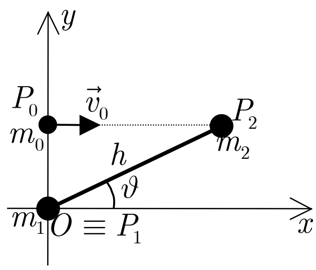
ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

INGEGNERIA GESTIONALE e DEI PROCESSI GESTIONALI A-K, MECCANICA, ENERGETICA, INFORMATICA A-F e DELL'AUTOMAZIONE, PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO, PER L'INDUSTRIA ALIMENTARE e CHIMICA

(Proff. A. Bertin, D. Galli, N. Semprini Cesari, A. Vitale e A. Zoccoli)

25/3/2004

(1)



Su un piano orizzontale e liscio sono collocate tre particelle di massa $m_0 = 0.5$ Kg, $m_1 = 4$ Kg e $m_2 = 2$ Kg. La particella m_1 è unita tramite un'asta rigida di massa trascurabile e lunghezza $h = 0.3$ m alla particella m_2. In un riferimento cartesiano Oxy giacente nel piano che contiene le particelle, le posizioni delle tre masse sono rispettivamente $P_0 \equiv (0, h\sin\vartheta)$, $P_1 \equiv (0,0)$ e $P_2 \equiv (h\cos\vartheta, h\sin\vartheta)$, essendo $\vartheta = 30^\circ$ l'angolo che l'asta forma inizialmente con l'asse (v. figura). Le velocità iniziali delle particelle sono $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$ (con $v_0 = 2$ m/s) e $\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{0}$. La massa m_0 urta istantaneamente e in modo perfettamente anelastico m_2. Si ipotizzi che la massa m_1 sia vincolata al piano. Determinare le seguenti quantità dopo l'urto:

a) la distanza del centro di massa del sistema (CM) dall'origine,
b) l'equazione della traiettoria del CM,
c) la velocità angolare del sistema,
d) l'accelerazione del CM.

QUESITI

1) Un punto materiale di massa m si muove lungo una circonferenza di raggio r secondo l'equazione oraria $s = at^2$. Calcolare il modulo della forza applicata.
2) Tre masse di valore m, $2m$ e $3m$ sono collocate nei punti (0,0), (2,2) e (4,0). Calcolare le coordinate del centro di massa del sistema.
3) Enunciare e dimostrare il teorema delle forze vive.
4) Dimostrare che il campo di forze

$$\vec{F}(x,y,z) = -\frac{2kx}{(x^2+y^2)^2}\,\vec{i} - \frac{2ky}{(x^2+y^2)^2}\,\vec{j} \quad (\text{dove } k = 1\ \text{J} \times \text{m}^2)$$

è conservativo e calcolare il lavoro che esso compie su una particella che si sposta dal punto $A \equiv (1,0,1)$m al punto $B \equiv (0,2,3)$m.

Soluzioni LA(1)

Q1) $\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{s}\,\vec{t} + m\dfrac{\dot{s}^2}{r}\vec{n} = m2a\,\vec{t} + m\dfrac{4at^2}{r}\vec{n}$

$\left|\vec{F}\right| = m\sqrt{4a^2 + \dfrac{16a^2t^4}{r^2}}$

Q2) $\vec{r}_{CM} = \dfrac{m(0,0) + 2m(2,2) + 3m(4,0)}{m + 2m + 3m} = (\dfrac{8}{3}, \dfrac{2}{3})$

Q4) $L_{AB} = -\frac{3}{4}k \times \mathrm{m}^{-2} = -0.75\ \mathrm{J}$, calcolato ad esempio lungo i tratti consecutivi (1,0,1)m $\rightarrow$ (0,1,1)m [arco di circonferenza con centro in (0,0,1)m, $L = 0$], (0,1,1)m $\rightarrow$ (0,1,3)m [rettilineo, $L = 0$] e (0,1,3)m $\rightarrow$ (0,2,3)m [rettilineo, $L = \int_{1\mathrm{m}}^{2\mathrm{m}} \dfrac{-2ky}{y^4}dy$]. Percorsi a "zigzag": evitare quelli che passano per la singolarità $x = y = 0$; va bene ad esempio il percorso a tratti tutti rettilinei (1,0,1)m $\rightarrow$ (1,1,1)m $\rightarrow$ (0,1,1)m $\rightarrow$ (0,1,3)m.

a) $x_{\mathrm{CM}} = \dfrac{m_0 + m_2}{m_0 + m_1 + m_2} h\cos\vartheta$; $y_{\mathrm{CM}} = \dfrac{m_0 + m_2}{m_0 + m_1 + m_2} h\sin\vartheta$

$\left|\vec{r}_{CM}\right| = \dfrac{m_0 + m_2}{m_0 + m_1 + m_2} h = 0.12\ \mathrm{m}$

b) $x_{\mathrm{CM}} = \left|\vec{r}_{CM}\right|\cos\vartheta(t)$; $y_{\mathrm{CM}} = \left|\vec{r}_{CM}\right| \mathrm{sen}\,\vartheta(t)$; $x_{\mathrm{CM}}^2 + y_{\mathrm{CM}}^2 = \left|\vec{r}_{CM}\right|^2$

c) Si osservi che il momento delle forze esterne calcolato rispetto alla origine è nullo per cui si deve conservare il momento angolare del sistema

$\overrightarrow{OP}_0 \wedge m\vec{v}_0 = I\vec{\omega}$; $\vec{\omega} = -\dfrac{m_0 v_0 h\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{(m_0 + m_2)h^2}\vec{k}$; $|\,\vec{\omega}\,| = 2/3\ \mathrm{rad/s}$

d) $\vec{a}_{\mathrm{CM}} = \ddot{x}_{\mathrm{CM}}\vec{i} + \ddot{y}_{\mathrm{CM}}\vec{j} = -\left|\vec{r}_{CM}\right|\dot{\vartheta}^2(\cos\vartheta\,\vec{i} + \mathrm{sen}\,\vartheta\,\vec{j})$; $\left|\vec{a}_{\mathrm{CM}}\right| = 0.051\ \mathrm{m/s^2}$