Università di Bologna - Corsi di Laurea Triennale in Ingegneria, II Facoltà - Cesena
Sessione estiva 2006 - 1° appello - Compito scritto del corso di Fisica Generale L-A
(22 giugno 2006)
Prof. Maurizio Piccinini

Soluzioni

1. Il teorema delle forze vive non vale in presenza di forze dissipative (attrito). Dire se questa affermazione è vera o falsa e motivare la risposta.

2. La velocità del centro di massa di un sistema meccanico è uguale alla media delle velocità delle singole parti che lo compongono. Dire se questa affermazione è vera o falsa e motivare la risposta.

3. Un pendolo semplice di lunghezza l viene fatto oscillare con piccola ampiezza appeso al soffitto di un ascensore, mentre questo scende con accelerazione a. Quanto vale il periodo di oscillazione misurato nell'ascensore?

   a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g-a}}$;

   b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g+a}}$;

   c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

   Motivare la risposta.

$$\vec{a}_R = \vec{a}_A - \vec{a}_T - \vec{a}_C = \vec{g} - \vec{a} - \vec{0}$$

4. Una scimmia sta sul ramo di un albero ad un'altezza $h = 6\ m$ dal suolo quando vede avvicinarsi un ragazzino con una cerbottana. La scimmia vede confermati i suoi peggiori sospetti quando si accorge che il ragazzino, fermo ad una distanza $d = 12\ m$, le punta addosso la sua cerbottana, un modello che lancia palline di massa $m = 5\ g$ con velocità $v = 27\ m/s$. Per evitare di essere colpita la scimmia decide di lasciarsi cadere nell'istante in cui vede partire il proiettile.
   Stabilire, evidenziando tutti i passaggi matematici, se la scimmia viene colpita nell'ipotesi che abbia un tempo di reazione nullo e possa essere considerata un corpo puntiforme ($g = 9.80\ m/s^2$).

$$\begin{cases} x_s = d \\ y_s = h - \frac{1}{2}\ gt^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_p = v_{0x}t \\ y_p = v_{0y}t - \frac{1}{2}\ gt^2 \end{cases}$$

$$t = \frac{d}{v_{0x}}$$

$$\begin{aligned} y_p &= v_{0y}\frac{d}{v_{0x}} - \frac{1}{2}\ gt^2 \\ &= \frac{v_{0x}}{v_{0x}}\ d - \frac{1}{2}\ gt^2 \\ &= \frac{v_0}{v_0}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ d - \frac{1}{2}\ gt^2 \\ &= \tan\theta\ d - \frac{1}{2}\ gt^2 \\ &= h - \frac{1}{2}\ gt^2 \\ &= y_s \end{aligned}$$

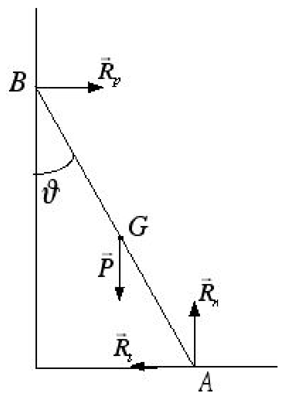
$$\tan\theta = \frac{h}{d} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \arctan \frac{1}{2} = 0.46\ rad = 26.57°$$

$$v_{0x} = v \cos \theta = 24.15\ m/s$$

$$v_{0y} = v \sin \theta = 12.07\ m/s$$

5. Una scala di lunghezza $2l = 2.10\ m$ poggia ad un estremo ad una parete verticale senza attrito ed all'altro estremo su un pavimento con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.4$.



a) Se θ è l'angolo formato dalla scala con la parete qual è l'angolo massimo θ_{max} per il quale la scala rimane ferma?

$$\begin{cases} \vec{R}_n + \vec{P} = \vec{0} \\ \vec{R}_p + \vec{R}_t = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_n - mg = 0 \\ R_p - R_t = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} R_n = mg \\ R_p = R_t \end{cases}$$

$$R_t = \mu_s R_n = \mu_s mg$$

$$(G - A) \wedge \vec{P} + (B - A) \wedge \vec{R}_p = \vec{0}$$

$$mgl \sin \theta_{max} - 2l R_p \cos \theta_{max} = 0$$

$$R_p = \frac{mg}{2}\ \tan \theta_{max}$$

$$\mu_s mg = \frac{mg}{2}\ \tan \theta_{max}$$

$$\tan \theta_{max} = 2\mu_s$$

$$\theta_{max} = \arctan(2\mu_s) = \arctan(2 \cdot 0.4) = \arctan 0.8 = 38.66°$$

b) Viene eliminato l'attrito tra il pavimento e la scala e quest'ultima viene disposta a formare l'angolo θ_{max} con la parete. Quanto valgono le componenti orizzontale e verticale della velocità del centro di massa della scala quando questa si adagia sul pavimento?

$$\begin{cases} x_G = l \sin\theta \\ y_G = l\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_G = l\cos\theta\ \dot{\theta} \\ \dot{y}_G = -l\sin\theta\ \dot{\theta} \end{cases}$$

$$I_G = \frac{1}{12}m(2l)^2 = \frac{4}{12}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2$$

$$mgl\cos\theta_{max} = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}ml^2\dot{\theta}^2$$

$$\dot{\theta}^2 = 6\frac{g}{l}\cos\theta_{max}$$

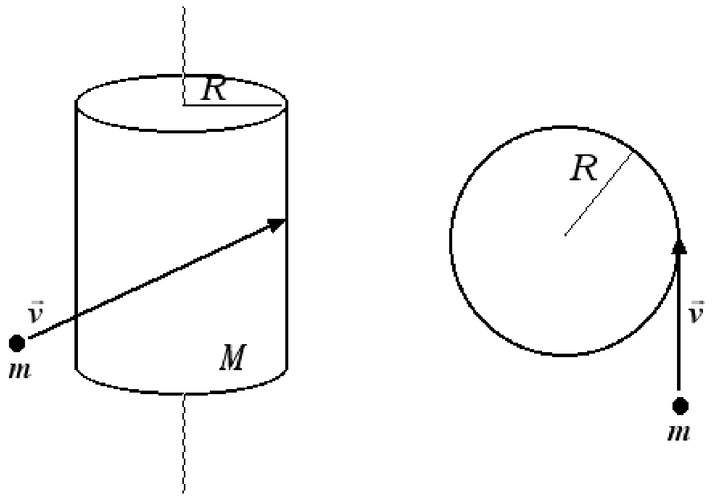
$$\dot{\theta} = \sqrt{6\frac{g}{l}\cos\theta_{max}}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_G(\theta = \frac{\pi}{2}) = l\cdot 0 \cdot\ \dot{\theta} = 0 \\ \dot{y}_G(\theta = \frac{\pi}{2}) = -l\cdot 1\cdot\ \dot{\theta} \end{cases}$$

$$\dot{y}_G\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) = -1.05\ m\ \sqrt{6\frac{9.80\ m/s^2}{1.05\ m}\cos 38.66^\circ} = -1.05\ m\ \sqrt{6\cdot 9.\bar{3}\ s^{-2}\ 0.78}$$

$$= -1.05\ m\ \sqrt{55.\bar{9}\ s^{-2}\ 0.78} = -1.05\ m\ \sqrt{43.73\ s^{-2}} = -1.05\ m\cdot 6.61\ s^{-1} = -6.94\ m/s$$

6. Un cilindro omogeneo di massa $M = 30\ kg$ e raggio $R = 80\ cm$ è vincolato a ruotare attorno al proprio asse, posto in posizione verticale. Su questo asse è applicato un momento elastico di richiamo di costante $k = 3.7\ Nm$. Ad un dato istante un proiettile di massa $m = 18\ g$ che procede con velocità $v = 90\ m/s$ perpendicolare all'asse del cilindro si conficca sul bordo del cilindro.



Calcolare:

a) l'angolo massimo di elongazione del cilindro attorno al proprio asse;

$$K_i = mvR$$

$$K_f = (I + mR^2)\omega$$

$$K_i = K_f$$

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$\omega = \frac{mvR}{(I + mR^2)} = \frac{mvR}{\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)} = \frac{mvR}{R^2\left(\frac{1}{2}M + m\right)} = \frac{mv}{R\left(\frac{1}{2}M + m\right)}$$

$$\Delta E = 0$$

$$T_f - T_i = U_i - U_f$$

$$-\frac{1}{2}(I + mR^2)\omega^2 = -\frac{1}{2}k\theta_{max}^2$$

$$\theta_{max}^2 = \frac{I + mR^2}{k}\omega^2 = \left(\frac{1}{2}M + m\right)\frac{R^2}{k}\frac{m^2v^2}{R^2\left(\frac{1}{2}M + m\right)^2} = \frac{1}{k}\frac{m^2v^2}{\frac{1}{2}M + m}$$

$$\theta_{max} = mv\sqrt{\frac{1}{k}\ \frac{1}{\frac{1}{2}M + m}} = 0.018\ kg \cdot 90\ m/s\sqrt{\frac{1}{3.7\ Nm}\ \frac{1}{\frac{1}{2}30\ kg + 0.018\ kg}}$$

$$= 1.62\ kg\ m/s\sqrt{\frac{1}{3.7\ Nm}\ \frac{1}{15.018\ kg}} = 1.62\ kg\ m/s\sqrt{\frac{1}{55.57\ kg^2\ m^2\ s^{-2}}} = 1.62\sqrt{0.018}$$

$$= 1.62 \cdot 0.134 = 0.217\ rad = 12.45°$$

b) il tempo necessario affinché il cilindro si fermi alla prima oscillazione.

$$\tau = -k\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$I\ddot{\theta} + k\theta = 0$$

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{I}\theta = 0$$

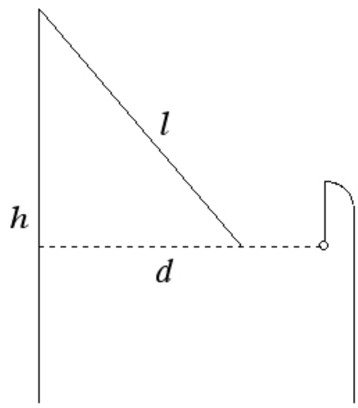
$$\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{\left(\frac{1}{2}M + m\right)R^2}{k}} = 2\pi R\sqrt{\frac{\frac{1}{2}M + m}{k}}$$

$$t_{max} = \frac{T}{4} = \frac{1}{4} 2\pi R \sqrt{\frac{\frac{1}{2}M + m}{k}} = \frac{1}{2}\pi R \sqrt{\frac{\frac{1}{2}M + m}{k}} = \frac{1}{2}\pi\ 0.8\ m \sqrt{\frac{\frac{1}{2}30\ kg + 0.018\ kg}{3.7\ Nm}}$$

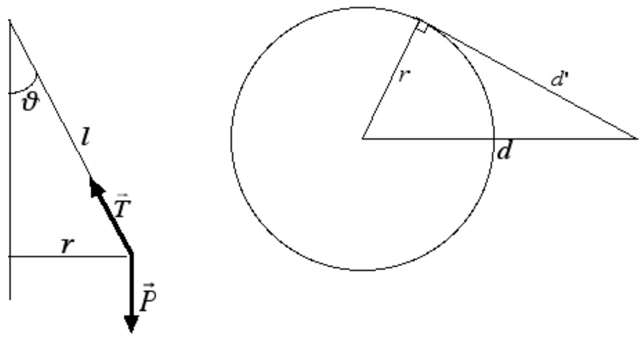
$$= \pi\ 0.4\ m \sqrt{\frac{15.018\ kg}{3.7\ Nm}} = \pi\ 0.4\ m \sqrt{4.059\ s^2 m^{-2}} = 1.26\ m \cdot 2,015\ s/m = 2,53\ s$$

7. Una giostra da *luna park* ruota con velocità angolare $\omega = 1.40\ rad/s$ attorno al proprio asse. Una bambina si trova su un seggiolino collegato all'asse della giostra tramite una fune ideale di lunghezza $l = 5.33\ m$. Accanto alla giostra è posto un palo al quale si trova appeso, alla stessa altezza del seggiolino in moto e ad una distanza $d = 5.4\ m$ dall'asse della giostra, un bersaglio che la bambina si propone di colpire con una palla, gettandola verso l'alto con una certa velocità $\vec{v}$.



Calcolare:

a) a che distanza dal palo la bambina deve lanciare la palla



$$\begin{cases} -m\omega^2 r = -T\sin\theta \\ T\cos\theta - mg = 0 \end{cases}$$

$$r = l\sin\theta$$

$$m\omega^2 l\sin\theta = T\sin\theta$$

$$T = m\omega^2 l$$

$$m\omega^2 l\cos\theta - mg = 0$$

$$\cos\theta = \frac{g}{\omega^2 l}$$

$$\theta = \arccos\frac{g}{\omega^2 l} = \arccos\frac{9.80\ m/s^2}{1.96\ s^{-2}\ 5.33\ m} = \arccos\frac{9.80}{10.45} = \arccos 0.94 = 20.27^\circ$$

$$d^2 = r^2 + d'^2$$

$$d' = \sqrt{d^2 - r^2} = \sqrt{d^2 - l^2\sin^2\theta} = \sqrt{5.4^2\ m^2 - 5.33^2\sin^2 20.27^\circ\ m^2}$$

$$= \sqrt{29.16 - 28.41\cdot 0.12}\ m = \sqrt{29.16 - 3.41}\ m = \sqrt{25.75} = 5.07\ m$$

b) e con quale velocità verso l'alto

$$v_x = \omega r = \omega l\sin\theta$$

$$t = \frac{d'}{v_x}$$

$$0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_y t$$

$$v_y = \frac{1}{2}g\frac{d'}{v_x} = \frac{1}{2}g\frac{d'}{\omega l\sin\theta} = \frac{1}{2}9.80\ m/s^2\frac{5.07\ m}{1.40\ rad/s\ 5.33\ m\ \sin 20.27^\circ}$$

$$= 4.9\frac{5.07}{7.46\cdot 0.35}\ m/s = 4.9\frac{5.07}{2.59}\ m/s = 4.9\cdot 1.96\ m/s = 9.61\ m/s$$

affinché la palla colpisca il bersaglio.