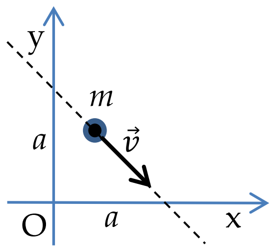
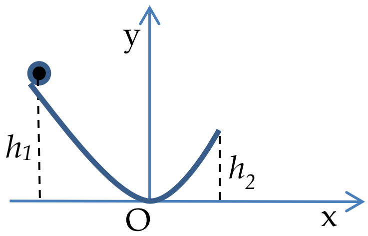
Fisica Generale LA N.1

Prova Scritta del 9 Settembre 2011
Prof. Nicola Semprini Cesari

Meccanica: quesiti



1) Esprimere il momento della quantità di moto del punto materiale nel riferimento indicato in figura e assumendo l'origine come polo di riduzione.



2) Un corpo di massa m scivola, senza attrito, lungo un profilo parabolico di equazione $y = a\, x^2$ partendo da una quota h_1. Determinare il vettore velocità nell'istante in cui il corpo si stacca dal profilo.

3) Verificare se il campo di forza $\vec{F} = \alpha\left[\, yz\,(3x^2 y + 2xz^2 + y^2 z)\vec{i} + xz\,(2x^2\, y + xz^2 + 3y^2 z)\,\vec{j} + xy\,(x^2 y + 3xz^2 + 2y^2 z)\vec{k}\ \right]$, dove α è una costante, è conservativo, e in tal caso calcolarne l'espressione dell' energia potenziale.

4) Commentare il concetto di momento d'inerzia. Mostrare i passaggi che conducono alla sua introduzione.

5) Commentare il concetto di massa inerziale, illustrare le sue proprietà, indicarne l'unità di misura.

Meccanica: problema

Un satellite artificiale di massa m ruota attorno alla Terra, di massa M_T, su di un'orbita circolare di raggio R_s (rispetto al centro della Terra). Trascurando il moto della Terra stessa, determinare le espressioni delle seguenti quantità:

a) l'energia cinetica T_s e l'energia meccanica totale E_s del satellite in funzione della costante gravitazionale γ, di m, M_T e di R_s.
b) supponendo che il satellite perda una quantità di energia meccanica totale pari a 1/8 della sua energia cinetica iniziale T_s, il valore del rapporto (R_s'/R_s) tra il raggio R_s' della nuova orbita circolare e quello originario R_s.

Termodinamica

1) Spiegare la costruzione della scala Kelvin delle temperature.

2) Commentare i fatti sperimentali e le ipotesi che conducono alla formulazione del primo principio della termodinamica.

3) Un numero incognito di moli di gas perfetto monoatomico sono all'equilibrio termodinamico all'interno di un recipiente a pareti rigide alla temperatura $t_1=20\ ^0C$. Successivamente il recipiente viene posto a contatto con un serbatoio di calore alla temperatura $t_2=0\ ^0C$ la cui entropia, a causa dello scambio di calore, aumenta di $\Delta S=90\ J/K$. Determinare il numero di moli di gas.

4) Un contenitore adiabatico è diviso in due compartimenti di volume V_1 e V_2 da un setto rimovibile. Nei compartimenti si trovano rispettivamente n_1 ed n_2 moli di gas ideale di tipo differente aventi la stessa pressione P e temperatura T. Ad un certo istante il setto viene rimosso. Spiegare qualitativamente cosa succede e se il processo che ha luogo è reversibile o irreversibile. Nel caso si tratti di un processo irreversibile calcolare la variazione di entropia del sistema.

MECCANICA

1)
Il momento può essere calcolato in un qualunque istante, scegliamo allora quello in cui la traiettoria interseca l'asse y ad esempio. Si ha

$$\vec{r} = a\,\vec{j} \qquad \vec{v} = v\cos\alpha\,\vec{i} - v\sin\alpha\,\vec{j} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \vec{m} = \vec{r}\wedge m\vec{v} = a\,\vec{j}\wedge m(v\cos\alpha\,\vec{i} - v\sin\alpha\,\vec{j}) =$$

$$-m\,v\,a\cos\alpha\,\vec{k} = -\frac{\sqrt{2}}{2}m\,v\,a\,\vec{k}$$

2)
Nell'istante in cui il corpo si stacca dal profilo possiede una velocità di modulo

$$v = \sqrt{2\,g\,(h_1 - h_2)}$$

ed un direzione data dalla tangente alla curva del profilo nel punto di stacco:

$$y = a\,x^2 \quad \frac{dy}{dx} = 2\,a\,x \quad ma \quad h_2 = a\,x_2^2 \quad da\ cui \quad x_2 = \sqrt{h_2/a} \quad e\,quindi \quad \frac{dy}{dx} = tg\alpha = 2\,a\sqrt{h_2/a} = 2\sqrt{a\,h_2}$$

da cui

$$\sin\alpha = tg\alpha/\sqrt{1+tg^2\alpha} = \frac{2\sqrt{a\,h_2}}{\sqrt{1+4\,a^2\,h_2^2}} \qquad e \qquad \cos\alpha = 1/\sqrt{1+tg^2\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1+4\,a^2\,h_2^2}}$$

La velocità vale allora

$$\vec{v} = \sqrt{\frac{2\,g\,(h_1-h_2)}{1+4\,a^2\,h_2^2}}\,\vec{i} + 2\sqrt{\frac{2\,g\,a\,h_2\,(h_1-h_2)}{1+4\,a^2\,h_2^2}}\,\vec{j}$$

3)
Il rotazionale è nullo, e quindi il campo è conservativo. Se si integra sul percorso a zig-zag che porta prima dall'origine a $(x,0,0)$ poi a$(x,y,0)$ tutti e tre gli addendi del prodotto $\vec{F}\cdot dx\,\vec{i} + \vec{F}\cdot dy\,\vec{j} + \vec{F}\cdot dz\,\vec{k}$ si annullano o perché hanno a fattor comune una coordinata z=0 o per annullamento del prodotto scalare tra versori ortogonali. Resta solamente l' integrale della componente z della forza da $(x,y,0)$ a (x,y,z), cioè

$$\int_0^z \alpha xy(x^2y + 3xz^2 + 2y^2z)dz = \alpha\left(x^3y^2z + x^2yz^3 + xy^3z^2\right) = \alpha xyz(x^2y + xz^2 + y^2z) = -V$$

Problema

a) Applicando la seconda legge della dinamica si ha che la forza centripeta, rappresentata dall'attrazione gravitazionale, uguaglia in modulo il prodotto della massa del satellite per la sua accelerazione centripeta, cioè $\gamma\frac{m_s M_T}{R_s^2} = m_s\frac{v_s^2}{R_s}$, da cui $T_s = \frac{1}{2}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s}$.

Inoltre: $E_s = T_s + V_s = -\frac{1}{2}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s} - \frac{1}{16}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s} = -\frac{9}{16}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s} = -\frac{1}{2}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s'}$

b) La perdita di energia cinetica è $\Delta T = \frac{1}{16}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s}$, ma la conservazione dell'energia meccanica totale rimane valida, cioè $T_s + V_s - \Delta T = T_s' + V_s'$, il che vuol dire che $-\frac{1}{2}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s} - \frac{1}{16}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s} = -\frac{9}{16}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s} = -\frac{1}{2}\gamma\frac{m_s M_T}{R_s'}$, da cui $R_s' = \frac{8}{9}R_s$.

TERMODINAMICA

3)

il calore acquisito dal serbatoio vale

$$Q = T_{serb}\ \Delta S_{serb}$$

mentre quello ceduto dal gas vale

$$Q = n\ c_V\ \Delta T$$

eguagliando abbiamo allora

$$n\ c_V\ \Delta T = T_{serb}\ \Delta S_{serb}$$

$$n = \frac{T_{serb}\ \Delta S_{serb}}{c_V\ \Delta T} = \frac{T_{serb}\ \Delta S_{serb}}{\frac{3}{2}R\ \Delta T} = \frac{273.15\times 90}{1.5\times 8.31\times 20} = 98.6$$

4)

la variazione di entropia di uno dei due gas vale

$$dS = n c_V \frac{dT}{T} + n R\frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = n c_V \ln(\frac{T_f}{T_i}) + n R\ \ln(\frac{V_f}{V_i}) = n R\ \ln(\frac{V_f}{V_i}) \quad \textit{dato che} \quad T_f = T_i$$

abbiamo allora per il sistema

$$\Delta S_1 = n_1\ R\ \ln(\frac{V_2 + V_1}{V_1})$$

$$\Delta S_2 = n_2\ R\ \ln(\frac{V_2 + V_1}{V_2})$$

$$\Delta S_{Tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = n_1\ R\ \ln(\frac{V_2 + V_1}{V_1}) + n_2\ R\ \ln(\frac{V_2 + V_1}{V_2})$$

dato che

$$PV_1 = n_1 RT \quad e \quad PV_2 = n_2 RT \quad e \quad quindi \quad V_1 = n_1 RT/P \quad e \quad V_2 = n_2 RT/P$$

possiamo esprimere la variazione di entropia in funzione delle frazioni molari

$$\Delta S_{Tot} = n_1\, R\, \ln\left(\frac{n_2 + n_1}{n_1}\right) + n_2\, R\, \ln\left(\frac{n_2 + n_1}{n_2}\right) =$$

$$= (n_2 + n_1)\, R \left[\, \frac{n_1}{n_2 + n_1} \ln\left(\frac{n_2 + n_1}{n_1}\right) + \frac{n_2}{n_2 + n_1} \ln\left(\frac{n_2 + n_1}{n_2}\right) \,\right]$$