Problema N. 5

Parte a)

Una massa $m = 0.5$ kg è attaccata ad una molla ideale di costante elastica $k = 72$ N/m. L'altro estremo della molla è fisso. Il sistema sta su un piano orizzontale privo di attrito. Alla massa *m* viene applicata la forza $F = 55 \cos 5t$. Determinare il moto della massa e calcolare i valori massimi dell'energia cinetica e dell'energia potenziale elastica.

Parte b)

Successivamente il sistema viene smorzato (ad esempio immergendolo in un fluido viscoso) con coefficiente di viscosità $\beta = 6$ kg/s. Trovare la nuova equazione del moto.

Parte c)

Nella situazione di cui al punto b, quanto dovrebbe valere la massa *m* per avere risonanza ? Si scriva poi la legge del moto in tale caso.

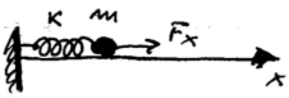
Traccia della soluzione

a) $m\ddot{x} + Kx = F = F_0 \cos \Omega t$ (1)

$F_0 = 55$ N $F_x = 55 \cos 5t$

$\Omega = 5 \ s^{-1}$

$K = 72$ N/m



$m = 0{,}5$ Kg

$\beta = 0$ Kg/s

l'omogenea associata è

$m\ddot{x} + Kx = 0 \implies \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$

o, anche

$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = 12$ rad/s pulsazione propria dell'oscillatore

$\Omega = 5$ rad/s pulsazione impressa

Se avessi avuto anche il coefficiente di smorzamento dovuto ad attrito viscoso (β) l'eq. differenziale anziché (1) sarebbe stata $m\ddot{x} + \beta\dot{x} + Kx = F_0 \cos \Omega t$ e la sua soluzione sarebbe stata $x(t) = x_{omogenea}(t) + x_{int.part.}(t)$ e, in dettaglio:

$$x(t) = A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega_1 t + \varphi_0) + \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (\frac{\beta}{m}\Omega)^2}} \cos(\Omega t - \varphi) \quad (2)$$

dove $\tau = \frac{m}{\beta}$ è il tempo di decadimento

Il primo termine della somma $A_0 e^{-\frac{t}{2\tau}} \cos(\omega_1 t + \varphi_0)$ è la <u>parte transitoria</u> che dopo un certo tempo tende a zero. Ciò che rimane è la <u>parte stazionaria</u> (va verificato che $\Delta < 0$) ($\Delta = \beta^2 - 4Km$)

Nel nostro caso manca il coefficiente β (cioè $\beta = 0$). Pertanto l'equazione del moto (soluzione della (1)), a regime è ottenuta dalla soluzione generale (2) (parte stazionaria) ponendo in essa $\beta = 0$. Quindi, a regime: (si ha chiaramente $\Delta < 0$)

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}} \cos(\Omega t - \varphi) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos(\Omega t - \varphi)$$

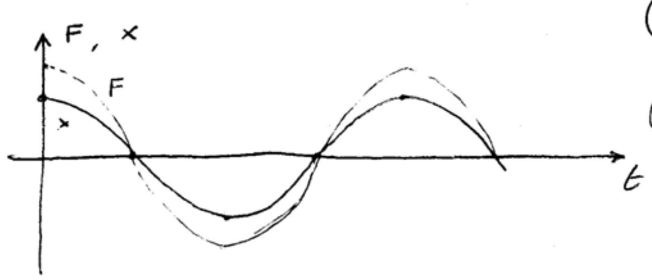
dove $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\Omega/\tau}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\Omega\beta}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right)$

Essendo $\beta = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ per cui $x(t) = \dfrac{F_0/m}{\omega_0^2 - \Omega^2} \cos \Omega t$

Usando i dati del problema si ottiene l'equazione del moto

$$x(t) = \frac{55}{0,5(12^2 - 5^2)} \cos 5t \Rightarrow x(t) = 0,92 \cos 5t$$

(0,92 è l'ampiezza dell'oscillazione)
(in realtà sarebbe 0,924369748)



Per l'energia cinetica si ha $E_K = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ dove, nel nostro caso $x = 0,92 \cos 5t \Rightarrow \dot{x} = -5 \times 0,92 \sin 5t \Rightarrow \dot{x}^2 = (-4,6 \sin 5t)^2$

Pertanto $E_K = \frac{1}{2} \times 0,5 \times (-4,6 \sin 5t)^2 = 5,29 \sin^2 5t$
(in realtà $\simeq 5,34 \sin^2 5t$ usando 0,924369748 anziché 0,92)

ed allora $E_{K_{Max}} = 5,29$

Per l'energia potenziale elastica $E_p \equiv E_e = \frac{1}{2} K x^2$

Pertanto $E_p = \frac{1}{2} \times 72 \times (0,92 \cos 5t)^2 = 30,47 \cos^2 5t$
(in realtà $\simeq 30,76 \cos^2 5t$)

ed allora $E_{p_{Max}} = 30,47$

I due termini, E_K ed E_P, non sono uguali e la loro somma non è costante (a differenza di quanto accade nell'oscillatore libero)

b) $\beta = 6$ (esiste anche il termine di smorzamento)

La soluzione dell'equazione generale (1) è la (2).

Considerando la sola parte stazionaria (a regime) si
(anche qui si ha $\Delta = \beta - 4km < 0$)

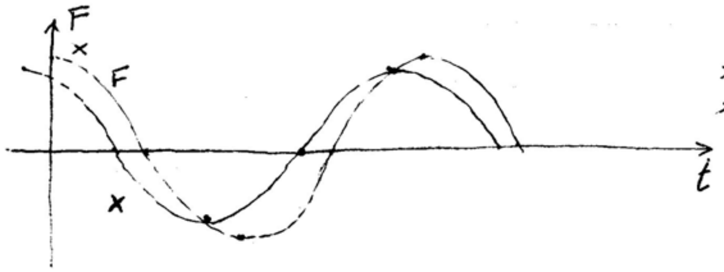
ha
$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \left(\frac{\beta}{m}\Omega\right)^2}} \cos(\Omega t - \varphi) \qquad (3)$$

essendo $\varphi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{\Omega\beta}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}\right) \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg}(-0{,}504) = -0{,}46 \text{ rad}$

Si ottiene, usando i valori numerici del problema:

$$x(t) = 0{,}83 \cos(5t + 0{,}46) \qquad (4)$$

essendo $\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \left(\frac{\beta}{m}\Omega\right)^2}} = 0{,}83$ (ampiezza dell'oscillazione)



x è sfasato di 0,46 rad rispetto ad F

Si può inoltre osservare che, analizzando la parte transitoria della soluzione dell'eq. generale del moto si avrebbe, nel caso di cui al punto b):

$$x_{trans}(t) = A_0 e^{-\frac{\beta}{2m}t} \cos(\omega_1 t + \varphi_0)$$

che il tempo di decadimento $\tau = \frac{m}{\beta}$ vale $\tau = \frac{0{,}5}{6} = 0{,}0833 \text{ s}$

Il valore dello pseudoperiodo è $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ con

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2} \cong 10{,}39 \Rightarrow T_1 = 0{,}605 \text{ s}$$

Pertanto, essendo $\tau << T_1$ la parte transitoria si smorza rapidamente senza che si possano notare le oscillazioni ad essa associate.

c) la soluzione stazionaria (andamento a regime) si è visto che è, nelle condizioni di cui al punto b precedente:

$$x(t) = 0{,}83 \cos(5t + 0{,}46)$$

Per avere una condizione di risonanza si deve porre $\omega_0 \to \Omega$ nella (3). (Infatti $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ è funzione di m)
Si ottiene allora

$$x_{ris}(t) = \frac{F_0/\cancel{m}}{\frac{\beta}{\cancel{m}}\Omega} \cos(\Omega t - \varphi)$$

e $\varphi = \operatorname{arctg}(-\infty) \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$

Si ha allora

$$x_{ris}(t) = \frac{F_0}{\Omega \beta} \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

e, numericamente (con i dati del problema)

$$x_{ris}(t) = \frac{55}{5 \times 6} \sin 5t = 1{,}83 \sin 5t \qquad (5)$$

Chiaramente l'ampiezza dell'oscillazione in questo caso è più alta del caso descritto da (4).
Per avere la (5) come eq. della legge del moto (condizione di risonanza) si deve avere

$$\omega_0 = 5 = \sqrt{\frac{K}{m}} \Longrightarrow m = \frac{K}{5^2} = 2{,}88 \ \text{Kg}$$