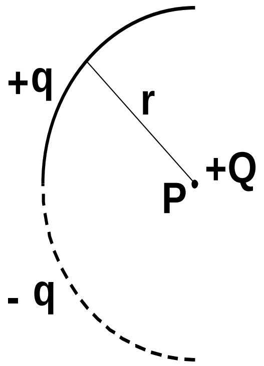
Problema N°. 4

Un filo sottile, rigido ed isolante, ha una forma semicircolare di raggio r.
Sulla metà superiore della semicirconferenza è distribuita uniformemente una carica +q mentre nella metà inferiore è distribuita, sempre uniformemente una carica –q.
Si determini quale forza deve essere applicata ad una carica puntiforme +Q perché essa possa restare in quiete nel centro P della semicirconferenza.
Si assuma q = 2 nC, Q = 1 μC, r = 5 cm.



Il problema può essere affrontato sia utilizzando la legge di Coulomb che il concetto di campo elettrico

Parte 1 : Vediamo l'utilizzo del concetto di campo elettrico

Sulla carica Q posta nel centro P agirà una forza dovuta all'interazione elettrica con il campo elettrico $\bar{E}$ che si produce in P per effetto della carica sulla semicirconferenza. Tale forza sarà:

$$\bar{F}_P = Q\,\bar{E}_P$$

Affinché la carica Q rimanga in quiete nel punto P, dovrà esserle applicata una forza (dall'esterno) uguale e contraria ad $\bar{F}_P$.
Trovo il campo elettrico esistente in P.
Considero la metà superiore della semicirconferenza dove è distribuita uniformemente la carica +q. Per ragioni di simmetria, il campo da essa generato in P sarà diretto secondo la bisettrice dell'angolo sotteso. Il modulo di tale campo (E_+) si otterrà sommando le componenti dei vari dE_+ parallele alla bisettrice stessa. Se si indica con dq_+ la carica infinitesima presente nell'elemento di semicirconferenza (parte superiore) dl si avrà, in modulo

$$dE_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dq_+$$

Si ha poi $dq_+ = \lambda_+ dl = \lambda_+ r\, d\theta$ dove $\lambda_+ = \dfrac{q_+}{\frac{2\pi r}{4}}$

Quindi
$$dE_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\frac{q_+}{\frac{\pi}{2}\cancel{r}}\,\cancel{r}\,d\theta$$

la componente di dE_+ // alla bisettrice vale $dE_{+//} = dE_+ \cos\theta$

Per ottenere E_+ si integra (sulla parte superiore della semicirconferenza):
$$E_+ = \int_{-\pi/4}^{+\pi/4} dE_+ \cos\theta = \frac{q_+}{2\pi^2\varepsilon_0 r^2}\int_{-\pi/4}^{+\pi/4}\cos\theta\, d\theta$$

Si ottiene quindi, essendo $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{+\pi/4}\cos\theta\, d\theta = \Big[\sin\theta\Big]_{-\pi/4}^{+\pi/4} = \sqrt{2}$

$$E_+ = \frac{q_+}{2\pi^2\varepsilon_0 r^2}\sqrt{2}$$ (Per direzione e verso si veda la figura: "uscente" dalla q_+)

Analogo risultato si ha (in modulo) per il campo prodotto dal quarto di circonferenza inferiore, sul quale si trova la carica q_-. Il campo $\overline{E}_-$ è però (vedi figura) "entrante" nella q_-

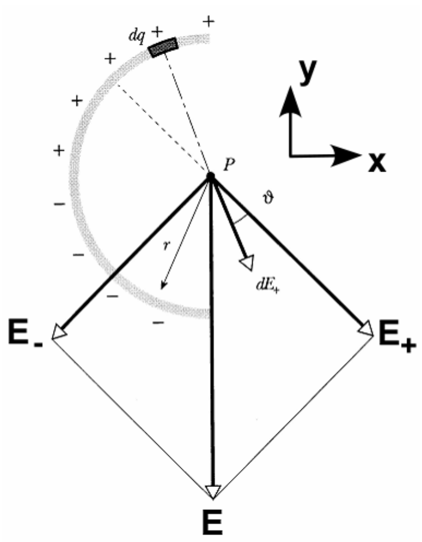
Il campo risultante in P è la somma vettoriale di $\overline{E}_+$ ed $\overline{E}_-$. Il modulo di $\overline{E}_P$ vale quindi

$$E_P = \sqrt{2}\, E_+ = \frac{q_+}{\pi^2\varepsilon_0 r^2} = \frac{2\times10^{-9}}{\pi^2\times 8{,}85\times10^{-12}\times(5\times10^{-2})^2} \simeq 9{,}16\times10^{3}\,\frac{V}{m}$$

(tale campo è verticale e diretto verso il basso, in figura)

Si ha quindi $F_P = 1\times10^{-6}\times 9{,}16\times10^{3} = 9{,}16\times10^{-3}\ N$

La forza che deve essere applicata a Q perché essa resti in quiete nel punto P vale $9{,}16\times10^{-3}\ N$ in modulo, deve essere diretta come l'asse y e con verso +y (in figura)



Parte 2 : Vediamo l'utilizzo della legge di Coulomb

Tra la carica elementare dq_+ e la carica $+Q$ si esercita una forza elementare di modulo $dF_+ = \frac{Q_+ dq_+}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ che, utilizzando quanto già visto, diventa

$$dF_+ = \frac{Q\lambda\, dl}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = Q\frac{2q_+}{\pi r}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, r\, d\theta = \frac{Q q_+}{2\pi^2\varepsilon_0 r^2}\, d\theta$$

E, seguendo un ragionamento simile a quello fatto per E_+:

$$F_+ = \frac{Q q_+}{2\pi^2\varepsilon_0 r^2}\int_{-\pi/4}^{+\pi/4}\cos\theta\, d\theta = \frac{Q q_+}{2\pi^2\varepsilon_0 r^2}\sqrt{2}$$

Per ottenere poi la forza complessiva F_P si ha:

$$F_P = \sqrt{2}\, F_+ = \left(\frac{Q q_+}{2\pi^2\varepsilon_0 r^2}\sqrt{2}\right)\sqrt{2} = \frac{Q q_+}{\pi^2\varepsilon_0 r^2} = 9.16\times 10^{-3}\ N$$

Si vede chiaramente che si giunge allo stesso risultato