

Quesiti

- 1) Enunciare e commentare la seconda legge di Keplero.
- 2) Enunciare e dimostrare il teorema delle forze vive.
- 3) Sia dato il campo di forze

$$\vec{F}(x, y, z) = \alpha \left[(2xy + z^2)\vec{i} + (2yz + x^2)\vec{j} + (2xz + y^2)\vec{k} \right]$$

Verificare se è conservativo e calcolare eventualmente l'espressione dell'energia potenziale.

Problema

1) Durante una partita un giocatore di baseball utilizza una mazza di legno di acero, di massa M e lunghezza L . Si consideri la mazza come una sbarra non omogenea di dimensioni trasversali trascurabili e di densità lineare $\lambda(x)$ data dalla seguente espressione:

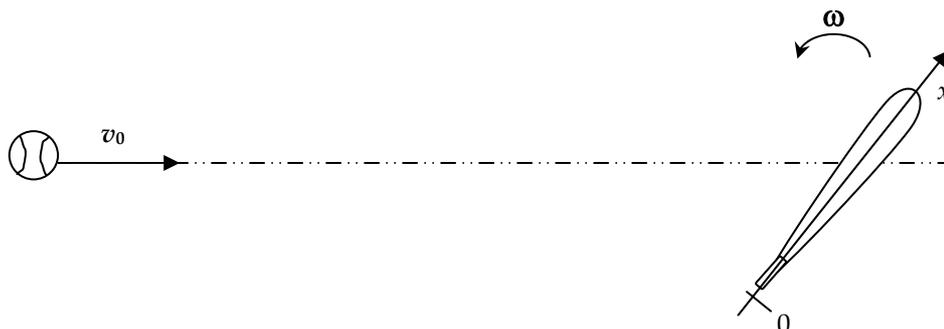
$$\lambda(x) = \lambda_0 + \lambda_1 \cdot x,$$

dove λ_0 e λ_1 sono due costanti opportune e l'origine dell'asse x è posta all'estremo del manico. Calcolare in funzione di M ed L :

- a) le espressioni delle costanti λ_0 e λ_1 sapendo che, dividendo la mazza a metà, la massa della metà di mazza più vicina al manico è pari a $1/3$ del totale.
- b) l'espressione del momento di inerzia I della mazza calcolato rispetto ad un asse passante per il punto $x = 0$.

Durante il proprio turno di battuta il giocatore, ricevendo una palla dal giocatore della squadra avversaria, ruota la mazza con velocità angolare ω attorno ad O e colpisce la palla esattamente a metà della mazza. Se la pallina ha massa m e raggiunge la mazza con velocità v_0 parallelamente al terreno, calcolare:

- c) calcolare l'espressione del momento angolare del sistema rispetto a O prima che il giocatore colpisca la palla;
- d) supponendo che l'urto sia perfettamente elastico, calcolare l'espressione dell'energia cinetica del sistema dopo che il giocatore ha colpito la palla.



Soluzioni

Problema

1a)

$$\begin{cases} M = \int \lambda(x) dx = \int_0^L (\lambda_0 + \lambda_1 x) dx = \lambda_0 L + \lambda_1 \frac{L^2}{2} \\ 2 \int_0^{\frac{L}{2}} (\lambda_0 + \lambda_1 x) dx = \int_{\frac{L}{2}}^L (\lambda_0 + \lambda_1 x) dx = \\ - \\ 2\lambda_0 \frac{L}{2} + 2\lambda_1 \frac{L^2}{4} = \lambda_0 L + \lambda_1 \frac{L^2}{2} - \lambda_0 \frac{L}{2} - \lambda_1 \frac{L^2}{4} \\ - \\ \lambda_0 \frac{L}{2} = \lambda_1 \frac{L^2}{4} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_0 = \lambda_1 \frac{L}{2} \\ M = \lambda_1 L^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{M}{L^2} \\ \lambda_0 = \frac{M}{2L} \end{cases} \end{cases}$$

1b)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^L x^2 (\lambda_0 + \lambda_1 x) dx = \lambda_0 \frac{L^3}{3} + \lambda_1 \frac{L^4}{4} \\ &= \frac{M}{2L} \frac{L^3}{3} + \frac{M}{L^2} \frac{L^4}{4} = \frac{5}{12} ML^2 \end{aligned}$$

1c)

$$\vec{K} = \vec{K}_p + \vec{K}_m = -mv_0 \frac{L}{2} \vec{k} + I\omega \vec{k}$$

1d)

$$T_f = T_i = T_p + T_m = \frac{1}{2} mv_0^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

Q3 $V = -\alpha(xz^2 + yx^2 + zy^2)$