

Problema N° 21

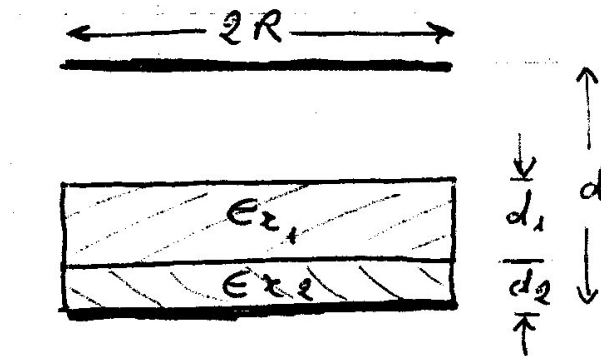
Un condensatore piano ha le armature circolari di raggio R , poste a distanza d . Tra le armature, parallelamente ad esse, si trovano due lastre dielettriche, di costante elettrica relativa ϵ_{r1} ed ϵ_{r2} , rispettivamente di spessori d_1 e d_2 tali che $d_1 + d_2 < d$.

1. Si calcoli la capacità C del condensatore, ignorando gli effetti ai bordi.

Il condensatore viene quindi caricato mediante una batteria avente una forza elettromotrice pari a ΔV e poi isolato. Determinare:

2. L'energia immagazzinata nel condensatore;
3. Il campo elettrico nelle tre regioni (omogenee) interne al condensatore: vuoto, dielettrico 1 e dielettrico 2;
4. Il lavoro che si deve compiere per estrarre dalle armature la lastra del dielettrico 1 e quello per estrarre entrambe le lastre.

Soluzione



Soluzione

- 1) la superficie delle armature è $S = \pi R^2$

Il sistema equivale a tre condensatori in serie, aventi le capacità date da $C_i = \epsilon_i \frac{S}{d_i}$ con $\epsilon_i = \epsilon_0 \epsilon_{r,i}$.

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{S}{d - (d_1 + d_2)} \quad C_1 = \epsilon_{r,1} \epsilon_0 \frac{S}{d_1} \quad C_2 = \epsilon_{r,2} \epsilon_0 \frac{S}{d_2}$$

Si ha quindi $\frac{1}{C_t} = \frac{1}{C_0} + \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{C_1 C_2 + C_0 C_2 + C_0 C_1}{C_0 C_1 C_2}$

$$C_t = \frac{C_0 C_1 C_2}{C_1 C_2 + C_0 C_1 + C_0 C_2}$$

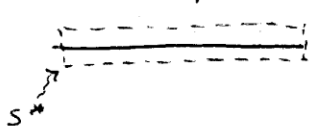
- 2) l'energia immagazzinata è calcolabile con la $U = \frac{1}{2} C V^2$.

Si ha in questo caso:

$$U = \frac{1}{2} C_t (\Delta V)^2$$

- 3) Data la geometria del sistema, le linee del campo $\vec{E}$ sono perpendicolari alle armature (lo stesso dicasi per $\vec{D}$ e $\vec{P}$, dove esiste)

Se considero una superficie gaussiana (cilindrica) che abbraccia l'armatura superiore posso scrivere il teorema di Gauss relativo ad essa:

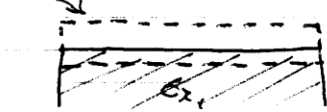


$$\int_{S^*} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

dove q è la carica totale racchiusa da S^* , che vale $q = C_t \Delta V$ (condens. in serie)

In questo caso: $E_0 S = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{C_t \Delta V}{\epsilon_0} \Rightarrow E_0 = \frac{C_t \Delta V}{\epsilon_0 S}$

Per determinare il campo nel dielettrico 1 (ed in quello 2) considero un'altra superficie gaussiana S_1^*



Perché non è nota la carica presente all'interno di S_1^* (carica di polarizzazione) considero, anziché il campo E , il campo D che è legato alle sole cariche libere e per il quale vale la condizione di continuità della componente $\perp$ alla superficie del dielettrico

Si ha $\int_{S_1^*} \vec{D} \cdot \vec{n} dS = q_{libera}$

Nel nostro caso $\int_{S_1^*} \vec{D} \cdot \vec{n} dS = 0 \Rightarrow D_{0n} - D_{1n} = 0 \Rightarrow D_{0n} = D_{1n}$

Ma $D_{0n} \equiv D_0$

$D_{1n} \equiv D_1$

ed inoltre $D_0 = \epsilon_0 E_0 = \frac{C_t \Delta V}{S}$

$D_1 = \epsilon_1 E_1 \Rightarrow E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_1} = \frac{D_0}{\epsilon_0 \epsilon_{r1}}$

per tanto

$E_1 = \frac{C_t \Delta V}{\epsilon_0 \epsilon_{r1} S}$

Analogamente $E_2 = \frac{C_t \Delta V}{\epsilon_0 \epsilon_{r2} S}$

(perché $D_1 = D_2 = D_0$)

4) Quando si estrae la 1^a lastra la capacità del condensatore

diviene $\frac{1}{C_t'} = \frac{1}{C_0'} + \frac{1}{C_2}$ dove $C_0' = \epsilon_0 \frac{S}{(d-d_2)}$

Essendo il condensatore isolato, la carica sull'armatura resta inalterata. Essa era

$q = C_t \Delta V$

e l'energia immagazzinata in C_t' è $U' = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_t'} = \frac{1}{2} \frac{C_t^2 (\Delta V)^2}{C_t'}$

Il lavoro fatto è $L' = U' - U = \frac{1}{2} \left[\frac{C_t^2 (\Delta V)^2}{C_t'} - C_t (\Delta V)^2 \right]$

Quando si estrae anche la 2^a lastra la capacità del condensatore

diviene $C_t'' = \epsilon_0 \frac{S}{d}$ e l'energia $U'' = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_t''} = \frac{1}{2} \frac{C_t^2 (\Delta V)^2}{C_t''}$

e $L'' = U'' - U = \frac{1}{2} \left[\frac{C_t^2 (\Delta V)^2}{C_t''} - C_t (\Delta V)^2 \right]$ Lavoro per estrarre entrambe le lastre