

Problema N. 40

Una spira rettangolare conduttrice, di lati 2ℓ ed ℓ ($\ell = 20$ cm) è divisa in due parti uguali (vedi figura) da un conduttore MN, costituito dallo stesso tipo di materiale della spira. Tale materiale ha una resistenza per unità di lunghezza di 10^{-2} Ω/cm .

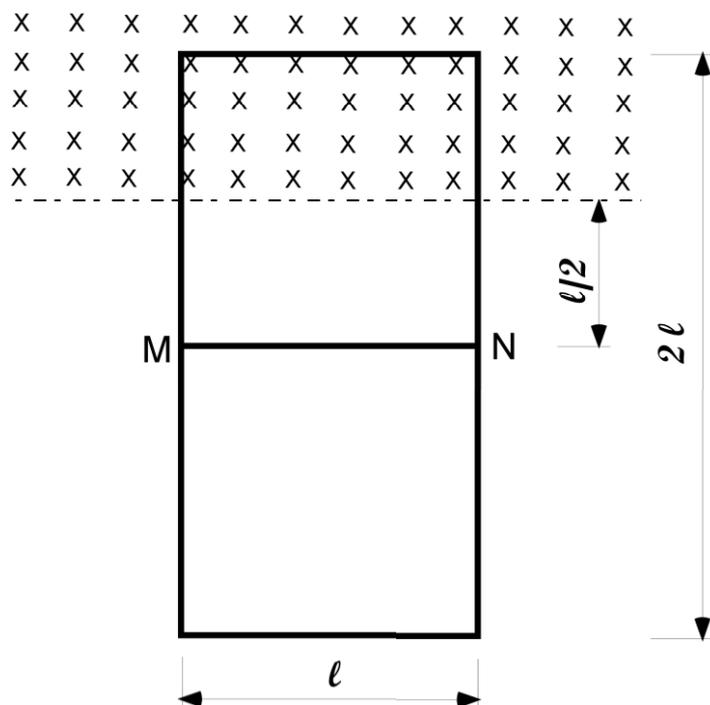
La spira è immersa, per un quarto della sua superficie, in un campo magnetico \mathbf{B} uniforme, perpendicolare al piano della spira, entrante rispetto al piano di figura, e di intensità variabile col tempo secondo la legge $B = B_0 + kt^2$, dove t è il tempo e $B_0 = 2$ Wb/m^2 e $k = 0.3$ $\text{Wb}/(\text{m}^2 \text{s}^2)$. Il campo magnetico è nullo nei restanti $3/4$ della superficie della spira.

Si determini, all'istante $t = t^* = 10$ s :

- il flusso concatenato con la spira;
- la forza elettromotrice indotta nel circuito;
- la corrente che percorre il conduttore MN (intensità e verso).

Si determini inoltre:

- l'energia dissipata per effetto Joule su tutto il circuito, dall'istante $t=0$ all'istante t^* .



Soluzione

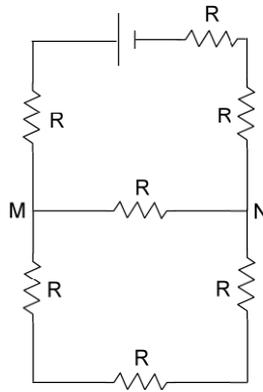
- 1) dalla definizione di flusso di \mathbf{B} , poiché il campo è perpendicolare al foglio, assumendo, ad esempio, come verso positivo della normale quello entrante, si ha

$$\Phi = B (\ell^2 / 2) \rightarrow \Phi(10 \text{ s}) = 0.64 \text{ Wb}$$

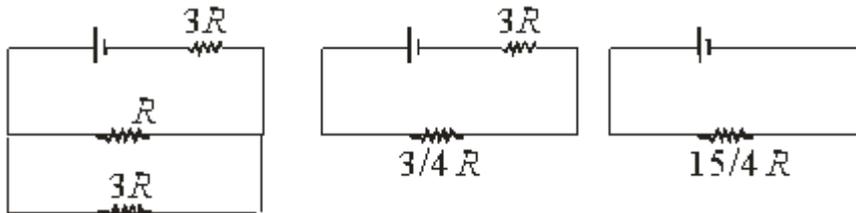
- 2) Si ha , per la legge di Faraday-Lenz :

$$|V_i| = \frac{d}{dt} \left[(B_0 + kt^2) \frac{\ell^2}{2} \right] = 2kt \cdot \frac{\ell^2}{2} = 2 \cdot 0,3 \cdot 10^{-2} \cdot 2 \cdot 10^{-2} = 0,12 \text{ V}$$

- 3) Il sistema è schematizzabile con il seguente circuito elettrico:



che può essere semplificato come segue:



Il valore di ognuna delle resistenze è $R = 10^{-2} \ell = 0.2 \Omega$.

La resistenza totale (o equivalente) vale $R_{\text{tot}} = 0.75 \Omega$.

Il valore della f.e.m. è $|V_i|$.

La corrente erogata dalla f.e.m. risulta essere $i_{\text{tot}} = V_i / R_{\text{tot}} = [k \ell^2 t] / (R 15/4)$

Si ottiene pertanto $i_{\text{tot}}(10 \text{ s}) = 0.16 \text{ A}$

$$V_{\text{MN}}(10 \text{ s}) = \frac{3}{4} R \times i_{\text{tot}} = 0.024 \text{ V}$$

$$i_{\text{MN}}(t) = [k \ell^2 t] / (5 R)$$

$$i_{\text{MN}}(10 \text{ s}) = V_{\text{MN}} / R = 0.12 \text{ A}$$

Il verso della corrente è da M ad N (perché il campo B dovuto alla corrente indotta deve essere uscente dal foglio, per la legge di Lenz).

- 4) L'energia dissipata per effetto joule dall'intero sistema nei primi 10 secondi del fenomeno si ottiene integrando (tra $t = 0$ e $t = t^*$) la relazione : $dW_J = R_{\text{tot}} i_{\text{tot}}^2(t) dt$. Si ottiene

$$W_J = \int_0^{t^*} R_{\text{tot}} i_{\text{tot}}^2 dt = 0,75 \cdot 0,016^2 \int_0^{t^*} t^2 dt = 0,012 \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{t^*} = 1,92 \cdot 10^{-4} \cdot 333 = 0,064 \text{ J}$$