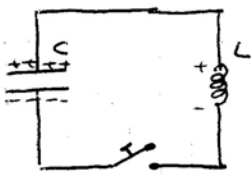


Problema N. 1
Oscillazioni libere non forzate

Un condensatore avente capacità $C = 10 \mu F$ viene caricato mediante una batteria avente una f.e.m. $= 1000 V$. Successivamente il condensatore viene isolato e poi collegato in serie ad un induttore avente una induttanza $L = 1 \text{ mH}$ (vedi figura, in cui l'interruttore è aperto). All'istante $t=0$ si chiude (istantaneamente) l'interruttore. Si studi l'andamento nel tempo della corrente nel circuito LC. Si trascurino tutte le resistenze ohmiche.



$$C = 10 \mu F$$

$$L = 1 \text{ mH}$$

$$C = q/V \Rightarrow q = CV = 10^{-5} \times 10^3 = 10^{-2} \text{ Coul.}$$

Carica iniziale del condensatore

Una volta chiuso l'interruttore, per la legge di Ohm applicata al circuito chiuso, si avrà $\sum d.d.p. = 0$ cioè

$$+V_C - V_L = 0 \quad \text{dove } V_C = \frac{q}{C} \quad \text{e} \quad V_L = -L \frac{di}{dt}$$

$$\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} = 0 \quad \text{Ma } i = \frac{dq}{dt} \quad \text{per cui}$$

$$\frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} = 0 \quad \text{e, anche} \quad \boxed{L \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{C} q = 0} \quad \text{e} \quad \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

L'eq. differenziale ottenuta è analoga alla $m\ddot{x} + kx = 0$ (con $x \equiv q$)

Si noti la corrispondenza $m \rightarrow L$; $k \rightarrow \frac{1}{C}$

La soluzione (oscillatore armonico semplice) è

$$q = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$\text{con } \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = 10^4 \text{ rad/s}$$

Occorre determinare Q_0 e φ_0 usando

le condizioni iniziali

$$t=0 \quad \begin{cases} q = 10^{-2} \text{ Coulomb} \equiv Q_I \\ i = 0 \end{cases}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 6,28 \times 10^{-4} \text{ s}$$

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 1591,5 \text{ Hz}$$

(oscillatore ad alta frequenza)

Si ha ovviamente $i = \dot{q} = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)$

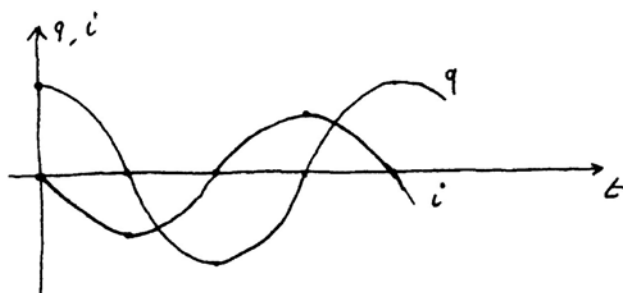
$$t=0 \quad \begin{cases} Q_0 \cos \varphi_0 = Q_I \\ -\omega_0 Q_0 \sin \varphi_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sin \varphi_0 = 0 \\ \cos \varphi_0 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} Q_0 = Q_I \\ \varphi_0 = 0 \end{cases}$$

L'andamento della corrente nel tempo è:

$$i(t) = -10^4 \times 10^{-2} \sin 10^4 t = -100 \sin 10^4 t \quad \text{Ampère}$$

mentre quello della carica sul condensatore è

$$q(t) = 10^{-2} \cos 10^4 t \quad \text{Coulomb}$$



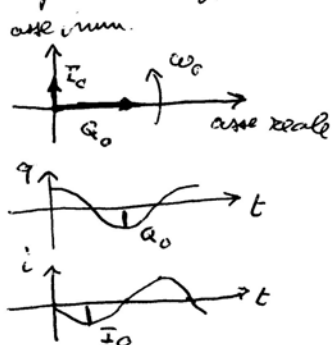
Si osservi quanto segue:

$$\begin{cases} q = Q_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \\ i = \frac{dq}{dt} = -\omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \end{cases}$$

La rappresentazione grafica è del tipo sopra riportato

Ricordando quanto detto sulla rappresentazione simbolica, per ottenere i si deve derivare q . Pertanto si ottiene una grandezza che ha una ampiezza pari a quella di q ($\equiv Q_0$) moltiplicata per ω_0 ; inoltre, nel piano complesso, il "vettore" che rappresenta la i è "ruotato" di $\pi/2$ in verso antiorario rispetto a quello che rappresenta la q

Nell'esempio numerico si aveva $\varphi_0 = 0$



$$I_0 \equiv \omega_0 Q_0$$

Si ricordi anche che la funzione armonica è la parte reale del numero complesso (cioè la proiezione del vettore sull'asse reale)

Da un punto di vista energetico si ha conservazione, Infatti:

- Nel condensatore si ha energia "elettrica":

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2C} Q_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

- Nell'induttanza si ha energia "magnetica":

$$U_B = \frac{1}{2} L \dot{I}^2 = \frac{1}{2} L \omega_0^2 Q_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) = \frac{1}{2} L \frac{1}{LC} Q_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Complessivamente, nel circuito LC (senza resistenza R) si ha

$$U_E + U_B = \frac{Q_0^2}{2C} [\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) + \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)] = \frac{Q_0^2}{2C} = \underline{\underline{\text{costante}}}$$

Questo perché non c'è dissipazione ($\equiv R=0$)