1 Esercizi di Algebra Vettoriale

1. Siano **a** e **b** vettori di modulo rispettivamente 3 e 5. Le rette direttrici dei due vettori formano un angolo di $\frac{\pi}{4}$. Calcolare il p.s. (prodotto scalare) di **a**·**b**.

2. Siano **a** e **b** vettori di componenti cartesiane (3,7,1) e (-1,6,0). Calcolare il seno dell'angolo compreso tra loro.

3. Dimostrare il teorema di Carnot.

4. Determinare il valore del parametro y per cui i due vettori **a** e **b** sono ortogonali. $\mathbf{a}$=30$\mathbf{i}$+2$y\mathbf{j}$-$\mathbf{k}$ e $\mathbf{b}$ =$\mathbf{i}$+7$\mathbf{j}$+$y\mathbf{k}$

5. Dimostrare che i vettori (**a** + **b**) e (**a** - **b**) sono ortogonali solo se **a** e **b** hanno lo stesso modulo.

6. Siano r una retta nello spazio, **b** un vettore orientato lungo r e **a** un vettore qualunque. Esprimere la proiezione di **a** sulla retta r.

7. Siano $\mathbf{a}$=12$\mathbf{i}$+4$\mathbf{k}$ e $\mathbf{b}$=5$\mathbf{j}$-8$\mathbf{k}$. Calcolare **a**x**b** e rappresentarlo graficamente nel sistema di riferimento **i,j,k**.

8. Trovare un versore contemporaneamente ortogonale ai 2 vettori **a,b** precedenti.

9. Siano $\mathbf{a}$=3$\mathbf{i}$+3$\mathbf{j}$-2$\mathbf{k}$, $\mathbf{b}$ =$\mathbf{i}$+7$\mathbf{j}$+$\mathbf{k}$, $\mathbf{c}$=5$\mathbf{i}$-$\mathbf{k}$. Sono complanari? Motivare la risposta.

10. Il segno del prodotto misto di 3 vettori come cambia se si esegue uno scambio di due vettori? E con due scambi?

11. Calcolare $\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \times \vec{C}$ e $\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$

$$\vec{A} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j} + \mathbf{k}$$
$$\vec{B} = -5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$$
$$\vec{C} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$$

12. Ricavare i valori di $\left(\vec{C} \times \vec{A}\right) \cdot \vec{B}$, $\left(\vec{B} \times \vec{C}\right) \cdot \vec{A}$ e $\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \cdot \vec{C}$ impiegando i vettori precedenti.

13. Dati i tre vettori $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, tracciati sul piano cartesiano (fig.1), determinare:
il valore dell'angolo θ, angolo intercettato dal segmento $\overline{CA}$ e dal segmento $\overline{OB}$;
di nuovo il valore di θ dopo aver spostato il punto C nelle coordinate (1,5).

14. Supponendo di conoscere due vettori **b,c** giacenti sul piano π, si calcoli la proiezione di un vettore **a** su di una retta ortogonale al piano stesso.

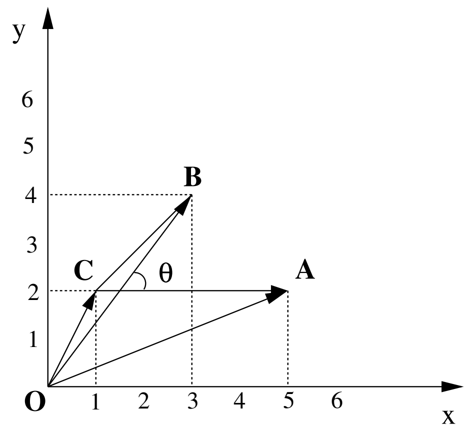

Figure 1:

15. Dati i seguenti tre vettori, con $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ base ortonormale in R^3:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A} &= 4\mathbf{i} + 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}\\ \overrightarrow{B} &= -5\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}\\ \overrightarrow{C} &= \mathbf{i} - 2\mathbf{k}\end{aligned}$$

calcolare il vettore risultante $\overrightarrow{F}$ ed esprimerlo in forma cartesiana ed in coordinate polari;
calcolare il volume del parallelepipedo avente per spigoli i tre vettori $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$, $\overrightarrow{F}$;
determinare il prodotto scalare di $\overrightarrow{F}$ con il vettore $\overrightarrow{L}$ definito in coordinate cilindriche: L_r=3; L_θ = 1radiante; L_h= -1.

16. Nello spazio euclideo sono dati tre punti Q(5,10,1) W(1,0,6) E(-4,-5,2). Determinare l'area del triangolo di cui Q, W ed E rappresentano i vertici.

17. Prendiamo un cubo di lato l e sia $\overrightarrow{A}$ la diagonale di una faccia. Calcolare l'angolo compreso tra il vettore $\overrightarrow{A}$ e la diagonale principale del solido.

18. Dimostrare che una qualunque rotazione di un vettore $\overrightarrow{A}$ intorno all'asse z si ottiene $\overrightarrow{A}$'=R(α)$\overrightarrow{A}$ con R(α)=$\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

19. Data la relazione $\mathbf{a}^2 + 4\mathbf{b}^2 + 5\mathbf{c}^2 = 0$ determinare la risultante dei tre vettori **a,b,c**.

20. Siano quattro vettori **a,b,c,d** , tali che:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{c} + \mathbf{d}$$

con moduli rispettivamente a=*18*, b=*23*, c=*27*, d=11. Si determini i valori massimo e minimo che puó assumere θ angolo compreso tra **a** e **b**.

21. Sia **L** un vettore di componenti cartesiane parametriche:

$$\mathbf{L} = \left(a\cos\omega t, bt^2\sin\omega t, ct\cos 5\omega t\right)$$

calcolarne la derivata parziale prima rispetto al parametro c e al parametro t. Determinare inoltre il valore dell'integrale di **L** calcolato in funzione di t.

22. Sia un vettore **a** disposto in un piano. Il vettore presenta un modulo a

$$a = \frac{1}{1+ct}$$

ed un angolo φ compreso tra la direttrice di $\overrightarrow{a}$ e l'asse delle ascisse pari a

$$\varphi = gt$$

Determinare il modulo della velocitá all'istante t=*3s* sapendo che g=$5rad/s$ e c=$2s^{-1}$

23. *Premessa*: Siano **F** un vettore e P il suo punto d'applicazione. Si definisce momento di **F** rispetto al punto O il vettore **M** tale che:

$$\mathbf{M} = (P-O)\times\mathbf{F} \tag{1}$$

Si puó pure definire la proiezione del momento **M** su di una qualunque retta orientata passante per il punto O come momento assiale di **F**:

$$\mathbf{M}_u = (P-O)\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{u} \tag{2}$$

Due sistemi di vettori si dicono equivalenti se hanno uguali sia la risultante sia il momento risultante[1].
Esercizio: Siano tre vettori

$$\begin{aligned}\mathbf{T_1} &= -5\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}\\ \mathbf{T_2} &= 19\mathbf{i} - 7\mathbf{j} - 6\mathbf{k}\\ \mathbf{T_3} &= 10\mathbf{i} - 8\mathbf{j} - 7\mathbf{k}\end{aligned}$$

applicati rispettivamente nei punti $A_1 = (5,-4,7)$, $A_2 = (0,-7,-3)$, $A_3 = (3,3,1)$. Determinare la risultante e il momento risultante calcolato scegliendo O nell'origine degli assi. In seguito prendere O nel punto (3,3,1).

[1] Queste definizioni torneranno utili nella statica e nei sistemi rotanti, argomenti che verranno descritti successivamente.