Soluzioni di Cinematica

1. Per prima cosa bisogna determinare la velocità con la quale il punto si muove:
$$\dot{x}(t) = -24\sin 6t$$
$$\dot{y}(t) = 24\cos 6t$$
$$\dot{z}(t) = 3$$
questa è una velocità vettoriale perciò posso trovarne il modulo:
$$\dot{s}(t) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2 + (\dot{z}(t))^2} \approx 24.06$$
e rappresenta proprio la velocità con la quale il punto si sulla traiettoria. Pertanto la distanza percorsa vale semplicemente:
$$s = \int_0^5 \dot{s}(t)dt \approx 120$$
dove la quantità s è proprio l'ascissa curvilinea.

2. Anche in questo esercizio si può calcolare molto semplicemente le componenti della velocità come:
$$\dot{x}(t) = 2 + 2t$$
$$\dot{y}(t) = 6t^2$$
$$\dot{z}(t) = -10e^{-5t}$$
mentre per trovare l'accelerazione occorre derivare una seconda volta:
$$\ddot{x}(t) = 2$$
$$\ddot{y}(t) = 12t$$
$$\ddot{z}(t) = 50e^{-5t}$$
All' istante t=0 il modulo della velocità vale:
$$\dot{s}(0) = \frac{ds}{dt} = \sqrt{(\dot{x}(0))^2 + (\dot{y}(0))^2 + (\dot{z}(0))^2} \approx 10$$

3. Qui si tratta di applicare l'operazione inversa:
$$\overrightarrow{v}(t) = \int \overrightarrow{a}(t)dt$$
Ovviamente esistono infinite primitive che soddisfano l'equazione sopra citata. Per questo motivo, per determinare l'integrale esatto, è necessario avere un'ulteriore informazione. In questo caso il dato aggiuntivo è la velocità del punto all'istante t=0.
$$\overrightarrow{v}(t) = \hat{\mathbf{i}}\int 5e^{-3t} + \hat{\mathbf{j}}\int 4\sin 5t - \hat{\mathbf{k}}\int \cos t + \overrightarrow{const1}$$

$$\vec{v}(t) = -\hat{\mathbf{i}}\frac{5}{3}e^{-3t} - \hat{\mathbf{j}}\frac{4}{5}\cos 5t - \hat{\mathbf{k}}\sin t + \overrightarrow{const1}$$

All'istante t=0 si ha che

$$\vec{v}(0) = -\hat{\mathbf{i}}\frac{5}{3} - \hat{\mathbf{j}}\frac{4}{5} + \overrightarrow{const1} = -\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

segue che

$$\overrightarrow{const1} = +\hat{\mathbf{i}}\frac{2}{3} - \hat{\mathbf{j}}\frac{1}{5} + \hat{\mathbf{k}}$$

in definitiva

$$\vec{v}(t) = -\hat{\mathbf{i}}\left(-\frac{2}{3} + \frac{5}{3}e^{-3t}\right) - \hat{\mathbf{j}}\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cos 5t\right) - \hat{\mathbf{k}}\left(\sin t - 1\right)$$

Infine se voglio calcolare il vettore posizione debbo iterare nuovamente la procedura:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt = -\hat{\mathbf{i}}\int\left(-\frac{2}{3} + \frac{5}{3}e^{-3t}\right) - \hat{\mathbf{j}}\int\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}\cos 5t\right) - \hat{\mathbf{k}}\int\left(\sin t - 1\right) + \overrightarrow{const2}$$

$$\vec{r}(t) = \hat{\mathbf{i}}\left(\frac{2}{3}t + \frac{5}{9}e^{-3t}\right) - \hat{\mathbf{j}}\left(\frac{t}{5} - \frac{4}{25}\sin 5t\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(\cos t + t\right) + \overrightarrow{const2}$$

impongo la posizione al tempo t=0:

$$\vec{r}(0) = \hat{\mathbf{i}}\frac{5}{9} + \hat{\mathbf{k}} + \overrightarrow{const2} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}$$

$$\overrightarrow{const2} = \hat{\mathbf{i}}\frac{13}{9} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}$$

Perciò:

$$\vec{r}(t) = \hat{\mathbf{i}}\left(\frac{2}{3}t + \frac{13}{9} + \frac{5}{9}e^{-3t}\right) - \hat{\mathbf{j}}\left(\frac{t}{5} - \frac{4}{25}\sin 5t - 1\right) + \hat{\mathbf{k}}\left(\cos t + t + 1\right)$$

4. Calcoliamo il vettore $\vec{r_2} - \vec{r_1}$. La sua derivata fornisce esattamente il valore della velocità. Segue alla stessa maniera l'accelerazione:

$$\vec{r_2} - \vec{r_1} = 5t\hat{\mathbf{i}} + 7\hat{\mathbf{j}} + \left(1 - 5t^3\right)\hat{\mathbf{k}} \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{v_{21}} = 5\hat{\mathbf{i}} - 15t^2\hat{\mathbf{k}} \Longrightarrow$$

$$\overrightarrow{a_{21}} = -30t\hat{\mathbf{k}}$$

5. Come prima cosa calcoliamo il vettore velocità istantanea:

$$\vec{v} = -9\sin 3t\hat{\mathbf{i}} + 9\cos 3t\hat{\mathbf{j}} + 5\hat{\mathbf{k}}$$

il cui modulo vale:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{81 + 25} \simeq 10.3$$

Posso calcolare il versore tangente alla curva:

$$\hat{\mathbf{T}} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = -\frac{9}{10.3}\sin 3t\hat{\mathbf{i}} + \frac{9}{10.3}\cos 3t\hat{\mathbf{j}} + \frac{5}{10.3}\hat{\mathbf{k}} \simeq -0.9\sin 3t\hat{\mathbf{i}} + 0.9\cos 3t\hat{\mathbf{j}} + 0.5\hat{\mathbf{k}}$$

Se calcolo la derivata del versore rispetto al tempo ottengo:

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} \Longrightarrow \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = k\hat{\mathbf{N}} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}\cdot\frac{1}{\dot{s}}$$

ma $\frac{ds}{dt} = \dot{s} = \|\vec{v}\| = 10.3$, indi per cui:

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = -2.7\cos 3t\hat{\mathbf{i}} - 2.7\sin 3t\hat{\mathbf{j}} \Longrightarrow \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}\cdot\frac{1}{\dot{s}} \simeq -0.26\cos 3t\hat{\mathbf{i}} - 0.26\sin 3t\hat{\mathbf{j}}$$

il modulo dell'ultimo vettore fornisce proprio il versore $\hat{\mathbf{N}}$:$-\frac{0.26}{0.37}\cos 3t\hat{\mathbf{i}} - \frac{0.26}{0.37}\sin 3t\hat{\mathbf{j}}$. Il prodotto vettoriale tra i versori $\hat{\mathbf{T}}$ e $\hat{\mathbf{N}}$ regala infine il terzo versore $\hat{\mathbf{B}}$.

6. Riprendiamo i risultati del precedente esercizio. Il vettore $\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = k\hat{\mathbf{N}}$ esprime la relazione che andiamo ad utilizzare per ricavare il valore del raggio di curvatura r. Infatti la costante k=1/r. Segue che il raggio di curvatura vale

$$raggio = \left\|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}\cdot\frac{1}{\dot{s}}\right\|^{-1} = 2.72$$

7. Calcoliamo immediatamente il valore della velocità vettoriale istantanea:

$$\vec{v} = 3\omega\hat{\mathbf{i}}\cos\omega t - 3\omega\hat{\mathbf{j}}\sin\omega t$$

quindi l'accelerazione vale

$$\vec{a} = -3\omega^2\hat{\mathbf{i}}\sin\omega t - 3\omega^2\hat{\mathbf{j}}\cos\omega t$$

Per vedere che il vettore posizione è perpendicolare alla velocità basta fare il prodotto scalare tra i due vettori:

$$\vec{r}\cdot\vec{v} = 3\omega\cos\omega t\sin\omega t - 3\omega\sin\omega t\cos\omega t = 0$$

Calcoliamo infine il prodotto vettore

$$\vec{r}\wedge\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ 3\omega\sin\omega t & 3\omega\cos\omega t & 0 \\ 3\omega\cos\omega t & -3\omega\sin\omega t & 0 \end{vmatrix} = -9\hat{\mathbf{k}}\omega^2$$

è evidente il fatto che questo valore non dipende dal tempo.

8. Anche questo esercizio si risolve in maniera analoga. L'unica cosa che cambia la forma della traiettoria. La velocità:

$$\vec{v} = a\omega\hat{\mathbf{i}}\cos\omega t - b\omega\hat{\mathbf{j}}\sin\omega t$$

quindi l'accelerazione vale

$$\vec{a} = -a\omega^2\hat{\mathbf{i}}\sin\omega t - b\omega^2\hat{\mathbf{j}}\cos\omega t$$

il cui modulo vale

$$\|\vec{a}\| = \omega^2\sqrt{a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t}$$

9. Si tratta di considerare il moto della barca come frutto della composizione di due velocità. Se chiamamo θ l'angolo compreso tra la direzione della barca e la retta congiungente il punto di partenza e quello di partenza, allora otteniemo che

$$\vec{v} = \hat{\mathbf{i}}\left(v_{corrente} - v_{barca}\sin\theta\right) - \hat{\mathbf{j}}v_{barca}\cos\theta$$

quindi bisogna imporre che la velocità vettoriale somma sia collineare alla retta congiungente i due punti di attracco. Se usiamo il sistema di riferimento implicito che associa alla direzione della corrente il versore $\hat{\mathbf{i}}$ e alla direzione della retta il versore $\hat{\mathbf{j}}$, allora significa che:

$$\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ (v_{corrente} - v_{barca}\sin\theta) & -v_{barca} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$v_{corrente} - v_{barca}\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin\theta = \frac{v_{corrente}}{v_{barca}} = \frac{1}{3}$$

Lo spostamento della barca avviene in direzione perpendicolare alla corrente del fiume, pertanto per determinare il tempo impiegato per l'attraversamento è necessario conoscere il modulo della velocità del sistema barca+corrente (non è l'unico modo):

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\left(v_{corrente} - v_{barca}\sin\theta\right)^2 + v_{barca}^2\cos^2\theta} =$$

$$= \sqrt{v_{corrente}^2 - 2v_{corrente}\cdot v_{barca}\sin\theta + v_{barca}^2} = 2\sqrt{2}$$

segue che il tempo totale è:

$$t = \frac{D}{\|\vec{v}\|} \simeq 17.68s$$

10. La definizione di velocità media coinvolge il tempo totale e lo spazio totale, cioè:

$$\|\vec{v}_{media}\| = \frac{s_{totale}}{t_{totale}} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}$$

bisogna notare che in generale

$$\frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} \neq \frac{s_1}{t_1} + \frac{s_2}{t_2}$$

pertanto

$$= \left(\frac{65 + 200}{78 + 120}\right) \frac{m}{s} = 1.34 \frac{m}{s}$$

11. E' conveniente trovare la velocità in forma cartesiana:

$$\dot{x}(t) = 2$$
$$\dot{y}(t) = 0$$
$$\dot{z}(t) = -10e^{-5t}$$

cioè

$$\vec{v}(t) = 2\hat{\mathbf{i}} - 10e^{-5t}\hat{\mathbf{k}}$$

Questa velocità è quella istantanea che è diversa da quella media. Lo spostamento totale realizzato tra t=0 e t=3s si ottiene:

$$\Delta\vec{s} = \vec{s}(3) - \vec{s}(0) = 6\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} + 2e^{-15}\hat{\mathbf{k}} - 4\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}} = 6\hat{\mathbf{i}} + 2\left(e^{-15} - 1\right)\hat{\mathbf{k}}$$

per cui la velocità media vettoriale vale:

$$\vec{v}_{media} = \frac{\Delta\vec{s}}{\Delta t} = 2\hat{\mathbf{i}} + \frac{2}{3}\left(e^{-15} - 1\right)\hat{\mathbf{k}}$$

12. Il primo punto è decisamente banale pertanto tralascio la soluzione. Il secondo quesito prevede che si ragioni in termini vettoriali la velocità media totale è nulla perchè lo spostamento totale $\Delta\vec{s} = 0$ poichè il treno ritorna al punto di partenza. Infine, per l'ultimo punto possiamo dire che non conosciamo la legge oraria che governa il treno, pertanto non possiamo dire nulla su una velocità istantanea.

13. Nel sistema in questione agisce solamente l'accelerazione di gravità che è diretta verso il basso. Consideriamo un sistema di riferimento con l'asse delle ordinate diretto verso il basso e l'asse delle ascisse orientato lungo nel "verso positivo" del moto. Il sasso parte dalle coordinate (0,-5) per cui le equazioni del moto si ricavano partendo da

$$\ddot{x}(t) = 0$$
$$\ddot{y}(t) = g$$

segue che

$$\dot{x}(t) = costante_1$$
$$\dot{y}(t) = \int \ddot{y}(t)dt$$

L'idea di realizzare integrazioni successive è un modo efficace per pervenire alla soluzione. Le due costanti si determinano grazie alle condizioni iniziali della velocità:

$$\dot{x}(t) = V_0 \cos\theta$$
$$\dot{y}(t) = gt - V_0 \sin\theta$$

e dunque:

$$x(t) = \int \dot{x}(t)dt = (V_0 \cos\theta)\, t$$
$$y(t) = \int \dot{y}(t)dt = \tfrac{g}{2}t^2 - (V_0 \sin\theta)\, t - h$$

14. Ricaviamo t in funzione di x:

$$t = \frac{x}{V_0 \cos\theta}$$

da cui

$$y(x) = \frac{g}{2}\left(\frac{x}{V_0 \cos\theta}\right)^2 - x \tan\theta - h$$

15. Il fatto che i fucili siano orientati paralleli all'asse delle ascisse semplifica i calcoli. Anche in questo caso l'unica forza che agisce concretamente è la forza di gravità. Le pallottole, una volta sparate, hanno velocità che hanno la componente lungo x costante mentre l'unica che cambia è la componente verticale con la legge di un moto uniformemente accelerato. Pertanto la caduta delle due pallottole termina nello stesso istante, ma con punti di caduta diversi. La figura 1 mostra proprio che una pallina lasciata cadere semplicemente ed una dotata di velocità lungo x, si muovono sulla verticale nello stesso modo. Il tempo di caduta è:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

mentre le gittate sono, in modulo una il doppio dell'altra.

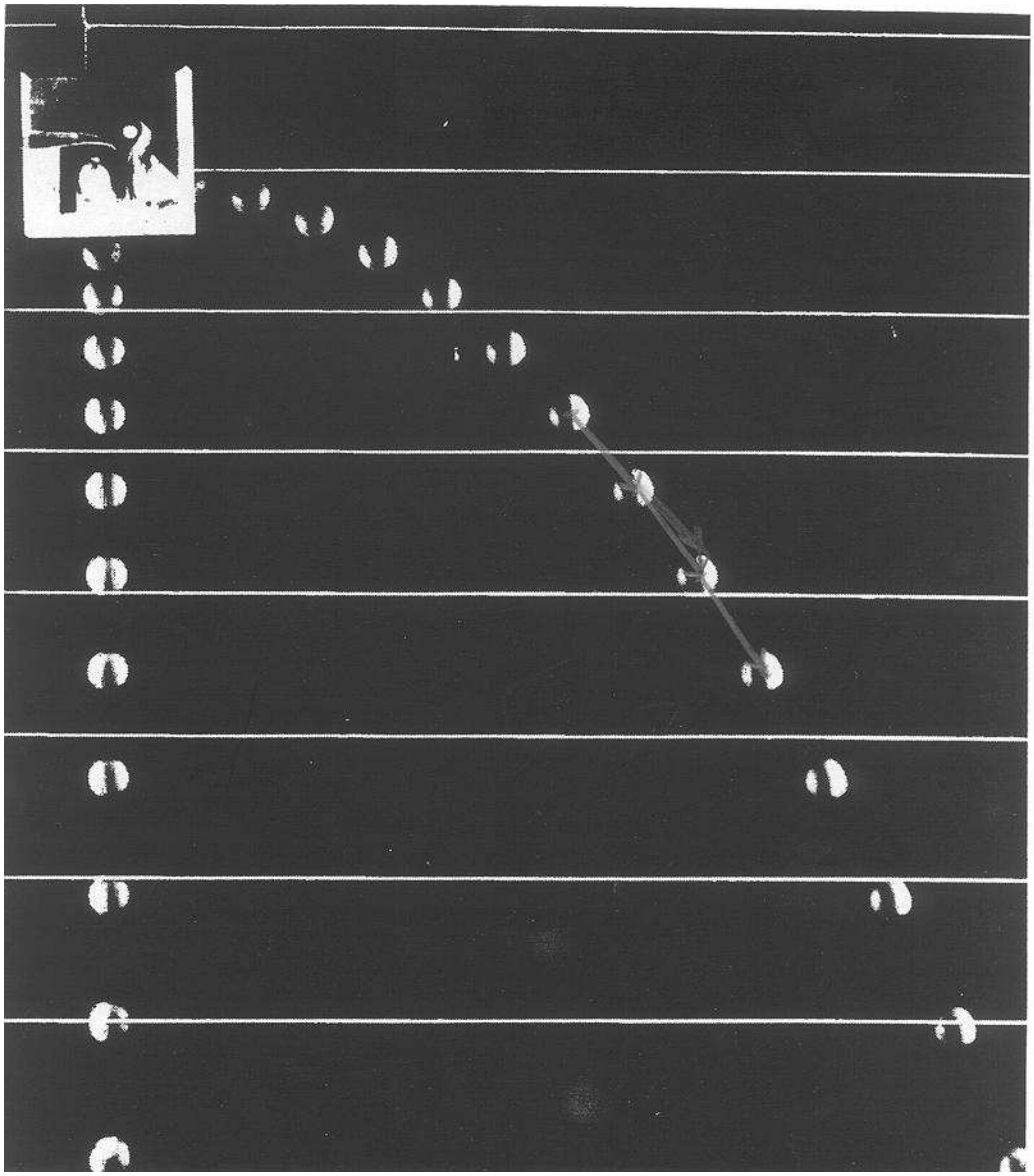

Figure 1: Foto stroboscopica con tempo di intervallo 1/30