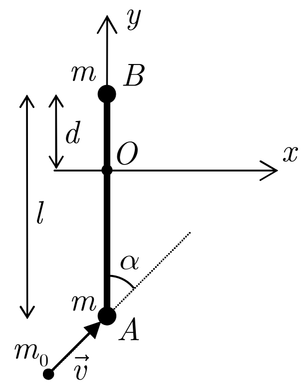
ESAME SCRITTO DI FISICA GENERALE LA

INGEGNERIA GESTIONALE e DEI PROCESSI GESTIONALI A-K, MECCANICA, ENERGETICA, INFORMATICA A-F e DELL'AUTOMAZIONE, PER L'AMBIENTE E IL TERRITORIO, PER L'INDUSTRIA ALIMENTARE e CHIMICA

(Proff. A. Bertin, D. Galli, N. Semprini Cesari, A. Vitale e A. Zoccoli)

25/3/2004

(2)



Due particelle identiche di massa $m = 0.5$ Kg sono fissate alle estremità A e B di un'asta rigida di lunghezza $l = 60$ cm e massa trascurabile. L'asta è vincolata, a distanza $d = 20$ cm dall'estremità superiore B, tramite una cerniera cilindrica ideale che le consente unicamente di ruotare nel piano verticale xy (v. figura). Il sistema è soggetto all'azione della forza peso (di direzione opposta all'asse y) e si trova inizialmente nella condizione di equilibrio stabile (asta verticale). La particella inferiore (estremità A) viene poi colpita istantaneamente e anelasticamente da un proiettile puntiforme di massa $m_0 = 2m$, la cui velocità subito prima dell'urto ha modulo $v = 5$ m/s ed è diretta dal basso verso l'alto formando un angolo $\alpha = 45^\circ$ con la verticale. Si determinino le seguenti quantità:

a) la velocità angolare del sistema subito dopo l'urto,
b) la distanza tra il baricentro G del sistema dopo l'urto e la cerniera O (suggerimento: si consideri l'asta ancora verticale);
c) si specifichi quali grandezze si conservano dopo l'urto e quali no (gli attriti siano trascurabili);
d) sapendo che la velocità del proiettile non è sufficiente a provocare un giro completo del sistema dopo l'urto, determinare la quota massima $y_G^{\max}$ raggiunta dal baricentro.

QUESITI

1) Un punto materiale di massa m viene lanciato in direzione obliqua (inclinata di un angolo α rispetto alla direzione orizzontale) con velocità di modulo v_0. Calcolare il tempo necessario affinché il corpo ricada a terra.
2) Quattro masse di valore m, $2m$, $3m$ e $4m$ sono collocate nei punti (0,0), (2,2), (0,4) e (-2,2). Calcolare il momento d'inerzia del sistema rispetto ad un asse passante per la prima e la terza di queste.
3) Scrivere l'espressione delle forze inerziali agenti in un sistema di riferimento che ruota con velocità angolare costante $\vec{\omega}$ rispetto alle stelle fisse. Calcolare il modulo di tali forze nel caso di un punto materiale di massa m posto nell'origine con velocità di modulo v_0 diretta perpendicolarmente al vettore $\vec{\omega}$.

4) Dimostrare che il campo di forze $\vec{F}(x,y,z) = \frac{kx}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\vec{i} + \frac{ky}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\vec{j}$ (dove $k = 1\ \mathrm{J}\times\mathrm{m}$) è conservativo e calcolare il lavoro che esso compie su una particella che si sposta dal punto $A \equiv (0,3,4)\mathrm{m}$ al punto $B \equiv (5,0,2)\mathrm{m}$.

Soluzioni LA(2)

Q1) $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t = 0\,;\; t = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$

Q2) $I = 2m \times 4 + 4m \times 4 = 24m$

Q4) $L_{AB} = \frac{2}{15}k \times \mathrm{m}^{-1} = 0.13$ J, calcolato ad esempio lungo i tratti (0,3,4)m → (3,0,4)m [arco di circonferenza con centro in (0,0,4)m, L = 0], (3,0,4)m → (3,0,2)m [rettilineo, L = 0] e (3,0,2)m → (5,0,2)m [rettilineo, $L = \int_{3\mathrm{m}}^{5\mathrm{m}} \frac{kx}{x^3}dx$].

a) Si osservi che il momento delle forze esterne rispetto ad O è nullo per cui si conserva il momento angolare del sistema

$\vec{K}_F = \vec{K}_I$

$\vec{K}_I = \overrightarrow{OA} \wedge m_0\vec{v} = -(l-d)\,\vec{j} \wedge m_0(v\cos\alpha\,\vec{j} + v\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\vec{i}) = (l-d)m_0 v\,\mathrm{sen}\,\alpha\,\vec{k}$

$\vec{K}_F = I_0\vec{\omega}\,, \qquad I_0 = 3m(l-d)^2 + md^2$

$(l-d)m_0 v\,\mathrm{sen}\,\alpha\;\vec{k} = I_0\vec{\omega}\,;\; \vec{\omega} = \dfrac{(l-d)2mv\,\mathrm{sen}\,\alpha}{3m(l-d)^2 + md^2}\vec{k}\,,$

$|\,\vec{\omega}\,| = 5.4$ rad/s

b) $y_{CM}(t_{\text{urto}}) = \dfrac{m\,y_B + (m+m_0)y_A}{m+m+m_0} = \dfrac{md - 3m(l-d)}{4m} = -\,0.25$ m;

$\left|\vec{r}_{CM}\right| = \left|y_{CM}\right| = 0.25$ m

c) Non si conservano né $\vec{Q}$ né $\vec{K}$, mentre si conserva E (la reazione vincolare ideale non compie lavoro, la forza peso è conservativa).

d) Conservazione dell'energia tra l'istante subito dopo l'urto e quello in cui $y_G = y_G^{\max}$ (la sbarra si ferma): $\frac{1}{2}I_0\omega^2 = m_{\text{tot}}\,g\left[y_G^{\max} - y_G^{\text{urto}}\right]$

$y_G^{\max} = d - \frac{3}{4}l + \dfrac{\frac{1}{2}\left[3m(l-d)^2 + md^2\right]\omega^2}{4mg} = -\,0.054$ m.