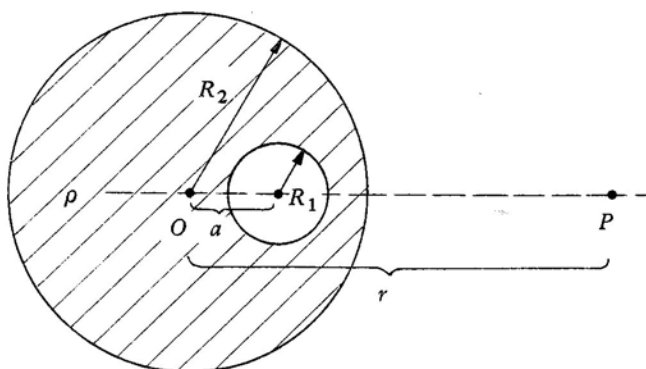


Problema N°. 13

Esercizio n. I.2.7 - Si consideri una sfera di raggio R_2 contenente cariche uniformemente distribuite con densità volumica ρ eccetto che in una cavità, priva di cariche, anch'essa sferica di raggio R_1 , ma non concentrica con la sfera maggiore. I centri delle due sfere distano di a ($< R_2 - R_1$). Si vogliono conoscere campo elettrico e potenziale in un punto P dell'asse congiungente i due centri a distanza $r > R_2$ dall'origine O .



Soluzione - Questo problema si può nominalmente risolvere con un calcolo diretto considerando i contributi, ad esempio al potenziale, in P provenienti da tutte le cariche elementari $dq = \rho dV$ contenute nei diversi elementi di volume che costituiscono il sistema; si avrebbe

$$V_P = \int_{\text{volume occupato dalle cariche}} \frac{\rho dV}{4\pi\epsilon_0 l}$$

in cui l è la distanza tra il generico elemento di volume dV e il punto P . Lascio però al lettore fantasioso di immaginare le complicazioni matematiche del calcolo connesse col fatto che l'integrale è triplo, l'espressione esplicita di l piuttosto complicata e le superfici limite sono quelle di due sfere non concentriche...

Esiste tuttavia un modo molto più semplice ed "elegante" per arrivare alla soluzione: si tratta dell'applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti.

Il sistema fisico considerato può infatti esser pensato come una sfera interamente carica con densità ρ cui siano state sottratte le cariche in corrispondenza della cavità di raggio R_1 . Conseguentemente anche campo e potenziale in ogni punto dello spazio possono considerarsi come la differenza tra quelli generati dalla sfera "piena" e quelli della sfera asportata.

Ora, nel caso della sfera "piena", questa, per la legge di Gauss, genererebbe in P rispettivamente

$$\vec{E}_{1P} = \frac{\rho \frac{4\pi}{3} R_2^3}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r = \frac{\rho R_2^3}{3\epsilon_0 r^2} \hat{u}_r$$

in cui $\hat{u}_r$ è il versore radiale, coincidente in direzione, in questo caso, con la congiungente i centri, e per il potenziale

$$V_{1P} = \frac{\rho \frac{4\pi}{3} R_2^3}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho R_2^3}{3\epsilon_0 r} \quad (\text{potenziale nullo all'}\infty)$$

Per quanto riguarda la sfera mancante, questa genererebbe in P

$$\bar{E}_{2P} = \frac{\rho \frac{4\pi}{3} R_1^3}{4\pi\epsilon_0 (r-a)^2} \hat{u}_r = \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0 (r-a)^2} \hat{u}_r$$

$$V_{2P} = \frac{\rho \frac{4\pi}{3} R_1^3}{4\pi\epsilon_0 (r-a)} = \frac{\rho R_1^3}{3\epsilon_0 (r-a)}.$$

Per ottenere il risultato finale è sufficiente ora sottrarre gli ultimi valori dai precedenti, osservando che, nel caso particolare, i due campi elettrici risultano paralleli e pertanto la differenza vettoriale si riduce di fatto ad una differenza ordinaria. In definitiva campo e potenziale in P sono:

$$\bar{E}_P = \bar{E}_{1P} - \bar{E}_{2P} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left[\frac{R_2^3}{r^2} - \frac{R_1^3}{(r-a)^2} \right] \hat{u}_r$$

$$V_P = V_{1P} - V_{2P} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{R_2^3}{r} - \frac{R_1^3}{r-a} \right).$$