$

Integrando da 0 a ϑ_{MAX} otteniamo

$$L^P_{A\Gamma B} = -\int_0^{\vartheta_{MAX}} mgl\sin\vartheta d\vartheta = -mgl\int_0^{\vartheta_{MAX}} \sin\vartheta d\vartheta = -mgl\left[-\cos\vartheta\right]_0^{\vartheta_{MAX}} = mgl\left(\cos\vartheta_{MAX} - 1\right)$$

Forze conservative (1/5)

Consideriamo una forza $\vec{F}$ definita in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale nel modo seguente:

$$\begin{cases} F_x = -ky \\ F_y = kx \\ F_z = 0 \end{cases}$$

$\vec{F}$ è conservativa se vale la relazione

$$rot\vec{F} = \vec{\nabla} \wedge \vec{F} = 0$$

che può essere riscritta secondo le componenti nel modo seguente:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_y}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo quindi le derivate parziali. Anzitutto possiamo dire che, poiché è sempre $F_z = 0$, anche le sue derivate sono sempre nulle, quindi

$$\frac{\partial F_z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} = 0$$

Forze conservative (2/5)

F_x ed F_y a loro volta dipendono solo dalle coordinate x ed y e non dalla coordinata z per cui le derivate rispetto a z saranno anch'esse nulle:

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = 0$$
$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = 0$$

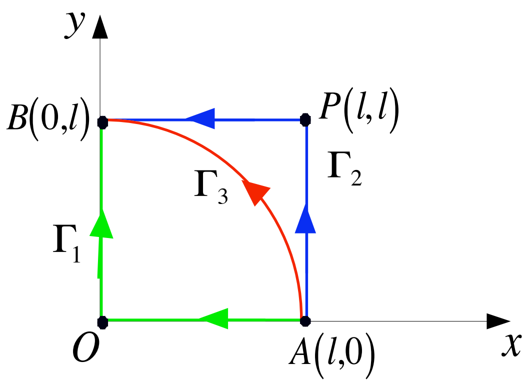
Le derivate parziali di F_x rispetto ad y e di F_y rispetto ad x invece valgono:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -k$$
$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = k$$

per cui otteniamo infine

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_y}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial y} = 0 - 0 = 0 \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial z} - \dfrac{\partial F_z}{\partial x} = 0 - 0 = 0 \\ \dfrac{\partial F_x}{\partial y} - \dfrac{\partial F_y}{\partial x} = -k - k = -2k \neq 0 \end{cases}$$

da cui deduciamo che $\vec{F}$ non è conservativa.



Calcoliamo ora il lavoro della forza $\vec{F}$ appena analizzata nel percorso che porta dal punto A al punto B su tre cammini differenti: Γ_1 lungo un percorso che raggiunge l'origine O mantenendosi sull'asse delle ascisse e poi arriva al punto B muovendosi sull'asse delle ordinate; Γ_2 lungo un percorso che prima raggiunge il punto P di coordinate (l,l) muovendosi parallelamente all'asse delle ordinate e poi raggiunge il punto B lungo un cammino parallelo all'asse delle ascisse; e Γ_3 lungo un arco di circonferenza di raggio l.

Nei primi due casi l'integrale che dovremo calcolare si svolge lungo segmenti paralleli agli assi coordinati; quindi l'elemento infinitesimo di cammino che considereremo sarà dato semplicemente da

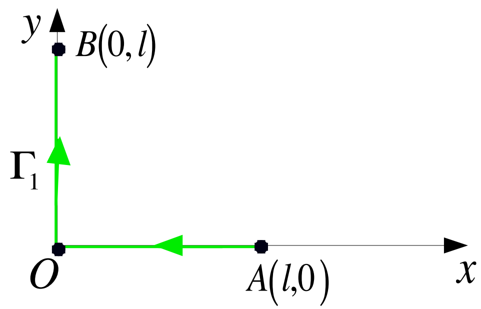
$$d\vec{r} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

per cui il lavoro infinitesimo sarà dato dalla seguente espressione:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

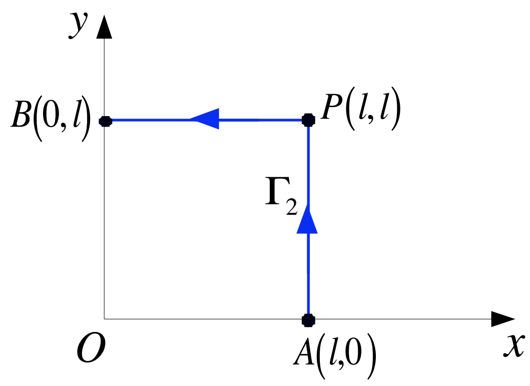
dove il termine $F_z dz$ sarà nullo in quanto $F_z = 0$. Data la particolare forma del cammino prescelto, l'integrale si può scindere in una somma di due integrali, uno nella coordinata x, valutato tra i punti di ascissa l e 0, e l'altro nella coordinata y, valutato tra 0 ed l:

$$L_{A\Gamma_1 B} = \int_{A\Gamma_1 B} dL = \int_l^0 F_x dx + \int_0^l F_y dy$$



Il tratto di percorso considerato nel primo integrale si svolge tutto lungo l'asse x, per cui è sempre $y = 0$: quindi l'espressione della componente x della forza $\vec{F}$ sarà, in conseguenza della sua definizione:

$$F_x(y=0) = -k \cdot 0 = 0$$



Discorso analogo vale per il tratto di percorso considerato nel secondo integrale che si svolge tutto lungo l'asse y per cui è sempre $x=0$: l'espressione della componente y della forza $\vec{F}$ sarà quindi, sempre in conseguenza della sua definizione:

$$F_y(x=0) = k \cdot 0 = 0$$

Il calcolo dell'integrale ora è banale:

$$L_{A\Gamma_1 B} = \int_l^0 F_x dx + \int_0^l F_y dy = \int_l^0 0 \cdot dx + \int_0^l 0 \cdot dy = 0$$

Lungo il cammino Γ_2 il ragionamento è analogo, con la differenza che le componenti x ed y della forza $\vec{F}$ lungo i singoli tratti considerati ora valgono:

$$F_x(y=l) = -kl$$

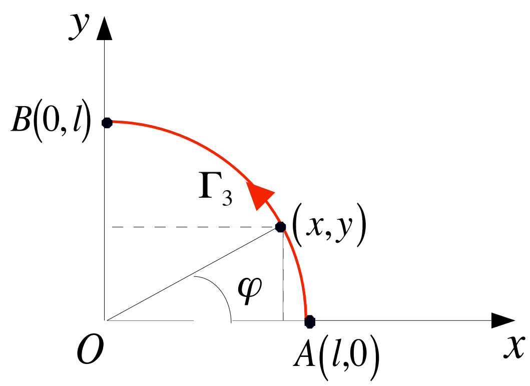
$$F_y(x=l) = kl$$

per cui l'integrale diventa

$$L_{A\Gamma_2 B} = -\int_l^0 kldx + \int_0^l kldy = -kl\int_l^0 dx + kl\int_0^l dy = -kl[x]_l^0 + kl[x]_0^l = -kl(0-l) + kl(l-0) = kl^2 + kl^2 = 2kl^2$$

Il cammino Γ_3 si svolge lungo un arco di circonferenza: il calcolo dell'integrale può essere svolto più facilmente passando a coordinate polari:

Forze conservative (5/5)



$$\begin{cases} x = l\cos\varphi \\ y = l\sin\varphi \end{cases}$$

ed i differenziali risultano:

$$\begin{cases} dx = -l\sin\varphi d\varphi \\ dy = l\cos\varphi d\varphi \end{cases}$$

per cui l'integrale va calcolato nella sola variabile angolare φ tra gli estremi $\varphi = 0$ e $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$:

$$dL = F_x dx + F_y dy = -k(l\sin\varphi)(-l\sin\varphi d\varphi) + k(l\cos\varphi)(l\cos\varphi d\varphi) = kl^2\left(\sin^2\varphi d\varphi + \cos^2\varphi d\varphi\right)$$

$$= kl^2\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)d\varphi = kl^2 d\varphi$$

per cui l'integrale va calcolato nella sola variabile angolare φ tra gli estremi $\varphi = 0$ e $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$:

$$L_{A\Gamma_3 B} = \int_{A\Gamma_3 B} dL = \int_0^{\frac{\pi}{2}} kl^2 d\varphi = kl^2 \varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = kl^2\frac{\pi}{2}$$

Com'era da aspettarsi trattandosi di una forza non conservativa abbiamo ottenuto in ciascuno dei tre casi un risultato differente.