Part I

Cenni di Algebra Vettoriale

Al fine di ottenere una migliore comprensione é indispensabile raggiungere un buon grado di dimestichezza con tutti gli strumenti matematici che saranno impiegati nel corso degli studi di fisica. Questa prima parte tratta i cosiddetti *vettori.* Esistono grandezze fisiche che per essere indicate richiedono unicamente un valore numerico. Queste quantitá sono dette *scalari* (temperatura, massa, ecc) e non presentano particolari difficoltá. Ci sono peró anche grandezze, chiamate *vettori*, che vengono indicate fornendo informazioni relative alla loro direzione e verso (forze, accelerazioni ...). Geometricamente un vettore é rappresentabile con una freccia caratterizzata dunque da una direzione, da un verso e da un punto d'applicazione. Se non viene specificato il punto di applicazione si parla di *vettore libero.*

1. Due vettori $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ sono uguali solo se hanno la stessa ampiezza o modulo, la stessa direzione e lo stesso verso. $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$

2. Sia $\overrightarrow{A}$, allora il vettore avente lo stesso modulo e direzione, ma verso opposto, viene indicato con $-\overrightarrow{A}$.

3. La somma algebrica di due vettori $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ si ottiene applicando la regola del parallelogramma. Da notare che la differenza tra due vettori $\overrightarrow{A}$ $\overrightarrow{B}$ é pari alla somma di $\overrightarrow{A}$ e $-\overrightarrow{B}$ per quanto detto nel punto precedente.

4. Il prodotto di un vettore $\overrightarrow{A}$ per un scalare h é ancora un vettore, $\overrightarrow{A}'$, avente la stessa direzione ma modulo pari a $h|\overrightarrow{A}|$. Se h é negativo allora il verso di $\overrightarrow{A}'$é opposto a quello di $\overrightarrow{A}$.

5. Le grandezze fisiche vettoriali appartengono ovviamente a quello che in geometria viene definito uno **spazio vettoriale su campo reale**. Per comoditá riportiamo qui di seguito la definizione generale di spazio vettoriale: *Siano l'insieme* ***R*** *dei numeri reali e V un insieme. Si dice che V é uno spazio vettoriale se:*

- É definita in V una *somma* ovvero un'operazione che associa ad ogni coppia *(a,b)* di elementi di V un unico elemento di V indicato con $a+b$.

- É definito un *prodotto esterno* con elementi di **R**, ovvero un'operazione che associa alla coppia di elementi *(a,h)* con a $\in$ V e h $\in$ **R**, un elemento $\in$ V chiamato *ah*.

- Le due operazioni definite debbono soddisfare alcune regole:

a) SOMMA: Proprietá associativa, proprietá commutativa, esistenza dell'elemento neutro, esistenza dell'opposto, proprietá distributiva.

b) PRODOTTO ESTERNO: Esistenza del neutro, proprietá associativa e distributiva.

A questa definizione é necessario aggiungere il concetto di **prodotto scalare**: *Sia V uno spazio vettoriale su campo reale. Definisco* ***prodotto scalare*** *quella applicazione $P : V \times V \to \mathbb{R}$ (attenzione quindi che il p.s. é uno scalare) con le seguenti proprietá:*

a)$P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = P(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \ \forall \, \mathbf{x}, \mathbf{y} \, \in V$

b)$P(t\mathbf{x}, \mathbf{y}) = P(\mathbf{x}, t\mathbf{y}) = tP(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \ \forall \, \mathbf{x}, \mathbf{y} \, \in V, \ \forall t \in \mathbb{R}$

c)$P(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z}) = P(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + P(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \ \forall \, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \, \in V$

d)$P(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0 \ \forall \, \mathbf{x} \, \in V$ e pari a 0 solo se $\mathbf{x}$=0.

In $\mathbb{R}^n$ un **prodotto scalare** che puó essere definito é:

$$P(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

a cui é associata naturalmente la norma:

$$\|x\| = \sqrt{P(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$$

Il prodotto scalare che abbiamo definito non é l'unico possibile, ma é quello che viene adottato normalmente, pertanto ci atterremo a questo.

Un'altra operazione fortemente utilizzata é il **prodotto vettoriale** e nasce dal concetto fisico di momento di una forza.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

Il **prodotto vettoriale** dá come risultato un vettore ($\mathbf{c}$) che ha per modulo il prodotto $|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \hat{\mathbf{ab}}$. Si noti che se i due vettori sono collineari allora il prodotto é nullo. La direzione é quella ortogonale al piano individuato dai due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ mentre il verso si determina applicando la regola della mano destra. É evidente che scambiando l'ordine dei due vettori il prodotto cambia solo nel verso, si dice cioé che é anticommutativo.

Un particolare da tenere bene in mente é che i versori della comune terna di assi $\mathbf{i}$,$\mathbf{j}$,$\mathbf{k}$ ortogonali soddisfano la seguente relazione ¨circolare¨:

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \tag{1}$$

Si puó pure dimostrare che il prodotto vettoriale é distributivo sia a destra che a sinistra, cioé:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \tag{2}$$

e

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \tag{3}$$

Applicando le eq.1, 2, 3 si ricava che il prodotto vettoriale vale, in coordinate cartesiane:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_x b_z - a_z b_x)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} \tag{4}$$

Quest'ultima equazione puó essere comodamente riscritta in notazione matriciale ricordando la definizione di determinante:

$$\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{5}$$

Infine esiste il **prodotto misto**, operazione in cui compare sia il prodotto scalare che quello vettoriale:

$$(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$$

É possibile inoltre definire anche le operazioni matematiche di derivazione e d'integrazione. Per la **derivazione** vettoriale vale il concetto di *limite del rapporto incrementale* rispetto ad un parametro u:

$$\frac{d\mathbf{F}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{F}(u + \Delta u) - \mathbf{F}(u)}{\Delta u}$$

purché tale limite esista. Se il vettore $\mathbf{F}$(u) é scomponibile in $\mathbf{F}_x(u)\mathbf{i}+\mathbf{F}_y(u)\mathbf{j}+\mathbf{F}_z(u)\mathbf{k}$ o piú in generale in una qualunque base vettoriale, allora

$$\frac{d\mathbf{F}}{du} = \frac{d\mathbf{F}_x(u)}{du}\mathbf{i} + \frac{d\mathbf{F}_y(u)}{du}\mathbf{j} + \frac{d\mathbf{F}_z(u)}{du}\mathbf{k}$$

Inoltre le consuete regole e proprietá della operazione di **derivazione** sono mutuate dall´analisi:

$$\frac{d(\phi\mathbf{F})}{du} = \phi\frac{d\mathbf{F}}{du} + \mathbf{F}\frac{d\phi}{du} \tag{6}$$

$$\frac{d(\mathbf{G} \cdot \mathbf{F})}{du} = \mathbf{G} \cdot \frac{d\mathbf{F}}{du} + \frac{d\mathbf{G}}{du} \cdot \mathbf{F} \tag{7}$$

$$\frac{d(\mathbf{G} \times \mathbf{F})}{du} = \mathbf{G} \times \frac{d\mathbf{F}}{du} + \frac{d\mathbf{G}}{du} \times \mathbf{F} \tag{8}$$

Per quanto riguarda invece l'operazione d'integrazione si puó dire che dato un vettore $\mathbf{F}(u) = F_x(u)\mathbf{i}+F_j(u)\mathbf{j}+F_z(u)\mathbf{k}$, posso definire:

$$\int \mathbf{F}(u)du = \mathbf{i}\int F_x(u)du + \mathbf{j}\int F_j(u)du + \mathbf{k}\int F_z(u)du$$