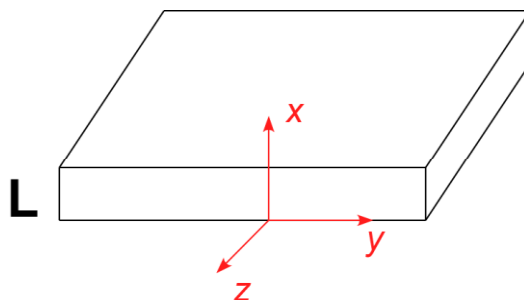


Problema N°. 11

Una piastra isolante, piana e infinita avente spessore L (vedi figura), contiene una carica distribuita con densità volumetrica $\rho = A x^2$, per $0 < x < L$.
La carica è nulla altrove (cioè fuori dalla piastra).



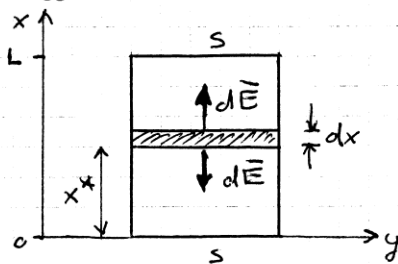
Determinare il campo elettrico all'interno della piastra.

Soluzione

Consideriamo un cilindro avente altezza L , sezione S , con la base inferiore alla quota $x=0$ e quella superiore ad $x=L$.

Si consideri poi una porzione di tale cilindro avente spessore dx , ad una quota x^* . Il volume di tale porzione (cilindretto infinitesimo) sarà $dV = S dx$.

La carica in esso contenuta è $dq = \rho dV = ASx^2 dx$



Tale carica produce un campo infinitesimo $d\vec{E}$ sia al di sopra che al di sotto dello spessore dx ottenibile dalla relazione che si è ricavata per il piano carico

con densità superficiale σ uniforme ($E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$)

Al nostro cilindretto è associabile una densità superficiale (equivalente) $d\sigma = \frac{dq}{S} = Ax^2 dx$. Pertanto si avrà

$$dE = \frac{A x^2 dx}{2\epsilon_0}$$

Se considero ora tutti gli spessori dx per $0 < x < x^*$ avrò tanti $d\vec{E}$ attraverso la faccia superiore del cilindretto (area mm) che contribuiscono al campo $E(x^*)$ per una quantità complessiva data da, in modulo:

$$E'(x^*) = \int_0^{x^*} \frac{A}{2\epsilon_0} x^2 dx = \frac{A}{2\epsilon_0} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{x^*} = \frac{A}{6\epsilon_0} x^{*3}$$

(Tale campo è diretto nel verso $+x$)

Se considero ora tutti gli spessori dx per $x^* < x < L$ avrò anche tanti $d\vec{E}$ attraverso la faccia superiore del cilindretto (area mm), diretti verso il basso, che contribuiscono

al campo $E(x^*)$ per una quantità complessiva data da, in modulo:

$$E''(x^*) = \int_{x^*}^L \frac{A}{2\epsilon_0} x^2 dx = \frac{A}{2\epsilon_0} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{x^*}^L = \frac{A}{6\epsilon_0} (L^3 - x^{*3})$$

(tale campo è diretto nel verso $-x$)

Il campo totale alla quota, generica, x^* è quindi:

$$E(x^*) = E'(x^*) - E''(x^*) = \frac{A}{6\epsilon_0} (2x^{*3} - L^3)$$

o anche, usando x anziché x^* :

$$E(x) = \frac{A}{6\epsilon_0} (2x^3 - L^3)$$

Si ha poi:

1) $E(x=0) = - \frac{A}{6\epsilon_0} L^3$ (campo sulla superficie inferiore della piastra)
(è diretto nel verso $-x$)

2) $E(x=L) = \frac{A}{6\epsilon_0} L^3$ (campo sulla superficie superiore della piastra)
(è diretto nel verso $+x$)