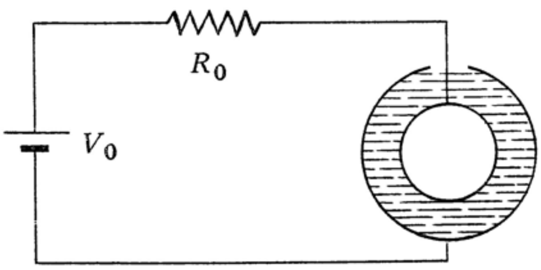
Problema N°. 23

Esercizio n. II.1.5 - Si consideri un sistema formato da un elettrodo sferico di raggio r_1 posto al centro di un recipiente, anch'esso, sferico e conduttore, di raggio interno r_2. Lo spazio tra i due elettrodi è riempito di un liquido di resistività ρ, molto alta ma non infinita, e di costante dielettrica ϵ. Quando il sistema è inserito nel circuito rappresentato in figura, quale è l'energia elettrostatica che vi è immagazzinata?



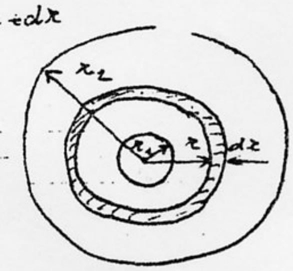
Soluzione

Poiché il sistema è un conduttore esso consentirà il passaggio di corrente i

Si ha: $$i = \frac{V_0}{R_0 + R}$$

dove R è la resistenza del sistema sferico

Per determinare la resistenza R si consideri uno strato di spessore infinitesimo $r \rightarrow r + dr$



La resistenza, infinitesima, di tale strato sarà

$$dR = \rho \frac{dr}{4\pi r^2}$$

per cui la resistenza totale R sarà ottenuta da:

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{dr}{4\pi r^2} = \frac{\rho}{4\pi} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{\rho}{4\pi}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{\rho}{4\pi}\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2}$$

La d. d. p. tra i due elettrodi verrà pertanto:

$$\Delta V = R i = \frac{V_0}{R_0 + R} R$$ ed è nota

Per determinare l'energia elettrostatica immagazzinata si può usare la relazione

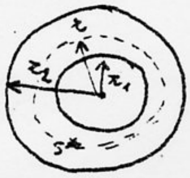
$$U = \frac{1}{2} C(\Delta V)^2$$

dove C è la capacità del condensatore sferico che vale

$$C = 4\pi\epsilon \frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1}$$

per cui $$U = \frac{1}{2} 4\pi\epsilon \frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1}\left[V_0 \frac{R}{R_0 + R}\right]^2$$

N.B. : Calcolo della capacità di un condensatore sferico



Applico alla superficie S^* il teorema di Gauss per il campo elettrico e chiamo q la carica sulle armature

$$\oint_{S^*} \bar{E} \cdot \bar{n}\, dS = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad E\, 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Dalla relazione $E = -\text{grad}\, V \implies \Delta V = -\int_{r_1}^{r_2} E\, dr = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}$

che fornisce $$\Delta V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_2 r_1}$$

e quindi $$C = \frac{q}{\Delta V} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1}$$

Naturalmente se tra le armature non c'è il vuoto la capacità è:

$$C = 4\pi\varepsilon \frac{r_2 r_1}{r_2 - r_1}$$