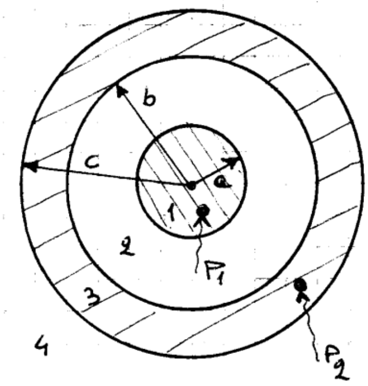
Problema N°. 10

Una sfera <u>isolante</u> di raggio a (e centro in O) è contenuta all'interno di un involucro sferico <u>conduttore</u>, concentrico con la sfera isolante ed avente raggio interno b ed esterno c. La sfera possiede una carica Q_0, distribuita uniformemente nel suo volume. L'involucro sferico è caricato positivamente con una carica $3Q_0$. Determinare:

1) A quale distanza $r^* < a$ dal centro O il campo elettrico ha intensità $E^* = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{2a^2}$;
2) La differenza di potenziale (d.d.p.) tra i punti P_1 e P_2 che si trovano alle distanze da O $r_1 \equiv r(P_1) = a/2$ e $r_2 \equiv r(P_2) = (b+c)/2$;
3) La densità superficiale di carica σ sulla superficie esterna dell'involucro.

Soluzione



(Il campo prodotto ha chiaramente direzione radiale data la simmetria sferica del problema)

1) La densità volumetrica di carica nella sfera isolante è

$$\rho = \frac{Q_0}{\frac{4}{3}\pi a^3}$$

Considerando una superficie gaussiana Σ^* (sfera di raggio r^*) si avrà:

$$\oint_{\Sigma^*} \bar{E}^* \cdot d\bar{S} = \frac{q^*}{\varepsilon_0} = \frac{\rho V^*}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^{*3}}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{Q_0}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} a^3} \cancel{\frac{4}{3}\pi} r^{*3}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^*}{a}\right)^3$$

$$E^* 4\pi r^{*2} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{r^*}{a}\right)^3 \Longrightarrow r^* = \frac{4\pi\varepsilon_0 a^3}{Q_0} E^*$$

Sostituendo il valore dato per E^* si ha:

$$r^* = \frac{a}{2}$$

2) Dalla relazione $\bar{E} = -\operatorname{grad} V$, data la direzione radiale di $\bar{E}$ si ottiene $E = -\frac{dV}{dr} \Longrightarrow dV = -E\,dr$

e, integrando tra P_1 e P_2:

$$\Delta V \equiv V(P_2) - V(P_1) = -\int_{P_1}^{P_2} E\,dr = -\left\{ \int_{R_1}^{a} E_1\,dr + \int_{a}^{b} E_2\,dr + \int_{b}^{R_2} E_3\,dr \right\}$$

dove E_1, E_2, E_3 sono le intensità del campo elettrico nelle tre regioni 1, 2, 3 di figura.

Essendo 3 una regione conduttrice, si avrà $E_3 \equiv 0$.

Trovo quindi E_1 ed E_2, applicando Gauss.

regione 1 $\quad r < a$

$$\oint_{\Sigma_1} \overline{E}_1 \cdot d\overline{S} = \frac{q_1}{\varepsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0} \quad E_1 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{a^3} r$$

regione 2 $\quad a < r < b$

$$\oint_{\Sigma_2} \overline{E}_2 \cdot d\overline{S} = \frac{q_2}{\varepsilon_0} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0} \quad E_2 4\pi r^2 = \frac{Q_0}{\varepsilon_0} \Rightarrow E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_0}{r^2}$$

Si ha allora

$$V(P_2) - V(P_1) = -\left\{\int_{R_1 = a/2}^{a} \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 a^3} r\,dr + \int_a^b \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dr}{r^2}\right\} =$$

$$= -\left\{\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 a^3}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{a/2}^{a} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_a^b\right\} =$$

$$= -\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{11}{8a} - \frac{1}{b}\right) \quad \left(\begin{array}{l}\text{Si ha } V(P_2) - V(P_1) < 0 \\ \text{poiché } \frac{11}{8a} > \frac{1}{b}\end{array}\right)$$

Il punto P_1 è a potenziale più alto di quello di P_2

3) L'involucro sferico ha una carica totale $3Q_0$. Il campo E_3 è, come già detto, nullo.

Considerando una gaussiana Σ_3 con $b < r < c$ si ha:

$$\oint_{\Sigma_3} \overline{E} \cdot d\overline{S} = \frac{q_{tot}}{\varepsilon_0} = 0$$ dove q_{tot} è la carica totale interna a Σ_3

$q_{tot} = 0 = Q_0 + Q_i \Rightarrow Q_i = -Q_0$ carica presente sulla superficie interna dell'involucro (carica di induzione)

Dovendo essere $Q_{totale}(3) = 3Q_0$ si avrà pertanto

$Q_e = 4Q_0$ poiché $Q_{totale}(3) = Q_i + Q_e = -Q_0 + Q_e = 3Q_0$

La densità superficiale (sulla superficie esterna dell'involucro sferico) vale pertanto

$$\sigma \equiv \sigma_e = \frac{Q_e}{4\pi c^2} = \frac{4Q_0}{4\pi c^2} = \frac{Q_0}{\pi c^2}$$