Fisica Generale LA

Prova Scritta del 12 Gennaio 2009
Prof. Nicola Semprini Cesari

Compito N. 2

Quesiti

1) Un sistema isolato è composto da due punti materiali di massa $m_1 = 2\,Kg$ e $m_2 = 3\,Kg$ che si muovono con velocità $\vec{v}_1 = (1,2,2)$ e $\vec{v}_2 = (0,-1,1)$ calcolare il modulo della quantità di moto del sistema.

2) Scrivere le equazioni cartesiane del moto di un punto materiale di massa m posto in un campo di forze che ha per energia potenziale $V(x,y,z) = -\alpha z^2$, sapendo che all'istante $t = 0$ il punto si trova in $(0,0,z_0)$ con velocità $\vec{v}_0 = v_0\vec{i}$. Risolvere le equazioni.

3) Stabilire se il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha y^2\vec{i} - (2\alpha xy - \beta)\vec{j} + \beta\vec{k}$ è conservativo e calcolarne, eventualmente, la funzione energia potenziale. Determinare inoltre le dimensioni e le unità di misura delle costanti α e β.

4) Enunciare e spiegare il significato della prima equazione cardinale della meccanica. Fare inoltre un esempio di applicazione di tale equazione.

Problema

Si consideri una asta omogenea di massa M e lunghezza L posta verticalmente e vincolata nel centro di massa. Ad un certo istante di tempo una pallina di massa $m = \frac{M}{6}$ e velocità iniziale $\vec{v}$ diretta orizzontalmente urta l'asta a distanza $\frac{L}{4}$ dal centro di massa. Calcolare le espressioni delle seguenti quantità:

a) il momento angolare del sistema;

b) la velocità angolare dell'asta dopo l'urto nel caso in cui la pallina rimbalzi indietro con velocità in modulo pari a $\frac{v}{2}$.

Soluzioni compito 2

Quesito 1

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 2(1,2,2)+3(0,-1,1) = (2,1,7) \qquad |\vec{P}| = 3\sqrt{6}\ Kg\ m/s$$

Quesito 2

$$\vec{F} = 2\alpha\ z\ \vec{k}\ ,\ \vec{v}_0 = v_0\vec{i}\ ,\ \vec{r}_0 = z_0\vec{k} \qquad \ddot{x} = \ddot{y} = 0\ ,\ \ddot{z} - \frac{2\alpha}{m}z = 0$$

$$x(t) = v_0 t\ ,\ y(t) \equiv 0\ ,\ z(t) = \frac{z_0}{2}\left(e^{\sqrt{2\alpha/m}\ t} + e^{-\sqrt{2\alpha/m}\ t}\right)$$

Quesito 3

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = -2\alpha y = \frac{\partial F_y}{\partial x};$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0; \qquad \text{il campo è conservativo}$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0;$$

Il campo è conservativo, avendo rotore nullo. Il potenziale U si ottiene integrando su un cammino a “zig-zag” tra l’origine e il punto generico *P(x,y,x):*

$$V = -U = -\int \vec{F}\cdot d\vec{s} = -\left(\int_{(0,0,0)}^{(x,0,0)} F_x dx + \int_{(x,0,0)}^{(x,y,0)} F_y dy + \int_{(x,y,0)}^{(x,y,z)} F_z dz\right) = -\left(-\alpha x y^2 + \beta y + \beta z\right) = \alpha x y^2 - \beta(y+z)$$

$$[\alpha] = \left[ML^{-1}T^{-2}\right] \Rightarrow \frac{N}{m^2} = Pa$$

$$[\beta] = \left[MT^{-2}\right] \Rightarrow \frac{N}{m}$$

Problema

a) $\vec{K} = \frac{\vec{L}}{4} \times m\vec{v} = \frac{1}{24}LMv\vec{k}$;

b) $K_{in} = \frac{1}{24}LMv$;

$$K_{fin} = I\omega - \frac{1}{24}LM\frac{v}{2}; \qquad I = \frac{1}{2}ML^2$$

$$I\omega = \frac{1}{24}LMv + \frac{1}{24}LM\frac{v}{2} = \frac{3}{24}LM\frac{v}{2} = \frac{1}{16}LMv;$$

$$\omega = \frac{1}{16}LMv\frac{2}{ML^2} = \frac{1}{8}\frac{v}{L}.$$