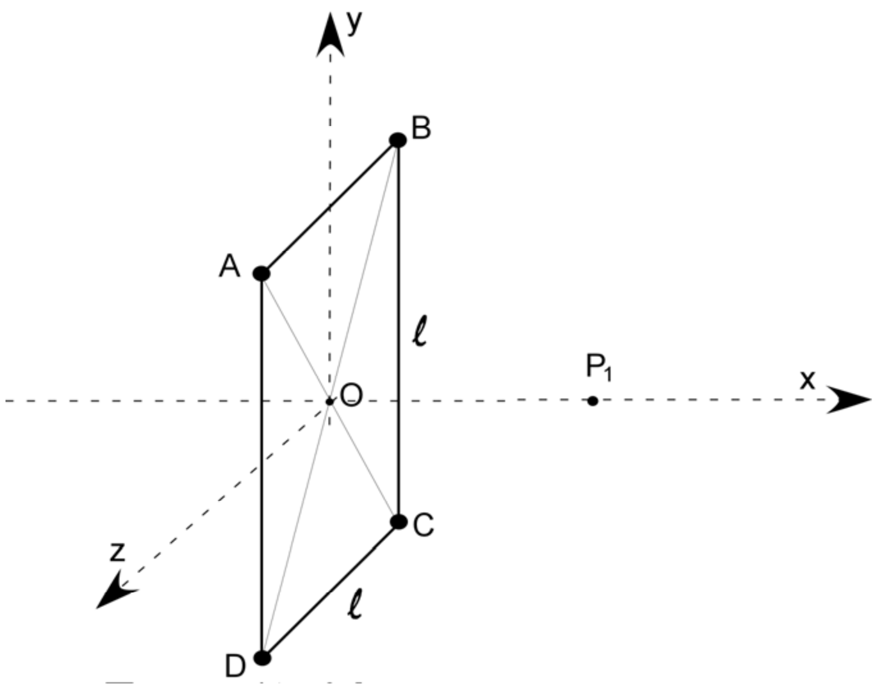
Problema N°. 7

Quattro cariche, **positive**, puntiformi ed uguali (di valore q = 1 μC) , sono mantenute ferme nei vertici (A, B, C, D) di un quadrato di lato ℓ = 1 m che giace nel piano [*yz*] di figura (l'asse *x* è perpendicolare al piano [*yz*] e l'origine O è nel punto di incontro delle due diagonali del quadrato).

a) Determinare il potenziale ed il campo elettrico nel punto P_1 dell'asse *x* di ascissa $x(P_1) = \sqrt{2}/2$ m.

Una quinta carica **negativa** q_5 = 10 nC, puntiforme ed avente massa m = 2 g, viene quindi posta, ferma, nel punto P_2 dell'asse *x* di ascissa $x(P_2)$ = 1 mm e viene successivamente lasciata libera di muoversi.

b) Si determini il periodo delle piccole oscillazioni che essa compie attorno al punto O.



Soluzioni

a1) Potenziale prodotto dalle quattro cariche nel punto P_1

Si ha $\overline{OB} = \overline{OA} = \overline{OC} = \overline{OD} = \frac{\sqrt{2}}{2} l = \frac{\sqrt{2}}{2}$ m

Inoltre $\overline{AP_1} = \overline{BP_1} = \overline{CP_1} = \overline{DP_1} = \sqrt{\overline{OP_1}^2 + \overline{OB}^2} = 1$ m

Il potenziale in P_1 dovuto alle quattro cariche puntiformi vale $V(P_1) = \sum_{1}^{4}{}_i \, V_i(P_1) = 4 \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_i}{r}$

dove $r = \overline{AP_1} = 1$ m

Sapendo poi che $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = K \simeq 9 \times 10^9$ N m^2 C^{-2} si ha

$V(P_1) = 4 \times 9 \times 10^9 \times \frac{1 \times 10^{-6}}{1} = 3,6 \times 10^4$ V

a2) Il campo elettrico in P_1, dovuto alle quattro cariche positive, ha la direzione (ed il verso) dell'asse x (per la simmetria della disposizione delle cariche).

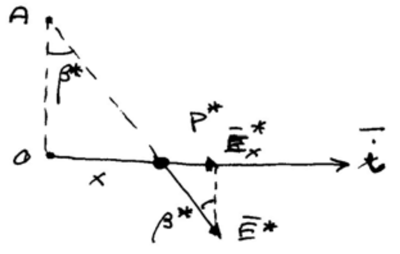
Si ha PO=OA=OB=OC=OD=$\sqrt{2}/2$;

pertanto l'angolo OAP (=OBP=OCP=ODP= β) vale β = π/4.

Inoltre, essendo $r_{1,5} = r_{2,5} = r_{3,5} = r_{4,5} = r = 1$ m, si avrà:

$$E_{P_{totale}} = 4K \frac{q}{r^2} \sin\beta = 2.55 * 10^4 \text{ V/m}$$, (con direzione e verso dell'asse x).

b) Posto d=OA, il campo elettrico nel punto P* generico dell'asse x, vale, in modulo, (vedi anche la figura che segue):



$\frac{x}{\overline{AP^*}} = \sin\beta^*$

$E^*_x = E^* \sin\beta^* = 4K \frac{q}{\overline{AP^*}^2} \sin\beta^*$

Ma $\overline{AP^*} = \left(x^2 + \overline{OA}^2\right)^{1/2}$

$$E(x) = 4K \frac{q}{\left(x^2 + d^2\right)} \frac{x}{\left(x^2 + d^2\right)^{1/2}}$$

e la forza che esso esercita su q_5 vale: $F(x) = q_5 E(x)$, ed ha direzione x e verso -x.

Quando x<<d (piccole oscillazioni) si ha $F(x) = 4K \frac{q q_5}{d^3} x$

Scrivendo il secondo principio della dinamica, con riferimento alla direzione x del moto :

$F_x = m\, a_x = -4K \dfrac{qq_5}{d^3}\, x$

Si ottiene quindi l'equazione del moto armonico che fornisce il periodo delle piccole oscillazioni:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{md^3}{4Kqq_5}} = 8.8 \text{ s}$$