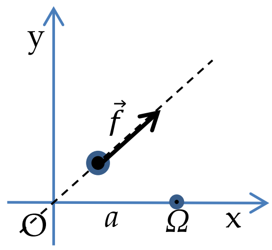
Fisica Generale LA

N.2

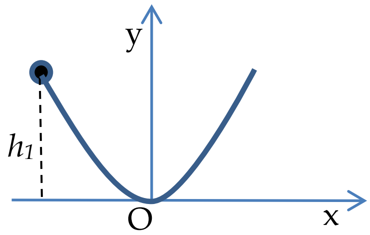
Prova Scritta del 9 Settembre 2011
Prof. Nicola Semprini Cesari

Meccanica: quesiti

1) Esprimere il momento della forza applicata al punto materiale nel riferimento indicato in figura, assumendo il punto Ω come polo di riduzione e nella ipotesi che la traiettoria sia inclinata di un agolo $a=45^0$.



2) Un corpo di massa m scivola, senza attrito, lungo un profilo parabolico di equazione $y = a\, x^2$ partendo da una quota h_1. Determinare il vettore velocità nell'istante in cui la sua direzione risulta inclinata di un angolo $a=45^0$ (esprimere la condizione su h_1 affinché il problema ammetta soluzione) .



3) Verificare se il campo di forza $\vec{F} = \alpha\left[yz(4x^3 + y^3 + z^3)\vec{i} + xz(x^3 + 4y^3 + z^3)\vec{j} + x\,y\,(x^3 + y^3 + 4z^3)\vec{k} \right]$ è conservativo e in tal caso determinarne l'espressione dell'energia potenziale (α costante).

4) Commentare il concetto di momento di un vettore. Enunciare e dimostrare il teorema del momento della forza nel caso di un punto materiale.

5) Commentare il concetto di massa gravitazionale, illustrare le sue proprietà, indicarne l'unità di misura.

Meccanica: problema

Un satellite artificiale di massa m viene lanciato verticalmente verso l'alto dalla superficie della Terra (che assumiamo di raggio R_T e massa M_T). Trascurando il moto della Terra stessa, determinare le espressioni delle seguenti quantità:
a) il modulo v_T della velocità che il satellite deve possedere al momento del lancio per potersi inserire in un'orbita circolare con centro nel centro della terra e raggio R_o= 2 R_T .
b) il modulo della velocità che il satellite deve possedere al momento del lancio per poter uscire con velocità trascurabile dal campo gravitazionale terrestre.

Termodinamica

1) Spiegare la costruzione della scala Celius delle temperature.

2) Commentare i fatti sperimentali e le ipotesi che conducono alla formulazione del secondo principio della termodinamica.

3) $n=4$ moli di gas perfetto monoatomico sono all'equilibrio termodinamico all'interno di un recipiente a pareti rigide ad una temperatura incognita. Successivamente il recipiente viene posto a contatto con un serbatoio di calore alla temperatura $t_2=0\ ^0C$ la cui entropia, a causa dello scambio di calore, aumenta di $\Delta S=70\ J/K$. Determinare la temperatura iniziale del gas.

4) Un contenitore adiabatico è diviso in due compartimenti di volume V_1 e V_2 da un setto rimovibile. Nei compartimenti si trovano rispettivamente n_1 ed n_2 moli di gas ideale di tipo differente aventi la stessa pressione P e temperatura T. Ad un certo istante il setto viene rimosso. Spiegare qualitativamente cosa succede e se il processo che ha luogo è reversibile o irreversibile. Nel caso si tratti di un processo irreversibile calcolare la variazione di entropia del sistema.

MECCANICA

1)

Il momento può essere calcolato in un qualunque istante, scegliamo allora quello in cui la traiettoria interseca la verticale passante per Ω. Si ha

$\vec{r} = a\ tg\alpha\ \vec{j} \qquad \vec{f} = f\cos\alpha\,\vec{i} + f\sin\alpha\,\vec{j} \qquad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\vec{m} = \vec{r} \wedge \vec{f} = a\ tg\alpha\ \vec{j} \wedge (f\cos\alpha\,\vec{i} + f\sin\alpha\,\vec{j}) = -a\ f\sin\alpha\ \vec{k} = -\frac{\sqrt{2}}{2} a\ f\ \vec{k}$

2)

La tangente dell'angolo della direzione del vettore velocità è data da $\frac{dy}{dx} = 2\,a\,x$ ed ha valore unitario nel punto $2\,a\,x = 1$ da cui $x = \frac{1}{2a}$.

In tale punto la quota vale $y = a\,x^2 = a\frac{1}{4a^2} = \frac{1}{4a}$ da cui si ottiene la velocità

$v = \sqrt{2\,g\,(h_1 - \frac{1}{4a})}$ con la condizione $h_1 \geq \frac{1}{4a}$.

3)

Il rotazionale è nullo, e quindi il campo è conservativo. Se si integra sul percorso a zig-zag che porta prima dall'origine a $(x,0,0)$ poi a$(x,y,0)$ tutti e tre gli addendi del prodotto $\vec{F}\cdot dx\vec{i} + \vec{F}\cdot dy\vec{j} + \vec{F}\cdot dz\vec{k}$ si annullano o perché hanno a fattor comune una coordinata z=0 o per annullamento del prodotto scalare tra versori ortogonali. Resta solamente l' integrale della componente z della forza da $(x,y,0)$ a (x,y,z), cioè

$$\int_0^z \alpha xy(x^3 + y^3 + 4z^3)dz = \alpha xyz\left(x^3 + y^3 + z^3\right) = -V$$

Problema

a) L' equilibrio dinamico nell'orbita di raggio R_o è regolato dalla formulazione matematica del II principio della dinamica, cioè dalla relazione $\gamma\frac{mM_T}{R_o^2} = m\frac{v_o^2}{R_o}$ che dà $v_o = \sqrt{\frac{\gamma M_T}{R_o}}$ e $\frac{1}{4}\gamma\frac{mM_T}{R_T} - \frac{\gamma mM_T}{R_o} = \frac{1}{2mv_T^2} - \frac{\gamma mM_T}{R_T}$ $T_o = \frac{1}{2}\gamma\frac{mM_T}{R_o} = \frac{1}{4}\gamma\frac{mM_T}{R_T}$ per la corrispondente energia cinetica.

D'altra parte, la proprietà di conservazione dell'energia meccanica tra la situazione in orbita e il momento del lancio è sancita dalla relazione $T_o + V_o = T_{lancio} + V_{R_T}$, cioè $\frac{1}{2}mv_T^2 = \frac{1}{4}\gamma\frac{mM_T}{R_T} - \frac{\gamma mM_T}{2R_T} + \frac{\gamma mM_T}{R_T}$ da cui $\frac{1}{2}mv_T^2 = \frac{1}{4}\gamma\frac{mM_T}{R_T} - \frac{\gamma mM_T}{2R_T} + \frac{\gamma mM_T}{R_T}$ e $v_T = \sqrt{\frac{3\gamma M_T}{2R_T}}$.

b) La domanda equivale a chiedere qual' è la velocità al lancio per raggiungere distanza infinita con energia cinetica nulla. Si tratta in sostanza della velocità di fuga, definita dalla relazione $\frac{1}{2}mv_T^2 - \frac{\gamma m M_T}{R_T} = 0$ che dà appunto $v_T = \sqrt{\frac{2\gamma M_T}{R_T}}$.

TERMODINAMICA

3)

il calore acquisito dal serbatoio vale

$Q = T_{serb}\ \Delta S_{serb}$

mentre quello ceduto dal gas vale

$Q = n\ c_V\ \Delta T$

eguagliando abbiamo allora

$n\ c_V\ \Delta T = T_{serb}\ \Delta S_{serb}$

$$\Delta T = \frac{T_{serb}\ \Delta S_{serb}}{n c_V} = \frac{T_{serb}\ \Delta S_{serb}}{n \frac{3}{2} R} = \frac{273.15 \times 70}{4 \times 1.5 \times 8.31} = 383,5\ {}^0K$$

4)

la variazione di entropia di uno dei due gas vale

$$dS = n c_V \frac{dT}{T} + n R \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = n c_V \ln(\frac{T_f}{T_i}) + n R\ \ln(\frac{V_f}{V_i}) = n R\ \ln(\frac{V_f}{V_i}) \quad dato\, che \quad T_f = T_i$$

abbiamo allora per il sistema

$$\Delta S_1 = n_1 R\ \ln(\frac{V_2 + V_1}{V_1})$$

$$\Delta S_2 = n_2 R\ \ln(\frac{V_2 + V_1}{V_2})$$

$$\Delta S_{Tot} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = n_1 R\ \ln(\frac{V_2 + V_1}{V_1}) + n_2 R\ \ln(\frac{V_2 + V_1}{V_2})$$

dato che

$$PV_1 = n_1 RT \qquad e \qquad PV_2 = n_2 RT \qquad e \quad quindi \quad V_1 = n_1 RT / P \quad e \quad V_2 = n_2 RT / P$$

possiamo esprimere la variazione di entropia in funzione delle frazioni molari

$$\Delta S_{Tot} = n_1 R\ \ln(\frac{n_2 + n_1}{n_1}) + n_2 R\ \ln(\frac{n_2 + n_1}{n_2}) =$$

$$= (n_2 + n_1) R \left[\ \frac{n_1}{n_2 + n_1} \ln(\frac{n_2 + n_1}{n_1}) + \frac{n_2}{n_2 + n_1} \ln(\frac{n_2 + n_1}{n_2})\ \right]$$