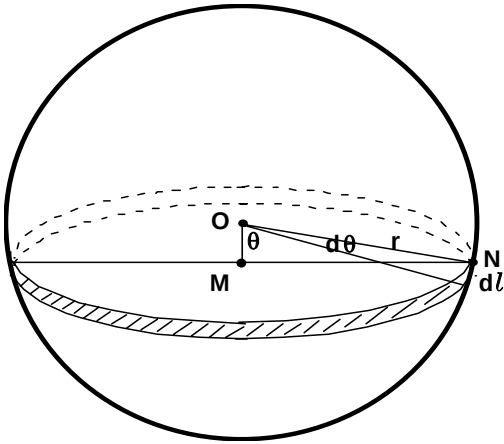


Problema N°. 35

Una sfera conduttrice cava, allontanata da altri conduttori, viene portata ad un potenziale $V = 10000$ Volt e fatta ruotare a velocità angolare ω costante di 6000 giri al minuto attorno ad un suo diametro. Calcolare l'intensità B del vettore induzione magnetica nel centro della sfera.

Suggerimento: chiamare con r il raggio della sfera (non noto) ed assumere che essa sia uniformemente carica con densità di carica superficiale pari a σ .

Soluzione



La carica Q presente sulla sfera conduttrice (di superficie $S = 4\pi r^2$) vale $Q = \sigma S = \sigma 4\pi r^2$

si ha $\overline{MN} = r \sin \theta$ e $dl = r d\theta$ (vedi figura)

l'area dS (tratteggiata in figura) vale:

$$dS = 2\pi \overline{MN} dl = 2\pi (r \sin \theta) (r d\theta) = 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$$

Su tale area si trova una carica, infinitesimale:

$$dq = \sigma dS = \sigma 2\pi r^2 \sin \theta d\theta$$

Quando la sfera ruota, con velocità angolare ω attorno ad un diametro, anche la carica dq si muove (ruota) e la sua velocità è $v = \omega \overline{MN} = \omega r \sin \theta$

Indicando con $T = \frac{2\pi}{\omega}$ il periodo di rotazione della sfera, la carica dq , che si muove con la velocità v , corrisponde

$$\text{ad una corrente } di = \frac{dq}{T} = \frac{\omega}{2\pi} dq = \sigma \omega r^2 \sin \theta d\theta$$

Tale corrente (corrispondente ad una spira circolare di raggio $\overline{MN}$) genera in O (distante $\overline{MO} = x$, sull'asse della spira) un vettore $\vec{B}$ ottenuto dalla relazione $\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} \vec{u}_x$ che fornisce, in questo caso:

$$\begin{aligned} |d\vec{B}| &= \frac{\mu_0 (r^2 \sin^2 \theta) (\sigma \omega r^2 \sin \theta d\theta)}{2 (\overline{MN}^2 + \overline{MO}^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 \sigma \omega r^4 \sin^3 \theta d\theta}{2 r^3} = \\ &= \frac{\mu_0 \sigma \omega r}{2} \sin^3 \theta d\theta \quad \left(\begin{array}{l} \text{la direzione è quella} \\ \text{dell'asse di rotazione } \overline{MO} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Il campo B totale è quindi, in intensità:

$$B = \int_0^\pi d\vec{B} = \frac{\mu_0 \sigma \omega r}{2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{2\mu_0 \sigma \omega r}{3}$$

Perché né σ né r sono noti occorre esprimere la relazione trovata in funzione di altri dati (noti).

Si ricorda che per un conduttore sferico si ha:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma S}{V} = \frac{\sigma 4\pi r^2}{V} = 4\pi \epsilon_0 r \quad (\text{capacità})$$

Pertanto $\frac{\sigma r}{V} = \epsilon_0 \Rightarrow \sigma r = \epsilon_0 V$ Quindi:

$$B = \frac{2}{3} \mu_0 \epsilon_0 \omega V$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta &= \int_0^\pi \sin^2 \theta \sin \theta d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \\ &= \int_0^\pi \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \left[-\cos \theta \right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos^2 \theta d(\cos \theta) = \\ &= [1 + 1] + \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi = 2 + \frac{1}{3}(-1 - 1) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$