ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

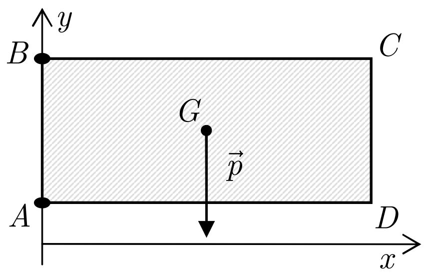
INGEGNERIA GESTIONALE E DEI PROCESSI GESTIONALI A-K,
DELLE TELECOMUNICAZIONI, MECCANICA, DELL'AMBIENTE E DEL TERRITORIO E CHIMICA

(Proff. A. Bertin, N. Semprini Cesari, A. Vitale e A. Zoccoli)

9/1/2004

(1)

Si consideri un cancello schematizzato come il rettangolo $ABCD$ mostrato in figura, di lati $a = BC$ e $b = CD$, in cui A e B rappresentano i cardini. Il cancello, il cui baricentro si trova al centro del rettangolo, è soggetto al peso $\vec{p}$. Calcolare, in condizioni di equilibrio, le espressioni delle seguenti quantità:



a) le componenti orizzontali delle forze $\vec{\Phi}_A$ e $\vec{\Phi}_B$ esplicate dai cardini A e B in reazione alla forza peso;

b) la risultante delle componenti verticali di tali forze di reazione.

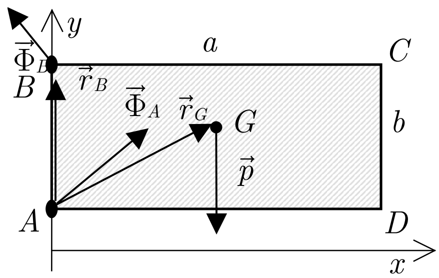
* * *

1) Calcolare l'espressione del lavoro compiuto dalla forza conservativa $\vec{F}(x,y,z) = \alpha\left\{(2x+z)\,\vec{i} + z\,\vec{j} + (x+y)\,\vec{k}\right\}$ tra gli istanti $t = 0$ e $t = T$ su di un punto materiale di massa m il cui moto è descritto dalla legge oraria $\vec{r}(t) = \left(\frac{x_0}{T}\vec{i} + \frac{y_0}{T}\vec{j} + \frac{z_0}{T}\vec{k}\right)t$.

2) Spiegare in quali condizioni la quantità di moto e il momento della quantità di moto di un sistema meccanico sono, insieme o singolarmente, grandezze costanti nel tempo.

3) Calcolare, rispetto all'asse di simmetria, l'espressione del momento d'inerzia di un corpo di massa M a forma di stella, costituito da cinque raggi uguali filiformi e rettilinei, ciascuno dei quali ha lunghezza L, densità di massa (lineare) uniforme e i due estremi situati rispettivamente al centro e ai diversi vertici di un pentagono.

Soluzione Esercizio



In condizioni di equilibrio si ha

$$1)\quad \begin{aligned} \vec{F}_T &= \vec{0} \\ \vec{M}_T &= \vec{0} \end{aligned}$$

Le forze in gioco sono le reazioni vincolari $\vec{\Phi}_A$ e $\vec{\Phi}_B$ applicate nei punti A e B rispettivamente nonché la forza peso $\vec{p}$ applicata nel punto G. Tenendo conto del fatto che tali forze non hanno componenti lungo z scriveremo:

$$2)\quad \begin{aligned} \vec{\Phi}_A &= \left(\Phi_A^x, \Phi_A^y, 0\right) \\ \vec{\Phi}_B &= \left(\Phi_B^x, \Phi_B^y, 0\right) \\ \vec{p} &= \left(0, -p, 0\right) \end{aligned}$$

Se inoltre scegliamo il polo di riduzione per il calcolo dei momenti coincidente con il punto A avremo

$$3)\quad \begin{aligned} \vec{r}_G &= \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, 0\right) \\ \vec{r}_B &= \left(0, b, 0\right) \end{aligned}$$

Dalle 1), tenendo conto delle 2) e 3) otteniamo allora le seguenti equazioni

$$\vec{\Phi}_A + \vec{\Phi}_B + \vec{p} = \vec{0} \qquad \begin{aligned} \Phi_A^x + \Phi_B^x &= 0 \\ \Phi_A^y + \Phi_B^y - p &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{r}_G \wedge \vec{p} + \vec{r}_B \wedge \vec{\Phi}_B = 0 \qquad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & -p & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & b & 0 \\ \Phi_B^x & \Phi_B^y & 0 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$-\frac{a}{2}p - b\,\Phi_B^x = 0$$

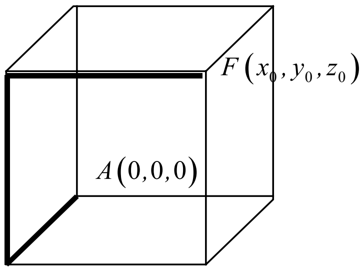
dalle quali ricaviamo le quantità richieste

$$a)\qquad \Phi_A^x = \frac{ap}{2b} \qquad \Phi_B^x = -\frac{ap}{2b}$$

$$b)\qquad \Phi_A^y + \Phi_B^y = p$$

Quesito N.1

Dato che il campo di forza è conservativo basterà calcolare l'integrale di linea della forza lungo un qualunque cammino che congiunge il punto A, occupato all'istante t=0, ed il punto F occupato all'istante t=T. Dalla espressione della posizione in funzione del tempo, sostituendo t=0 e t=T rispettivamente, si trova facilmente $A=(0,0,0)$, $F=(x_0,y_0,z_0)$.



Integrando lungo lungo gli spigoli come indicato in figura otteniamo

$$\alpha\int_0^{x_0} 2x\,dx +$$
$$\alpha\int_0^{z_0} x_0\,dz +$$
$$\alpha\int_0^{y_0} z_0\,dy =$$
$$\alpha(x_0^2 + x_0 z_0 + y_0 z_0)$$

Quesito N.3

Si deve calcolare il momento di inerzia di ciascun raggio rispetto ad un asse normale al raggio stesso e passante per un suo estremo. Si ottiene facilmente

$$\int r^2\,dm = \int_0^L \lambda\,dx\,x^2 = \frac{\lambda}{3}L^3$$

Tenendo ora conto che i raggi sono 5 e che $\lambda L = M$ otteniamo $I=\frac{5}{3}ML^2$.