Problema N°. 6

Sopra una superficie piana *S* disposta verticalmente è distribuita una carica elettrica positiva con densità $\sigma = 10\ \mu\text{C/m}^2$.

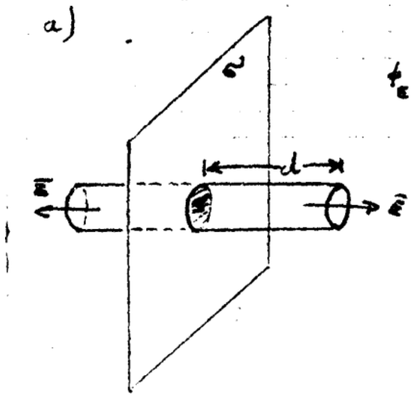
a) Si calcoli il campo elettrico $\overline{E}$ ad una distanza *d* da *S*, piccola rispetto alle dimensioni lineari della superficie.

b) Una piccola sfera, di massa $m = 1\ g$ e carica *q*, è fissata ad un filo non conduttore, di lunghezza ℓ ed avente l'altra estremità vincolata alla superficie *S*, nel punto *O*. In condizioni di equilibrio il filo forma con *S* un angolo $\alpha_0 = \pi/6$ radianti . Determinare il valore di *q*.

c) Supponiamo ora di spostare la sferetta, rispetto alla sua posizione di equilibrio, di una piccola quantità lungo la circonferenza avente centro O e raggio pari ad ℓ.Determinare il periodo delle piccole oscillazioni della sferetta attorno alla sua posizione di equilibrio se $\ell = 50$ cm.

Soluzione

a)



Preso un cilindretto retto di sezione S (a cavallo del piano)

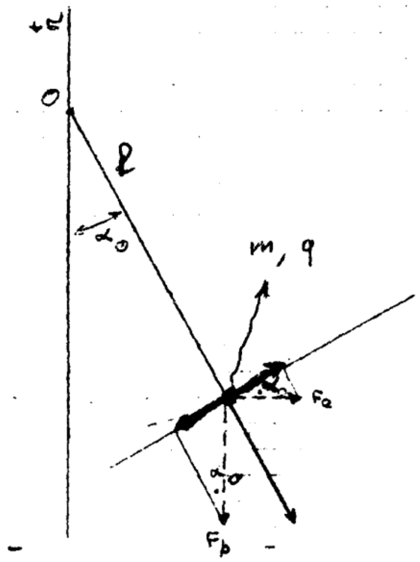
$$\phi_E = \oint_S \bar{E} \cdot \bar{u}_n \, dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E \oint_S dS = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$E\, 2\cancel{S} = \frac{\sigma \cancel{S}}{\epsilon_0} \qquad E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = 5.7 \times 10^5 \ \text{V/m}$$

(indipendente da d)

b)



Perché si abbia equilibrio deve essere

$$F_e \cos\alpha_0 = F_p \sin\alpha_0$$

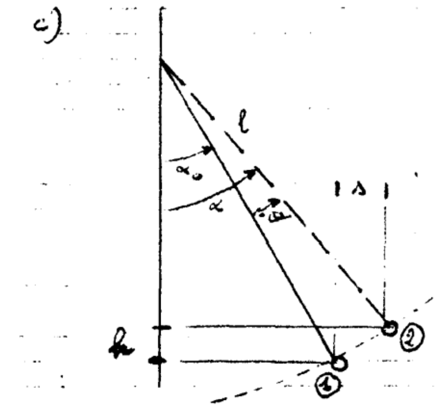
ma $F_e = q E = \dfrac{\sigma q}{2\epsilon_0}$

$$F_p = mg \qquad qE = mg \frac{\sin\alpha_0}{\cos\alpha_0}$$

$$\frac{\sigma q}{2\epsilon_0} \cos\alpha_0 = mg \sin\alpha_0$$

$$q = 2\epsilon_0 m g \frac{tg\,\alpha_0}{\sigma} = 10^{-8}\ \text{C}$$

c)



supponiamo di calcolare l'energia potenziale totale in ② (supposta nulla quella nel punto ① di equilibrio)

$$U_{peso} = mgh = mgl[\cos\alpha_0 - \cos(\alpha_0+\theta)] =$$
$$= mgl[\cos\alpha_0 - (\cos\alpha_0\cos\theta - \sin\alpha_0\sin\theta)] =$$
$$= mgl[\cos\alpha_0(1-\cos\theta) + \sin\alpha_0\sin\theta]$$

$$U_{elettr} = qEs = qEl[\sin\alpha_0 - \sin(\alpha_0+\theta)] =$$
$$= qEl[\sin\alpha_0 - (\sin\alpha_0\cos\theta + \sin\theta\cos\alpha_0)] =$$
$$= qEl[\sin\alpha_0(1-\cos\theta) - \sin\theta\cos\alpha_0]$$

ma $qE = mg\dfrac{\sin\alpha_0}{\cos\alpha_0} \Rightarrow E_p = U_p + U_e = mgl\dfrac{1-\cos\theta}{\cos\alpha_0}$

Quest'ultima è ottenuta come descritto nel seguito:

$$E_p = mgl\left\{\cos\alpha_0 - \cos\alpha_0\cos\theta + \cancel{\sin\alpha_0\sin\theta} + \frac{\sin^2\alpha_0}{\cos\alpha_0} - \frac{\sin^2\alpha_0}{\cos\alpha_0}\cos\theta - \cancel{\frac{\sin\alpha_0\cos\alpha_0\sin\theta}{\cos\alpha_0}}\right\} =$$
$$= mgl\left\{\cos\alpha_0(1-\cos\theta) + \frac{\sin^2\alpha_0}{\cos\alpha_0}(1-\cos\theta)\right\} =$$
$$= mgl\left\{(1-\cos\theta)\left(\cos\alpha_0 + \frac{\sin^2\alpha_0}{\cos\alpha_0}\right)\right\} = mgl\left\{(1-\cos\theta)\frac{\cos^2\alpha_0+\sin^2\alpha_0}{\cos\alpha_0}\right\}$$

Quindi:

L'energia cinetica della sferetta è $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega l)^2 = \frac{1}{2}m\left(l\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 =$
$$= \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2\left[\frac{d}{dt}(\alpha_0+\theta)\right]^2 =$$
$$= \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Poiché $E_c + E_p = cost \Rightarrow \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mlg\dfrac{1-\cos\theta}{\cos\alpha_0} = cost$

$$\frac{1}{2}l\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + g\frac{1-\cos\theta}{\cos\alpha_0} = cost_2$$

$$\frac{1}{\cancel{2}}l\cancel{2}\cancel{\frac{d\theta}{dt}}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\cos\alpha_0}\sin\theta\cancel{\frac{d\theta}{dt}} = 0$$

per piccole oscillazioni $\sin\theta \simeq \theta$

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\cos\alpha_0}\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l\cos\alpha_0}\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + K\theta = 0$$

$$K = \omega^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{l\cos\alpha_0} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{l\cos\alpha_0}{g}} = 1,3\ s$$