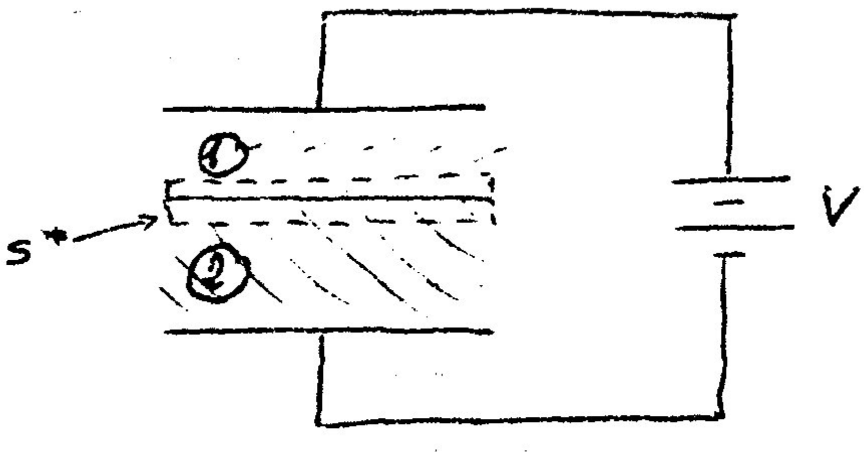
Problema N°. 22

Il dielettrico di un condensatore piano è costituito da due strati che hanno rispettivamente gli spessori d_1 e d_2, le costanti dielettriche ε_1 ed ε_2 e le conducibilità σ_1 e σ_2 . Alle armature del condensatore è collegata una batteria avente una forza elettromotrice V.

In tali condizioni, e trascurando l'effetto dei bordi, determinare:

1. Le intensità del campo elettrico E_1 ed E_2 nei due strati;
2. Gli spostamenti elettrici D_1 e D_2 nei due strati;
3. La densità superficiale di carica libera (non dovute cioè alle cariche di polarizzazione) alla superficie limite dei due strati;
4. La densità superficiale di carica totale alla superficie limite dei due strati.

N.B. : $\varepsilon_i = \varepsilon_{ri} \cdot \varepsilon_0$



Soluzione

Poiché i due dielettrici non sono ideali ma presentano una certa conducibilità essi lasciano passare corrente e si comportano come due resistenze in serie di valore dato dalla relazione

$$R = \rho \frac{l}{S} \equiv \frac{l}{\sigma S}$$

dove l = lunghezza del conduttore
S = sezione del conduttore
ρ = resistività specifica ($= \frac{1}{\sigma}$ con σ = conducibilità)

Pertanto

$$R_1 = \frac{d_1}{\sigma_1 S} \qquad R_2 = \frac{d_2}{\sigma_2 S} \qquad R_t = R_1 + R_2 = \frac{1}{S}\left(\frac{d_1}{\sigma_1} + \frac{d_2}{\sigma_2}\right) = \frac{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}{S \sigma_1 \sigma_2}$$

Si ha perciò $\quad i = \dfrac{\Delta V}{R_t} = \dfrac{V S \sigma_1 \sigma_2}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}$

e, ai capi dei due dielettrici si hanno le d.d.p.:

$$V_1 = R_1 i = \frac{V \cancel{S} \cancel{\sigma_1} \sigma_2}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1} \frac{d_1}{\cancel{\sigma_1} \cancel{S}} = \frac{V d_1 \sigma_2}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}$$

$$V_2 = R_2 i = \frac{V d_2 \sigma_1}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}$$

Dalla relazione $E = -\text{grad}\, V$ applicata alle due regioni occupate dai due dielettrici si ottiene:

$$E_1 = \frac{V_1}{d_1} = \frac{\sigma_2 V}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}$$

$$E_2 = \frac{V_2}{d_2} = \frac{\sigma_1 V}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}$$

e dalla $\quad D = \varepsilon E = \varepsilon_0 \varepsilon_r E$

$$D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r_1} E_1 = \varepsilon_1 E_1 = \frac{\varepsilon_1 \sigma_2 V}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}$$

$$D_2 = \varepsilon_2 E_2 = \frac{\varepsilon_2 \sigma_1 V}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}$$

Assumo ora la superficie gaussiana S^* indicata applico il teorema di Gauss al vettore $\bar{D}$:

$$\oint_{S^*} \bar{D}\cdot\bar{u}_n \, dS = q_{libera} = (D_1 - D_2)\, S \Longrightarrow \sigma_{lib} = \frac{q_{lib}}{S} = D_1 - D_2$$

pertanto $$\sigma_{lib} = \frac{(\varepsilon_1 \sigma_2 - \varepsilon_2 \sigma_1)\, V}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}$$

Considerando sempre la stessa superficie S^* ma applicando il teorema di Gauss al vettore $\bar{E}$:

$$\oint_{S^*} \bar{E}\cdot\bar{u}_n \, dS = q_{totale}/\varepsilon_0 = (E_1 - E_2)\, S \Longrightarrow \sigma_{totale} = \frac{q_{tot}}{S} = (E_1 - E_2)\, \varepsilon_0$$

pertanto $$\sigma_{tot} = \frac{(\sigma_2 - \sigma_1)\, V}{d_1 \sigma_2 + d_2 \sigma_1}\, \varepsilon_0$$