

Problema N. 4

Oscillazioni libere non forzate e Oscillazioni libere smorzate

Si abbia un oscillatore armonico, come nella figura sotto riportata, per il quale si hanno i seguenti valori:

- massa $m=250$ g;
- costante elastica della molla $K=85$ N/m (molla ideale).

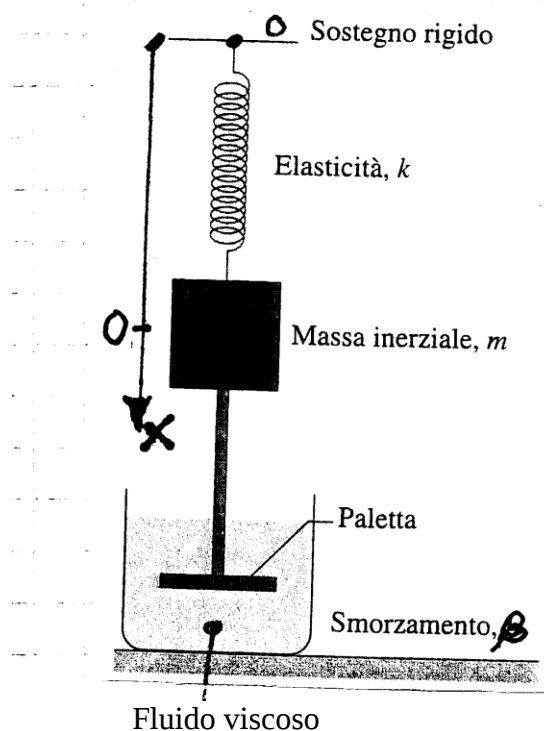
La paletta (di massa trascurabile) si muove, in un primo caso (a) in aria ed in un secondo caso (b) in un fluido viscoso avente un coefficiente di viscosità (o di smorzamento) di valore $\beta=70$ g/s.

Assumendo trascurabile la resistenza viscosa dell'aria, si consideri un asse x verticale (vedi figura) e si supponga che, per $t=0$, si abbiano in entrambi i casi (a) e (b):

- $x(0)=x_{\max}=0.05$ m;
- $v_x(0)=0$.

Trascurando l'effetto gravitazionale:

- 1) Si scrivano le equazioni del moto nei due casi (a) e (b).
- 2) Si discuta numericamente il comportamento dell'energia meccanica dell'oscillatore nei due casi (a) e (b) e, per il caso (b), verificare che la potenza meccanica dissipata è la potenza dissipata dalla forza di attrito viscoso.
- 3) Per il caso (b), si determini il tempo di decadimento dell'oscillatore, lo pseudo periodo, la variazione dell'ampiezza dell'oscillazione dopo uno pseudo periodo e di quanto diminuisce l'energia meccanica dopo uno pseudo periodo.



Soluzione

Domanda 1 e Domanda 2

Caso a)

$$\vec{F} = m \vec{a} \Rightarrow \vec{F}_x = m a_x \equiv m \ddot{x} = -Kx \quad (\text{dove } -Kx \text{ \textit{\textbf{e}} la forza elastica})$$

$m\ddot{x} + Kx = 0$ equazione differenziale dell'oscillatore armonico semplice (eq. lineare)

o, anche: $\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$ Poich\`e $\frac{K}{m}$ \textit{\textbf{e}} positivo ponga $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \quad (\diamond) \quad \text{Nel nostro caso } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = 18,439 \text{ s}^{-1} \quad (\text{o } \frac{\text{rad}}{\text{s}})$$

$\omega_0 \equiv$ pulsazione del moto armonico semplice $= \frac{2\pi}{T_0}$ dove

T_0 \textit{\textbf{e}} il periodo. In questo caso $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 0,341 \text{ s}$

La soluzione dell'eq. differenziale ($\diamond$) \textit{\textbf{e}} (eq. del moto):

$$x \equiv x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) \quad \text{dove } A_0 = \text{ampiezza e } \varphi_0 = \text{fase iniz. sono delle costanti da determinare.}$$

Per trovare A_0 e φ_0 considero le condizioni iniziali

$$x(0) \equiv x_{\max} = A_0 \cos \varphi_0 \quad (1) \quad \text{e, poich\`e } \dot{x}(t) = -\omega_0 A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0):$$

$$\dot{x}(0) = -\omega_0 A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \Rightarrow \dot{x}(0) = -\omega_0 A_0 \sin \varphi_0 = 0 \quad (2)$$

Da quest'ultima ottengo $\sin \varphi_0 = 0 \Rightarrow \varphi_0 = \begin{matrix} 0 \\ \pi \end{matrix}$

Si ha pertanto $\cos \varphi_0 = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$

Per la relazione (1) si ha: $x_{\max} = \begin{cases} A_0 & \text{accettabile (perch\`e } x_m > 0) \\ -A_0 & \text{non accettabile} \end{cases}$

Si \textit{\textbf{e}} quindi ottenuto $\begin{cases} A_0 = x_{\max} \equiv x_m (= \text{ampiezza}) \\ \varphi_0 = 0 \end{cases} \quad (= \text{fase iniziale})$

L'equazione del moto \textit{\textbf{e}} quindi $x(t) = x_m \cos \sqrt{\frac{K}{m}} t$.

Numericamente $x(t) = 0,05 \cos 18,439 t$

Discutiamo subito il comportamento dell'energia meccanica

Si ha $E_H = E_K + E_P$ dove

$$E_K \equiv \text{en. cinetica} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$E_P \equiv \text{en. potenziale (elastica)} = \frac{1}{2} K x^2$$

$$\text{Ma } \dot{x} = -\omega_0 x_m \sin \omega_0 t \quad \text{per cui:}$$

$$E_K = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} m \frac{K}{m} x_m^2 \sin^2 \omega_0 t = \frac{1}{2} K x_m^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$E_P = \frac{1}{2} K x_m^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$\text{Si ha pertanto } E_H = \frac{1}{2} K x_m^2 (\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t) = \frac{1}{2} K x_m^2$$

o, anche:

$$E_H = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_m^2 \quad \left(\text{perché } \omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \right)$$

(E_H è proporzionale al quadrato dell'ampiezza x_m)

Nel nostro caso, numericamente $E_H \approx 0,106 \text{ J}$

Si vede chiaramente che in questo caso (oscillatore armonico semplice) E_H è costante

Caso b) In questo caso esiste anche una forza di attrito viscoso, che è espressa dalla $F_x = -\beta \dot{x} = -\beta \dot{x}$, quindi:

$$\bar{F} = m \bar{a} \Rightarrow F_x = m a_x \equiv m \ddot{x} = -Kx - \beta \dot{x} \Rightarrow m \ddot{x} + \beta \dot{x} + Kx = 0 \quad (\diamond \diamond)$$

(eq. differenziale del moto armonico smorzato)

Per risolvere l'eq. ($\diamond \diamond$), cioè per trovare $x \equiv x(t)$ scrivo l'eq. algebrica caratteristica $m \lambda^2 + \beta \lambda + K = 0$ le cui soluzioni sono:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4Km}}{2m} = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}} = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2m}\right)^2 - \omega_0^2}$$

Analizzo il termine $\Delta = \beta^2 - 4Km$ (è equivalente ad analizzare $\Delta^* = \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2 - \frac{K}{m}$)

Possono presentarsi tre casi: $\Delta \begin{cases} < 0 & \text{sistema sottoscritico} \\ = 0 & \text{" critico} \\ > 0 & \text{" supercritico} \end{cases}$

Si può vedere che solo nel caso $\Delta < 0$ si hanno oscillazioni presenti nella soluzione $x(t)$. Nel caso in esame si ha:

$$\Delta = (7 \times 10^{-2})^2 - 4 \times 0,25 \times 85 < 0 \Rightarrow \text{il sistema è sottoscritico}$$

Si può quindi scrivere $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega_1$ con $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2}$.
La soluzione generale della (◇◇) è quindi:

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{\alpha t} e^{i\omega_1 t} + c_2 e^{\alpha t} e^{-i\omega_1 t} = A(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_0)$$

dove $A(t) = A_0 e^{-\frac{\beta}{2m} t}$ (ampiezza che diminuisce nel tempo, il moto non è periodico)

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2} < \omega_0 \quad \text{Si ha poi:}$$

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{chiamato pseudo-periodo}$$

Riassumendo, l'eq. del moto è $x(t) = A_0 e^{-\frac{\beta}{2m} t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0)$

$$\text{Nel nostro caso } \omega_1 = \sqrt{\frac{85}{0,25} - \left(\frac{7 \times 10^{-2}}{0,5}\right)^2} \approx 18,4386 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

(Si ha ω_1 di poco minore di ω_0 : si dice che lo smorzamento è debole, in questo caso)

e $T_1 \approx 0,34 \text{ s} \approx T_0$ (perché si ha smorzamento debole)

Trovo le due costanti A_0 e φ_0 , sempre usando le condizioni iniziali. Si ha:

$$\dot{x}(t) = -\frac{\beta}{2m} A_0 e^{-\frac{\beta}{2m} t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) - A_0 \omega_1 e^{-\frac{\beta}{2m} t} \sin(\omega_1 t + \varphi_0)$$

Quindi:

$$\begin{cases} x(0) = x_{\max} = x_m = A_0 \cos \varphi_0 \\ \dot{x}(0) = 0 = -\frac{\beta}{2m} A_0 \cos \varphi_0 - A_0 \omega_1 \sin \varphi_0 \end{cases} \quad \begin{cases} A_0 \cos \varphi_0 = x_m \\ \frac{\beta}{2m} \cos \varphi_0 + \omega_1 \sin \varphi_0 = 0 \end{cases}$$

$$A_0 \cos \varphi_0 = x_m \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 \simeq x_m \\ \varphi_0 \simeq 0 \end{array} \right.$$

$$\tan \varphi_0 = -\frac{\beta}{2m\omega_1} \simeq -7,6 \times 10^{-3} \Rightarrow \varphi_0 \simeq 0 \Rightarrow \cos \varphi_0 \simeq 1$$

$$\text{Si ottiene quindi } x(t) = x_m e^{-\frac{\beta}{2m}t} \cos \omega_1 t = 0,05 e^{-0,14t} \cos 18,4336 t$$

Si può mostrare che in questo caso (oscillatore smorzato) $E_H \neq \text{cost}$

$$\text{Vediamo infatti che } \frac{dE_H}{dt} \neq 0: \quad E_H = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{dE_H}{dt} = \frac{1}{2} 2m \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = m \dot{x} a + kx \dot{x} = \dot{x} (ma + kx)$$

$$\text{Ma } ma = -kx - \beta \dot{x} \Rightarrow ma + kx = -\beta \dot{x} \text{ per cui}$$

$$\frac{dE_H}{dt} = (-\beta \dot{x}) \dot{x} = -F_v \dot{x} \equiv \text{potenza dissipata da } F_v \text{ (forza attr. viscos.)}$$

Se β è piccolo $\frac{dE_H}{dt} \rightarrow 0$. Si può quindi dire che per piccoli smorzamenti l'ampiezza diminuisce, ma lentamente, così come l'energia meccanica. In una pseudoperiodo T_1 si può ritenere $A(t) \simeq \text{costante}$ e si può scrivere:

$$\langle E_H \rangle = \frac{1}{2} m \omega_1^2 A^2. \text{ Nel successivo pseudoperiodo però}$$

A è diminuita (anche se di poco, in questo caso) $\Rightarrow$ anche E_H .

Domanda 3

$$\text{Il tempo di decadimento è } \tau = \frac{m}{\beta} = 3,57 \text{ s}$$

$$\text{Pseudoperiodo } T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \simeq \frac{2\pi}{\omega_0} \simeq 0,34 \text{ s}$$

Poiché $\tau > T_1$, si hanno varie oscillazioni nel moto

$$A(0) = A_0 \text{ e } A(0+T_1) = A_0 e^{-\frac{\beta}{2m}T_1} \simeq 0,9535 A_0$$

$$\langle E_H(0) \rangle = \frac{1}{2} m \omega_1^2 A_0^2 = 0,1062 \text{ J}$$

$$\langle E_H(T_1) \rangle = \frac{1}{2} m \omega_1^2 A_0^2 e^{-\frac{\beta}{m}T_1} \simeq 0,909 \langle E_H(0) \rangle \simeq 0,097 \text{ J}$$