Problema N. 14

Una corda di violino è lunga $L = 31,6$ cm e ha densità lineare $\mu = 0,65$ g/m .

1) Calcolare quale tensione deve essere applicata ai suoi estremi, vincolati al manico, perché la frequenza dell'armonica fondamentale risulti $\nu = 440$ Hz .

Il suono prodotto dalla corda si propaga nell'aria (alla pressione $p_0 = 1$ atm) con velocità di modulo $v = 330$ m/s . Assumendo per l'aria $\gamma = 1,4$:

2) calcolare la densità ρ_0 dell'aria.

Il suono della nota emessa viene avvertito da un ascoltatore, posto a distanza $D = 10$ m dal violino, con un livello sonoro di 60 dB.

3) Calcolare il lavoro fatto dal violinista in un secondo.

In un secondo violino, la corda analoga ha una tensione pari al 99% di quella della prima.

4) Calcolare la frequenza dei battimenti.

Soluzione

1)

La velocità di propagazione delle onde su una corda tesa è:

$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ Ma si ha anche $v = \lambda \nu$

Le lunghezze d'onda delle varie armoniche sono $\lambda_n = \frac{2L}{n}$

con $n = 1, 2, 3, \ldots$ e le corrispondenti frequenze sono:

$\nu_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L}$ Per la armonica fondamentale $n = 1$ e

$\nu \equiv \nu_1 = \frac{v}{2L}$ Si ottiene pertanto $\nu_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$

La tensione che deve essere applicata alla corda è allora

$T = \mu \left(2 \nu_1 L\right)^2$ che, con i valori numerici del testo fornisco

$T = 0{,}65 \times 10^{-3} \left(2 \times 440 \times 0{,}316\right)^2 = 50{,}26 \text{ N}$

2.) Per un'onda sonora che si propaga in un gas ideale (trasformazione adiabatica quasi-statica) si ha che la v_s è data da

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma p_{gas}}{\rho_{gas}}} \qquad p_{gas} = 1 \text{ atm} = 1{,}013 \times 10^5 \text{ Pa}$$

Pertanto $\rho_{gas} = \frac{\gamma p_{gas}}{v_s^{\,2}} = \frac{1{,}4 \times 1{,}013 \times 10^5}{330^2} \simeq 1{,}3 \text{ Kg/m}^3$

3) Il livello sonoro β è dato da

$$\beta = 10 \log_{10} \frac{I_P}{I_0} \qquad \text{con } I_0 \simeq 10^{-12}\ W/m^2$$

Nel caso in questione $\beta = 60$ dB

$$60 = 10 \log_{10} \frac{I_P}{I_0} \implies I_P = 10^6 I_0 = 10^{-6}\ W/m^2$$

La potenza della sorgente è legata all'intensità nel punto P dalla relazione (sorgente isotropa)

$$P_m = 4\pi \overline{OP}^2 I_P \qquad \overline{OP} = D = 10\ m$$

$$P_m = 4\pi\, 10^2 \times 10^{-6} = 1{,}26 \times 10^{-3}\ W$$

Questo è il lavoro, per unità di tempo, fatto dal violinista

4) Se due onde (armoniche) con frequenza simile si propagano nello stesso mezzo e nella stessa direzione e verso, si producono dei battimenti la cui frequenza è:

$$\nu_{batt.} = \nu_1 - \nu_2$$

In questo caso $\nu_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ e $\nu_2 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{0{,}99\,T}{\mu}}$

Pertanto

$$\nu_{batt.} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}\left(1 - \sqrt{0{,}99}\right) =$$

$$= \frac{1}{2 \times 0{,}316}\sqrt{\frac{50{,}26}{0{,}65 \times 10^{-3}}}\left(1 - \sqrt{0{,}99}\right) =$$

$$= 440\left(1 - \sqrt{0{,}99}\right) \simeq 2{,}21\ Hz$$