

### Problema N. 24

Una sorgente  $S$  (puntiforme ed isotropa) emette un fascio di onde elettromagnetiche sferiche, monocromatiche di frequenza  $f$ , verso uno schermo  $A$  (distante  $h$  dalla sorgente  $S$ ) su cui si trovano due fenditure puntiformi  $M$  ed  $N$ , identiche, simmetriche rispetto all'asse  $x$ , distanti  $d$  fra loro.

A distanza  $D \gg d$  dallo schermo  $A$  si trova un secondo schermo  $B$ , parallelo ad  $A$ .

Si supponga che inizialmente la fenditura  $N$  sia “chiusa” (in modo che l'onda elettromagnetica proveniente da  $S$  non possa attraversarla).

L'intero sistema si trova immerso in un mezzo rifrangente, omogeneo e isotropo, avente permeabilità magnetica relativa  $\mu_r$  e costante dielettrica relativa  $\epsilon_r$ .

Nota l'ampiezza  $B_0$  del campo magnetico dell'onda elettromagnetica subito dopo la fenditura  $M$ , si determini:

- 1) L'ampiezza e l'intensità media dell'onda nel punto  $P$  dello schermo  $B$ .

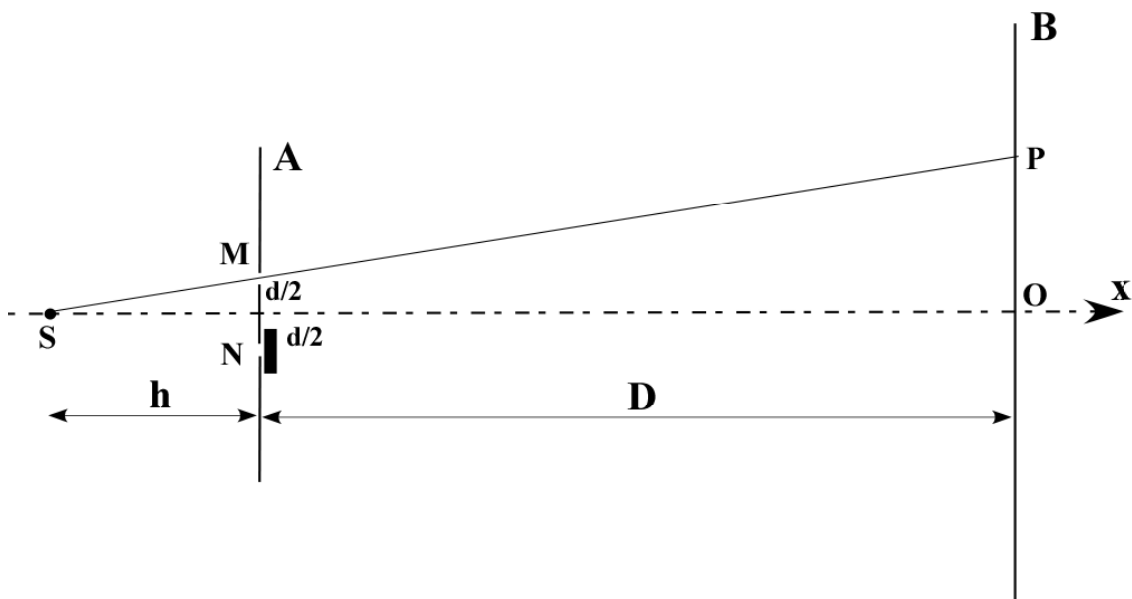
Si supponga ora di “aprire” anche la fenditura  $N$ . In tale situazione, si determini:

- 2) La larghezza delle frange di interferenza sullo schermo  $B$ ;
- 3) Il rapporto tra le intensità dell'onda in  $P$  e in  $O$ .

- 4) Solo dopo aver risolto il problema (soluzione letterale), si considerino i seguenti valori per la soluzione numerica relativamente alle domande 1 e 2 sopra indicate:

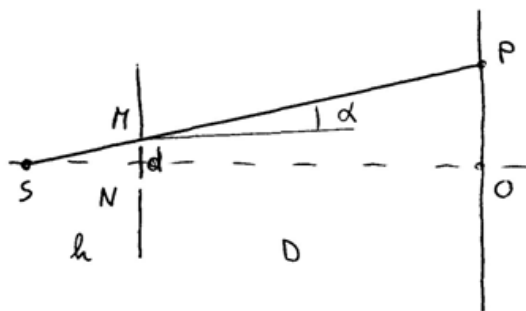
$$B_0 = 4 \cdot 10^{-13} \text{ Tesla}; h = 20 \text{ cm}; d = 4 \text{ mm}; D = 15 \text{ m};$$

$$f = 6 \cdot 10^{14} \text{ Hz}; \mu_r = 1; \epsilon_r = 1,44; c \text{ velocità della luce nel vuoto} = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$



## Soluzione

1)



$$\cos \alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$$

$$\overline{HP} = \frac{D}{\cos \alpha} = \frac{D}{h} \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

Poiché le onde secondarie generate in  $H$  (principio di Huygens) sono sferiche si ha che l'ampiezza varia come  $\frac{1}{r}$ . Si ha quindi

$$E_P = \frac{E_H}{\overline{HP}} = \frac{E_0}{\overline{HP}} = \frac{h}{D} E_0 \frac{1}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$

Nel nostro caso, poiché  $E = vB \Rightarrow E_0 = v B_0 \Rightarrow E_0 = \frac{c}{n} B_0$

$$E_P = \frac{h}{D} \frac{c}{n} B_0 \frac{1}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \quad \text{con } n = \sqrt{\epsilon_x \mu_x}$$

$$\text{Inoltre } I_P = \left( \frac{1}{2} E_P^2 \right) / Z \quad \text{con } Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_x \mu_0}{\epsilon_x \epsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_x}{\epsilon_x}} Z_0$$

2) Poiché  $D \gg d$  si ha, per la larghezza delle frange di interferenza

$$\Delta s = \frac{D}{d} \lambda^* \quad \text{con } \lambda^* = \frac{\lambda}{n} = \frac{\lambda}{\sqrt{\epsilon_x \mu_x}}$$

Inoltre  $\lambda = \text{lunghezza d'onda nel vuoto} = \frac{c}{f}$  per cui

$$\Delta s = \frac{D}{d} \frac{c}{f \sqrt{\epsilon_x \mu_x}}$$

3) Se  $I_H$  è l'intensità dell'onda in  $H$  (ed in  $N$ ) si ha

$$I_0 = 4 \langle I_H \rangle \quad \text{e} \quad I_P = 4 \langle I_H \rangle \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad \text{per cui}$$

$$\frac{I_P}{I_0} = \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \quad \text{dove } \delta = \frac{2\pi}{\lambda^*} d \sin \alpha = \frac{2\pi d}{\lambda^*} \sqrt{1 - \frac{h^2}{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}}$$

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{2\pi d \sqrt{\epsilon_x \mu_x}}{\lambda} \sqrt{1 - \frac{h^2}{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} = \frac{2\pi d f \sqrt{\epsilon_x \mu_x}}{c} \sqrt{1 - \frac{h^2}{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \\ &= \frac{\pi d f \sqrt{\epsilon_x \mu_x}}{c} \frac{1}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}} \end{aligned}$$

4) Soluzione numerica

$$n = \sqrt{1.44} = 1.2$$

$$\cos \alpha = \frac{0.2}{\sqrt{0.2^2 + (2 \times 10^{-3})^2}} = 0.99995$$

$$\overline{HP} = 15.00075 \text{ m}$$

$$E_P = \frac{0.2}{15} \times \frac{3 \times 10^8}{1.2} \times 4 \times 10^{-13} \times \frac{1}{\sqrt{0.2^2 + (2 \times 10^{-3})^2}} \approx 6.666 \times 10^{-6} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

(ampiezza)

$$Z = \frac{Z_0}{\sqrt{1.44}} \approx \frac{377}{1.2} \approx 314 \Omega$$

$$I_P = \left[ \frac{1}{2} \left( 6.666 \times 10^{-6} \right)^2 \right] / 314 \approx 7.075 \times 10^{-14} \text{ W/m}^2$$

(intensità media)

$$\Delta s = \frac{15}{4 \times 10^{-3}} \frac{3 \times 10^8}{6 \times 10^{14} \sqrt{1.44}} \approx 1.5625 \times 10^{-3} \text{ m}$$

(larghezza frangia)

$$\delta = \frac{\pi \times (4 \times 10^{-3})^2 \times 6 \times 10^{14} \times 1.2}{3 \times 10^8} \frac{1}{\sqrt{0.2^2 + (2 \times 10^{-3})^2}} = 6.031556 \times 10^{-2}$$

$$\frac{I_P}{I_0} \approx \cos^2\left(\frac{\delta}{2}\right) \approx 0.974$$