

Problema N°. 25

Quattro cariche, **positive**, puntiformi ed uguali (di valore $q = 1 \mu\text{C}$), sono mantenute ferme nei vertici (A, B, C, D) di un quadrato di lato $l = 1 \text{ m}$ che giace nel piano yz di figura.

- a) Qual è l'energia potenziale (elettrica) associata a tale disposizione di cariche ?

Una quinta carica **negativa** $q_5 = 10 \text{ nC}$, puntiforme ed avente massa $m = 2 \text{ g}$, è mantenuta ferma nel punto P dell'asse x, perpendicolare al piano yz e passante per il punto O di incontro delle due diagonali del quadrato. La distanza di P da O è di $\sqrt{2}/2 \text{ m}$.

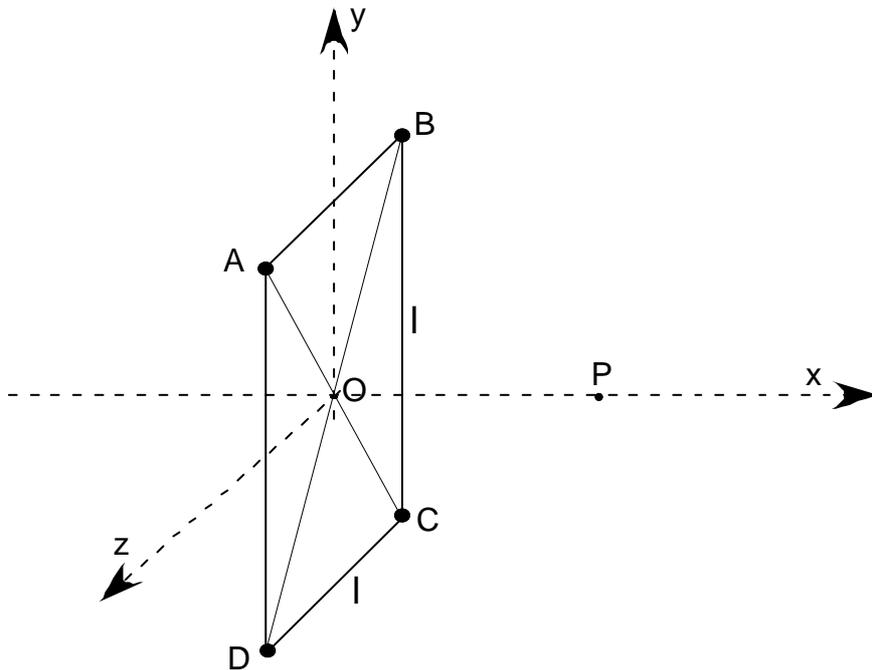
- b) Qual'è l'energia potenziale (elettrica) associata a tale nuova disposizione di cariche ? (Motivare la differenza rispetto alla configurazione di cui al punto a) precedente).
- c) Quanto vale il campo elettrico nel punto P ?
- d) Qual'è l'energia potenziale posseduta dalla carica q_5 ?

Si supponga ora di spostare la carica q_5 in un punto P_1 dell'asse x che dista 1 mm da O.

- e) Qual'è il lavoro del campo elettrico sulla carica q_5 durante tale spostamento ?

A questo punto la carica q_5 viene lasciata libera di muoversi.

- f) Si determini il periodo delle piccole oscillazioni che essa compie attorno al punto O.



Soluzioni

a) Per il sistema formato dalle quattro cariche ($K \approx 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$) l'energia potenziale totale U_p vale

$$U_{p_{totale}} = \sum_i \sum_{j \neq i} K \frac{q_i q_j}{r_{i,j}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i = Kq^2 \left(4 \frac{1}{\ell} + 2 \frac{1}{\sqrt{2} \ell} \right) = 4.87 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

b) Per il sistema formato dalle cinque cariche si avrà:

$$U_{p_{totale}}^* = U_{p_{totale}} + K \left(4 \cdot \frac{q_1 q_5}{r_{1,5}} \right) = 4.83 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

essendo $r_{1,5} = r_{2,5} = r_{3,5} = r_{4,5} = r = 1 \text{ m}$

Si ha $U_{p_{totale}}^* < U_{p_{totale}}$ perché la carica q_5 aggiunta è negativa

c) Il campo elettrico in P, dovuto alle quattro cariche positive, ha la direzione (ed il verso) dell'asse x (per la simmetria della disposizione delle cariche).

Si ha $PO=OA=OB=OC=OD = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

pertanto l'angolo OAP (=OBP=OCP=ODP= β) vale $\beta = \pi/4$ e:

$$E_{p_{totale}} = 4K \frac{q}{r^2} \sin \beta = 2.55 \cdot 10^4 \text{ V/m, con direzione e verso dell'asse x.}$$

d) L'energia potenziale della carica q_5 , nella posizione P vale:

$$U_{p_5} = q_5 V_P = q_5 \cdot 4 K \frac{q}{r} = 3.6 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

e) Posto $d=OA$, il campo elettrico nel punto P* generico dell'asse x, vale, in modulo:

$$E(x) = 4K \frac{q}{(x^2 + d^2)(x^2 + d^2)^{1/2}}$$

e la forza che esso esercita su q_5 vale: $F(x) = q_5 E(x)$, ed ha direzione x e verso -x.

Quando $x \ll d$ (piccole oscillazioni) si ha $F(x) = 4K \frac{qq_5}{d^3} x$

Scrivendo il secondo principio della dinamica, con riferimento alla direzione x del moto :

$$F_x = m a_x = -4K \frac{qq_5}{d^3} x$$

Si ottiene quindi l'equazione del moto armonico che fornisce il periodo delle piccole oscillazioni:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{md^3}{4Kqq_5}} = 8.8 \text{ s}$$