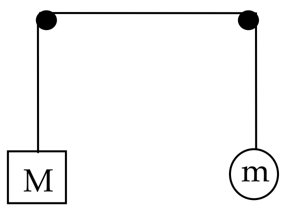
Fisica Generale LA N.2

Prova Scritta del 3 Febbraio 2010
Prof. Nicola Semprini Cesari

Quesiti

1) Siano dati due sistemi di riferimento Oxy e $O'x'y'$. Sapendo che le coordinate di O rispetto ad O' sono espresse dal vettore $(2,3)$ e che gli assi x e y sono ruotati di un angolo $\alpha = 30^\circ$ rispetto ai corrispondenti assi x' e y' e Oxy possiede una velocità angolare $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_0)$ rispetto al sistema $O'x'y'$, esprimere, nel riferimento $O'x'y'$ (e nella notazione dei versori), l'accelerazione del punto P del piano identificato dal vettore vettore $\vec{r} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$ ed in quiete nel riferimento Oxy.

2) Un punto materiale di massa m, in moto lungo l'asse x di un riferimento Oxy, è soggetto all'azione di una forza $f = -\lambda \dot{x}^3$. Fornire l'espressione della velocità in funzione del tempo sapendo che v_0 è il suo valore al tempo $t=0$.



3) Sapendo che M=4 Kg determinare il valore di m affinchè la sua accelerazione sia diretta verso il basso e valga $g/5$.

4) Spiegare e commentare in che modo viene introdotto in meccanica il concetto di massa inerziale.

5) Commentare la prima equazione cardinale della meccanica e fornire i passaggi matematici che conducono alla sua formulazione (circa 1 pagina).

Problema

Due astronauti in fase di preparazione, considerabili come punti materiali di masse rispettivamente m e $2m$, si trovano su una piattaforma orizzontale priva di attrito, solidale ad un riferimento terrestre da considerarsi inerziale, legati l'uno all'altro da una fune di lunghezza l e massa trascurabile. La fune è tesa ed essi ruotano l'uno intorno all'altro con velocità angolare mi modulo ω. Assumendo il centro di massa del sistema come il punto fisso attorno al quale ruotano entrambi gli astronauti, calcolare (sull'asse x che istantaneamente congiunge i due astronauti) le espressioni:

a) della distanza x_G del centro di massa dall'astronauta più leggero;

b) della tensione della fune che trattiene l'astronauta più leggero;

c) della tensione della fune che trattiene l'astronauta più pesante. Si commentino i risultati b) e c).

d) Ad un certo istante l'astronauta più pesante decide di avvicinarsi al collega e tira la fune finche essa assume una lunghezza l'. Sapendo che prima dell'avvicinamento i due astronauti possedevano velocità $\vec{v}_{2m} = \frac{1}{3} l\omega \vec{j}$ e $\vec{v}_m = -\frac{2}{3} l\omega \vec{j}$ rispetto al centro di massa, calcolare l'espressione della nuova velocità angolare del sistema.

Soluzioni

Quesito 1

$$\vec v = 0 \quad \vec a = 0 \quad \vec a_{OO'} = 0 \quad \vec i = \frac{\sqrt3}{2}\vec i\,' + \frac12 \vec j\,' \quad \vec j = \frac{\sqrt3}{2}\vec j\,' - \frac12 \vec i\,' \qquad \vec\omega = \omega_0 \vec k\,'$$

$$\begin{aligned}
\vec a\,' &= \vec\omega \wedge (\vec\omega \wedge \vec r) \\
&= \omega_0 \vec k\,' \wedge (\omega_0 \vec k\,' \wedge (3\vec i + 4\vec j)) = \\
&= \omega_0 \vec k\,' \wedge [\omega_0 \vec k\,' \wedge [3(\frac{\sqrt3}{2}\vec i\,' + \frac12 \vec j\,') + 4(\frac{\sqrt3}{2}\vec j\,' - \frac12 \vec i\,')]] \\
&= \omega_0 \vec k\,' \wedge [\omega_0 \vec k\,' \wedge [\frac{3\sqrt3}{2}\vec i\,' + \frac32 \vec j\,' + 2\sqrt3 \vec j\,' - 2\vec i\,']] = \\
&= \omega_0 \vec k\,' \wedge [\frac{3\sqrt3}{2}\omega_0 \vec j\,' - \frac32 \omega_0 \vec i\,' - 2\sqrt3 \omega_0 \vec i\,' - 2\omega_0 \vec j\,'] = \\
&= -\frac{3\sqrt3}{2}\omega_0^2 \vec i\,' - \frac32 \omega_0^2 \vec j\,' - 2\sqrt3 \omega_0^2 \vec j\,' + 2\omega_0^2 \vec i\,' = (2 - \frac{3\sqrt3}{2})\omega_0^2 \vec i\,' - (\frac32 + 2\sqrt3)\omega_0^2 \vec j\,'
\end{aligned}$$

Quesito 2

$$-\lambda \dot x^3 = m\ddot x \qquad -\lambda \dot x^3 = m\frac{d\dot x}{dt} \qquad \int_{\dot x(0)}^{\dot x(t)} \frac{d\dot x}{\dot x^3} = -\frac{\lambda}{m}\int_0^t dt \qquad [-\frac{1}{2\dot x^2}]_{\dot x(0)}^{\dot x(t)} = -\frac{\lambda}{m}t \qquad \dot x(t) = \sqrt{\frac{v_0^2}{2\frac{\lambda}{m}v_0^2 t - 1}}$$

Quesito 3

$$T - mg = m\ddot z_2$$

$$T - Mg = M\ddot z_1 \qquad \ddot z_2 = \frac{M-m}{M+m}g \qquad -\frac{g}{5} = \frac{M-m}{M+m}g \qquad m = \frac64 M = 6Kg$$

Quesito 4

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = 2\alpha\left(3x^2yz + yz^3\right) = \frac{\partial F_y}{\partial x};$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = 3\alpha\left(x^2y^2 + y^2z^2\right) = \frac{\partial F_z}{\partial x}; \quad \text{il campo è conservativo.}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = 2\alpha\left(x^3y + 3xyz^2\right) = \frac{\partial F_z}{\partial y};$$

$$V = -U = -\int \vec F \cdot d\vec s = -\left(\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} F_x\,dx + \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} F_y\,dy + \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} F_z\,dz\right) = -\alpha\left(x^3y^2z + xy^2z^3\right)$$

$$[\alpha] = \left[ML^{-5}T^{-2}\right] \Rightarrow \frac{N}{m^6}$$

Problema

a) $x_G = \dfrac{m \cdot 0 + 2m \cdot l}{m + 2m} = \dfrac{2}{3} l$

b) $T_m = m\omega^2 \dfrac{2}{3} l = \dfrac{2}{3} m\omega^2 l$

c) $T_{2m} = 2m\omega^2 \dfrac{1}{3} l = \dfrac{2}{3} m\omega^2 l$ =>Verifica del II principio della dinamica

$$\vec{K}_i = 2m \frac{1}{3} l\vec{i} \wedge \frac{1}{3} l\omega \vec{j} + m\left(-\frac{2}{3} l\vec{i}\right) \wedge \left(-\frac{2}{3} l\omega \vec{j}\right) = \frac{2}{9} ml^2\omega \vec{k} + \frac{4}{9} ml^2\omega \vec{k} = \frac{2}{3} ml^2\omega \vec{k}$$

$$\vec{K}_f = \frac{2}{3} ml'^2\omega' \vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} ml^2\omega = \frac{2}{3} ml'^2\omega' \Rightarrow \omega' = \omega \left(\frac{l}{l'}\right)^2$$