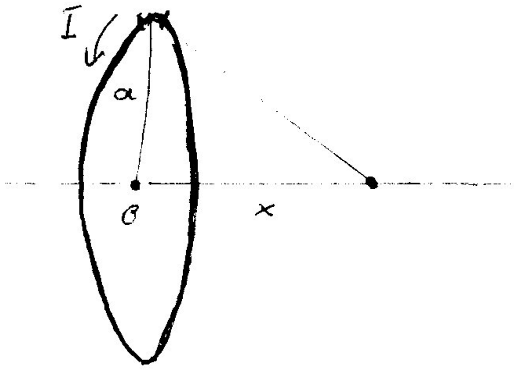
Problema N°. 29

Un dipolo magnetico di massa m e momento magnetico $\bar{\mu}$, posto inizialmente nel centro di una spira circolare di raggio a, percorsa da una corrente di intensità i, può muoversi solo lungo l'asse della spira stessa.
Sapendo che le dimensioni del dipolo magnetico sono trascurabili rispetto al raggio della spira, calcolare:

1. l'espressione del modulo F della forza esercitata dal campo magnetico sul dipolo, quando esso viene spostato (lungo l'asse della spira) dalla sua posizione di equilibrio in un punto P distante x da essa;
2. il periodo delle oscillazioni per piccoli spostamenti attorno alla posizione di equilibrio.
3. Determinare infine il lavoro che deve essere fatto dall'esterno per portare il dipolo dal punto P(x) sull'asse della spira al centro O della spira stessa.

Soluzione



Un dipolo magnetico avente momento di dipolo $\bar{\mu}$, in presenza di un campo magnetico $\bar{B}$ possiede un'energia potenziale U data da:

$$U = -\bar{\mu} \cdot \bar{B}$$

Nel caso in esame $\bar{B}$, nei punti dell'asse della spira ha la direzione dell'asse e vale, ad una distanza x dal centro della spira:

$$\bar{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+x^2)^{3/2}} \bar{u}_x$$

dove a è il raggio della spira percorsa dalla corrente I.

Pertanto $$U = -\bar{\mu} \cdot \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+x^2)^{3/2}} \bar{u}_x$$

In condizioni di equilibrio, ad una generica x, poiché U deve essere minima $\Rightarrow \bar{\mu} \cdot \bar{B} = max \Rightarrow \bar{\mu} \,//\, \bar{B}$ perché deve essere $\cos\varphi = 1$ (cioè $\varphi = 0$)

Se si spostasse il dipolo da tale posizione di equilibrio di una quantità dx lungo x, si compie un lavoro $dL = F dx$ e, di conseguenza varia l'energia potenziale del dipolo. Per la conservazione dell'energia del dipolo (considerato come sistema isolato) si avrà anche: $U + L =$ costante, cioè $d(U+L) = 0$

$$\Rightarrow dU = -dL = -F dx \Rightarrow F = -\frac{dU}{dx}$$

Essendo poi $U = -\dfrac{\mu \mu_0 I a^2}{2(a^2+x^2)^{3/2}}$ si ha

$$F = \frac{\mu \mu_0 I a^2}{2} \frac{d}{dx}(a^2+x^2)^{-3/2} = \frac{\mu\mu_0 I a^2}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)(a^2+x^2)^{-5/2}(2x) =$$

$$= -\frac{3}{2}\frac{\mu\mu_0 I a^2}{(a^2+x^2)^{5/2}} x \,.$$ Per $x << a \Rightarrow x^2 << a^2$ si ottiene

$$F = -\frac{3}{2}\frac{\mu\mu_0 I}{a^3} x$$ Ma $F_x = m\ddot{x} = -\dfrac{3}{2}\dfrac{\mu\mu_0 I}{a^3} x$

$$\ddot{x} + \frac{3}{2}\frac{\mu\mu_0 I}{m a^3} x = 0 \Rightarrow \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \qquad \omega = \sqrt{\frac{3}{2}\frac{\mu\mu_0 I}{m a^3}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2 m a^3}{3\mu\mu_0 I}}$$

Se volessi sapere il lavoro che si deve fare dall'esterno per portare il dipolo da $P(x)$ ad O si può usare la

$$L(x \to 0) = U(0) - U(x)$$

$$U(0) = -\mu B(0) = -\mu \frac{\mu_0 i}{2a}$$

$$U(x) = -\mu \frac{\mu_0 i a^2}{2(x^2+a^2)^{3/2}}$$

$$L\left(\overset{da}{x} \to \overset{ad}{0}\right) = -\frac{\mu\mu_0 i}{2a} + \frac{\mu\mu_0 i a^2}{2(x^2+a^2)^{3/2}} < 0$$

In particolare, se il punto P di partenza è all'infinito $(x \to \infty)$ si avrà:

$$L(\text{da } \infty \text{ a } 0) = -\frac{\mu\mu_0 i}{2a}$$

(In entrambi i casi, poiché si ottiene $L<0$ ciò significa che <u>non</u> si deve fare lavoro dall'esterno ma sono le forze del campo B a compiere lavoro. Il lavoro è cioè fatto dall'interno del sistema)