

Problema N°. 14

Due sfere metalliche molto distanti tra loro, hanno raggi r_1 ed r_2 e portano, rispettivamente, le cariche q_1 e q_2 .

Le si unisce successivamente tramite un lungo filo sottile, conduttore, il cui solo effetto è di portarle al potenziale V . In seguito il filo viene rimosso.

Determinare V e le cariche q'_1 e q'_2 assunte ora dalle due sfere.

Si assumano i seguenti valori numerici: $r_1 = 2 \text{ cm}$; $r_2 = 3 \text{ cm}$; $q_1 = 1.4 \text{ nC}$; $q_2 = 5 \text{ nC}$.

Soluzione

Considero le due sfere isolate (sono in effetti molto lontane).
La capacità di ciascuna è data dalla $C = 4\pi\epsilon_0 r$. Pertanto:

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0 r_1 ; \quad C_2 = 4\pi\epsilon_0 r_2 . \quad \text{I rispettivi potenziali sono:}$$

$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} \quad \text{e} \quad V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} \quad \begin{cases} V_1 = 630 \text{ V} \\ V_2 = 1500 \text{ V} \end{cases}$$

(Sarà, generalmente, $V_1 \neq V_2$)

Quando le collego tramite il filo conduttore si avrà:

$$V_1' = V_2' = V \quad (\text{un unico conduttore è equipotenziale}).$$

Inoltre, per il principio di conservazione della carica si avrà:

$$q_1' + q_2' = q_1 + q_2$$

$$\text{Poiché } V_1' = V = \frac{q_1'}{C_1} \quad \text{e} \quad V_2' = V = \frac{q_2'}{C_2}$$

(si ricordi che la C non dipende dalla carica presente sulla sfera, né dal potenziale!)

$$\text{Si ha allora } q_1' = 4\pi\epsilon_0 r_1 V ; \quad q_2' = 4\pi\epsilon_0 r_2 V$$

Quindi

$$4\pi\epsilon_0 r_1 V + 4\pi\epsilon_0 r_2 V = q_1 + q_2 \quad \Rightarrow$$
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + q_2}{r_1 + r_2} = 9 \times 10^9 \times \frac{6.4 \times 10^{-9}}{5 \times 10^{-2}} = 1152 \text{ V}$$

Si ha poi:

$$q_1' = 4\pi\epsilon_0 r_1 V = \frac{r_1}{r_1 + r_2} (q_1 + q_2) = 2.56 \text{ nC}$$

$$q_2' = 4\pi\epsilon_0 r_2 V = \frac{r_2}{r_1 + r_2} (q_1 + q_2) = 3.84 \text{ nC}$$