

Parte I

Esercizi di Cinematica

1. La traiettoria di un punto nello spazio tridimensionale é espressa con:

$$\begin{aligned}x(t) &= 4 \cos 6t \\y(t) &= 4 \sin 6t \\z(t) &= 3t\end{aligned}$$

calcolare la lunghezza d'arco percorsa dal punto in movimento dopo un tempo $t_S=5s$.

2. Un punto si muove nello spazio con equazioni parametriche:

$$\begin{aligned}x(t) &= 2t + t^2 \\y(t) &= 2t^3 \\z(t) &= 2e^{-5t}\end{aligned}$$

calcolare la velocità e l'accelerazione in coordinate cartesiane in ogni istante. In particolare calcolare il modulo della velocità iniziale del punto.

3. L'accelerazione di una particella vale

$$\vec{a} = 5e^{-3t}\mathbf{i} + 4 \sin 5t\mathbf{j} - 2 \cos t\mathbf{k}$$

calcolare il valore della velocità vettoriale in funzione del tempo sapendo che per $t=0$ la velocità assume il valore:

$$\vec{v} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Infine determinare l'espressione del vettore posizione sapendo che all'istante $t=0$ il punto si trova in $P(2,1,2)$.

4. Due punti hanno vettori posizione rispettivamente pari a

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= t\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + 5t^3\mathbf{k} \\ \vec{r}_2 &= 6t\mathbf{i} + (3t^2 + 7)\mathbf{j} + \mathbf{k}\end{aligned}$$

determinare i valori della velocità relativa e dell'accelerazione relativa.

5. Dato il vettore posizione

$$\vec{r} = 3 \cos 3t\mathbf{i} + 3 \sin 3t\mathbf{j} + (5t + 2)\mathbf{k}$$

calcolare i vettori tangente, normale e binormale. Verificare infine che la velocità é effettivamente esprimibile come:

$$\vec{v} = |v| \hat{T}$$

6. Dell'esercizio precedente calcolare il raggio di curvatura relativo al cerchio osculatore.

7. Il vettore posizione di una particella data é

$$\vec{r} = 3\mathbf{i} \sin \omega t + 3\mathbf{j} \cos \omega t$$

dimostrare che la velocità del punto é perpendicolare ad $\vec{r}$ e calcolare l'accelerazione. Mostrare infine che il prodotto vettoriale $\vec{r} \times \vec{v}$ é una costante del moto.

8. Il vettore posizione di una particella che si muove su di una traiettoria ellittica é

$$\vec{r} = a\mathbf{i} \sin \omega t + b\mathbf{j} \cos \omega t$$

determinare la velocità e l'accelerazione.

9. Un traghettatore fluviale deve portare un cliente da una riva all'altra del fiume che é largo $D=50\text{m}$. La corrente ha una velocità, in modulo, pari a $V=1\text{m/s}$ ed il molo di attracco si trova esattamente di fronte a quello di partenza. Sapendo che la velocità, in modulo, della barca vale $v=3\text{m/s}$ spiegare in che modo il traghettatore deve muoversi per raggiungere esattamente la sponda opposta nel punto di attracco. Indicare pure il tempo di attraversamento.
10. Una scimmia cammina per 65 m alla velocità di 3Km/h sempre nella stessa direzione lungo un binario della ferrovia. Poi inizia a correre trascinandosi per circa 2 minuti seguendo la direzione precedente. Calcolare la velocità media totale.
11. La velocità media é un vettore. Data la legge oraria in forma cartesiana:

$$\begin{aligned} x(t) &= 2t \\ y(t) &= 4 \\ z(t) &= 2e^{-5t} \end{aligned}$$

calcolare la velocità media relativa ad un tempo compreso tra $t=0\text{s}$ e $t=3\text{s}$.

12. Un treno parte da Faenza e raggiunge Bologna dopo un tempo di 33 minuti. Il percorso compiuto é di circa 50 Km. Calcolare la velocità media di questo tratto. Infine determinare la velocità media totale se il treno appena arrivato a Bologna ritorna immediatamente a Faenza impiegando un tempo di 45 minuti. Qual é la velocità del treno nell'istante $t=10$ minuti?
13. Un bambino si trova al primo piano di un condominio ed ha in mano un sasso. Il bambino decide di lanciare il sasso e gli imprime una velocità $V_0 = 10\frac{\text{m}}{\text{s}}$ e la sua traiettoria, inizialmente forma con l'orizzontale un angolo di 60 gradi. Considerare l'altezza di partenza del sasso pari a 5m dal suolo. Ricavare l'equazione del moto sapendo che l'unica accelerazione in gioco é la gravità $\vec{g} = -g\hat{k}$. ($g=9.81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

14. L'equazione della traiettoria si ottiene esprimendo la coordinata z come funzione della variabile distanza y eliminando la dipendenza esplicita dal tempo. Ricavare dunque la traiettoria del moto descritto nel punto precedente.
15. Due fucili sparano in versi opposti lungo la direzione y di un sistema di riferimento $Oxyz$ ortogonale. Entrambi i fucili sono posizionati nel punto $A(x', 0, h)$. La velocità del proiettile all'uscita della canna del secondo fucile è pari, in modulo, al doppio della velocità raggiungibile dal proiettile esploso dal primo fucile. Calcolare i due tempi di caduta e le due gittate sapendo che nella regione considerata vale l'accelerazione di gravità.
16. Un'automobile si muove di moto rettilineo uniforme lungo una strada di campagna alla velocità di $V_0 = 70 \frac{Km}{h}$. All'improvviso un capriolo attraversa la strada ad una distanza iniziale $d=30m$. Se l'auto inchioda imprimendo un'accelerazione negativa di $-5 \frac{m}{s^2}$, l'automobilista riuscirà a non travolgere il povero animale?
17. Un razzo sperimentale della Nasa viene lanciato verticalmente e sale con un'accelerazione costante pari a $30m/s^2$. La spinta cessa dopo un minuto quando tutto il combustibile è terminato. Qual è la massima altezza raggiunta? Quanto tempo impiega a raggiungerla?