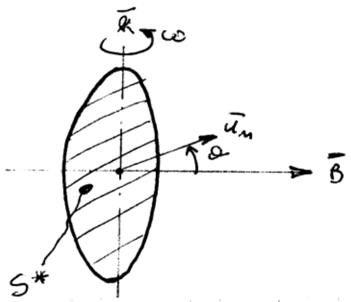
Problema N°. 36

Un anello conduttore viene fatto ruotare con velocità angolare ω costante attorno ad un suo diametro D. L'anello è immerso in un campo di induzione magnetica uniforme $\overline{B}$, perpendicolare all'asse di rotazione. Nell'istante in cui si inizia l'osservazione, il flusso di $\overline{B}$ attraverso l'anello è nullo. Calcolare:

1. L'espressione dell'intensità istantanea della corrente indotta nell'anello, sapendo che la sua resistenza vale R;
2. La potenza meccanica media richiesta alle forze esterne per mantenere l'anello in rotazione uniforme, nel caso in cui $D = 15$ cm; $R = 0.75\ \Omega$; $\omega = 450$ rad/s; $B = 0.75$ Wb/m^2

Si ricordi che : $\int_0^{2\pi/\omega} \cos^2\omega t\ dt = \frac{\pi}{\omega}$

Soluzione



1) Il flusso di $\overline{B}$ concatenato con l'anello è $\phi_B = \int_{S^*} \overline{B}\cdot d\overline{S}$

In questo caso, all'istante generico t, si ha:

$$\phi_B = B\cos\theta \int_{S^*} dS = B\cos\theta\,\frac{\pi D^2}{4} = B\,\frac{\pi D^2}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = $$
$$= \frac{\pi}{4} B D^2 \sin\omega t$$

in quanto $\theta = \omega t - \frac{\pi}{2}$ (dovendo essere $\phi(t=0) = 0$ si ha infatti per $t = 0 \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$ e $\cos\theta = 0$)

Per la legge di Faraday-Henry si ha

$$V_\varepsilon = -\frac{d\phi_B}{dt} \Rightarrow i = \frac{V_\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\phi_B}{dt} \quad \text{quindi}$$

$$i = -\frac{1}{R}\frac{\pi B D^2}{4}\omega\cos\omega t$$

2) All'anello, percorso da una corrente i, è associabile un momento di dipolo magnetico $\overline{m} = i S^* \overline{u}_n$, cioè

$$\overline{m} = \left(-\frac{\pi \omega B D^2}{4R} \cos \omega t\right) \frac{\pi D^2}{4} \overline{u}_n$$

L'interazione di $\overline{m}$ con il campo $\overline{B}$ origina un momento meccanico (che agisce sull'anello) dato da:

$\overline{M} = \overline{m} \times \overline{B}$ questo vettore ha la direzione dell'asse di rotazione $\overline{k}$ e vale, in modulo

$M = m B \sin \theta$ e, poiché $\sin \theta = \cos \omega t$:

$$M = \frac{\pi^2 \omega B^2 D^4}{16 R} \cos^2 \omega t$$

La potenza spesa per mantenere l'anello in rotazione con velocità angolare costante ω è data da

$W = \overline{M} \cdot \overline{\omega}$ dove $\overline{\omega}$ è un vettore di modulo ω e direzione coincidente con l'asse di rotazione

Si ottiene $W = \dfrac{\pi^2 \omega^2 B^2 D^4}{16 R} \cos^2 \omega t$ (potenza all'istante t)

La potenza media, calcolata sul periodo di rotazione $T = \frac{2\pi}{\omega}$ vale

$$W_m = \frac{1}{T} \int_0^T W\, dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^T \frac{\pi^2 \omega^2 B^2 D^4}{16 R} \cos^2 \omega t\, dt$$

$$= \frac{\omega}{2\pi} \frac{\pi^2 \omega^2 B^2 D^4}{16 R} \int_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t\, dt =$$

$$= \frac{\pi^2 \omega^2 B^2 D^4}{32 R} = 23{,}7 \text{ Watt}$$