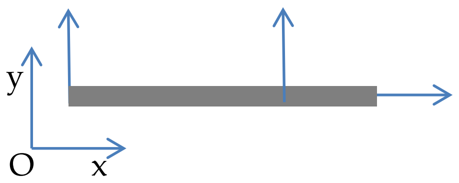
Fisica Generale LA **N.2**

Prova Scritta del 22 Luglio 2011
Prof. Nicola Semprini Cesari

Meccanica: quesiti

1) Tre forze di eguale modulo F sono applicate ai capi e a 2/3 della lunghezza di una sbarra omogenea di massa M e lunghezza L. Determinare il momento totale delle forze agenti sulla sbarra rispetto al centro di massa.



2) Un corpo di massa m cade da una quota h mentre un secondo corpo di massa m scende, dalla stessa quota, lungo un piano inclinato di un angolo α. Determinare l'intervallo temporale tra le partenze affinché i due corpi arrivino a terra contemporaneamente.

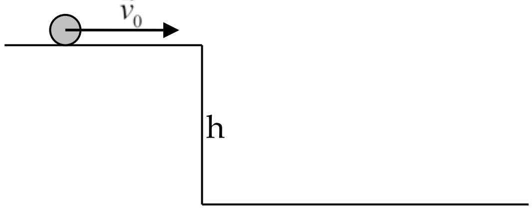
3) Stabilire se è conservativo il campo di forza $\vec{f}(\vec{r}) = \alpha r^2 \vec{r}$, dove $\vec{r}$ è il vettore posizionale del generico punto P rispetto all'origine O di un riferimento cartesiano $Oxyz$ e α è una costante, e in caso affermativo calcolare il lavoro da esso compiuto per uno spostamento del punto di applicazione della forza dal punto A di coordinate (2,0,0) al punto B di coordinate (0,0,1).

4) Determinare il momento d'inerzia di un'asta di densità di massa uniforme λ, massa M e lunghezza L, libera di ruotare attorno ad un asse passante per il suo punto di mezzo ed inclinato di un angolo α rispetto alla direzione della sbarra stessa.

5) Commentare le proprietà dei sistemi meccanici rigidi. Dimostrare la formula del momento assiale della quantità di moto.

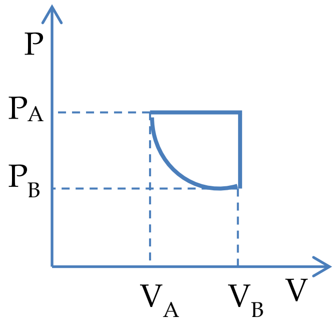
Meccanica: problema

Determinare la relazione tra v_0 ed h affinché il punto materiale raggiunga il suolo con una velocità inclinata di un angolo di 30° rispetto alla perpendicolare.



Termodinamica

1) Un gas compie il ciclo di trasformazioni quasi statiche rappresentato in figura. Sapendo che P_A = *5 bar*, P_B = *1 bar*, V_A = *300 cm*^{3} ed il ramo curvilineo è una trasformazione isoterma, calcolare il lavoro eseguito dal gas nel ciclo.



2) Un cilindro chiuso da un pistone scorrevole con attriti trascurabili contiene $n=3$ moli di gas perfetto monoatomico alla temperatura di $t_1=30\ ^0C$ in equilibrio con la pressione atmosferica esterna $P_0=1\ atm$. Successivamente il cilindro viene posto in contatto termico con un serbatoio di calore a temperatura $t_2=300\ ^0C$ fino al raggiungimento dell'equilibrio termico e sempre in equilibrio con la pressione atmosferica esterna. Calcolare le variazioni di entropia del gas e del serbatoio di calore.

3) Mostrare e commentare i passaggi che conducono dal teorema di Clausius alla introduzione del concetto di entropia ed al teorema dell'aumento dell'entropia nei sistemi termodinamici isolati.

SOLUZIONI

MECCANICA

1)

$$\vec{M}_T = -\frac{L}{2}\vec{i} \wedge F\,\vec{j} + \frac{L}{6}\vec{i} \wedge F\,\vec{j} = \frac{F\,L}{3}\vec{k}$$

2)

$$s_1 = \frac{1}{2} g\, t_1^2 \qquad t_1 = \sqrt{\frac{2\,s_1}{g}} \qquad t_1^* = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}$$

$$s_2 = \frac{1}{2} g \sin\alpha\; t_2^2 \qquad t_2 = \sqrt{\frac{2\,s_2}{g\sin\alpha}} \qquad t_2^* = \sqrt{\frac{2\,L}{g\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2\,h}{g\,\sin^2\alpha}}$$

$$t_2^* - t_1^* = \sqrt{\frac{2\,h}{g\,\sin^2\alpha}} - \sqrt{\frac{2\,h}{g}} = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}\left(\frac{1}{\sin\alpha} - 1\right)$$

3)

Scrivendo la forza in termini dei componenti cartesiane si verifica che il rotazionale è nullo, e quindi il campo è conservativo. Il lavoro compiuto dalla forza, diretta radialmente, è nullo lungo la traiettoria circolare con centro in O lungo la quale, con raggio 2 nel piano xz, si sposta il punto di applicazione da A = (2,0,0) a A'= (0,0,2). Resta da calcolare il lavoro compiuto per spostare il punto di applicazione da A' a B, che si riduce ad integrare lungo l' asse z (quindi con x e y nulle) ottenendo

$$\alpha \int_{0,0,2}^{0,0,1} (x^2 + y^2 + z^2)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \bullet dz\vec{k} \equiv \int_2^1 \alpha z^3 dz = \alpha \left[\frac{z^4}{4}\right]_2^1 = -\frac{15}{4}\alpha\,.$$

4)

$$I_{\hat{\omega}} = 2\int_0^{L/2} (x\sin\alpha)^2\,\lambda\,dx = 2\lambda\sin\alpha^2 \int_0^{L/2} x^2\,dx = 2\lambda\sin\alpha^2\,\frac{1}{3}\frac{L^3}{8} = \frac{1}{12} M \sin\alpha^2 L^2$$

Problema

$$y = h - \frac{1}{2} g t^2 \qquad x = v_0 t \qquad \vec{v} = (v_0, -gt)$$

il punto materiale tocca terra quando y=0 ovvero $t = \sqrt{2h/g}$ per cui la velocità al momento dell'impatto vale

$$\vec{v} = (v_0, -g\sqrt{\frac{2h}{g}}) = (v_0, -\sqrt{2gh})$$

affinché tale velocità abbia l'inclinazione richiesta si deve avere

$$\frac{v_0}{\sqrt{2gh}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \frac{v_0^2}{h} = \frac{2}{3} g$$

TERMODINAMICA

1)

$$L_I = \int_{V_A}^{V_B} P\,dV = P_A \int_{V_A}^{V_B} dV = P_A(V_B - V_A)$$

$$L_{II} = 0$$

$$L_{III} = \int_{V_B}^{V_A} P\,dV = nRT \int_{V_B}^{V_A} \frac{dV}{V} = nRT \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)$$

$$ma \;\; P_A V_A = nRT \;\; e \;\; P_B V_B = nRT \qquad da\ cui \;\; P_A V_A = P_B V_B \qquad V_B = \frac{P_A}{P_B} V_A$$

$$L_I = P_A(V_B - V_A) = P_A V_A \left(\frac{P_A}{P_B} - 1\right)$$

$$L_{III} = nRT \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right) = P_A V_A \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right)$$

$$L_I + L_{II} + L_{III} = P_A V_A \left(\frac{P_A}{P_B} - 1\right) + P_A V_A \ln\left(\frac{P_B}{P_A}\right) = P_A V_A \left(\frac{P_A}{P_B} - \ln\left(\frac{P_A}{P_B}\right) - 1\right) =$$

$$= 5 \times 10^5 \times 300 \times 10^{-6} \left(\frac{5}{1} - \ln\frac{5}{1} - 1\right) = 358.58\ J$$

2)

$$\not{d}Q = dU + \not{d}L \qquad \not{d}U = nC_V\,dT \qquad \not{d}L = P\,dV = nRT\,\frac{dV}{V}$$

$$dS = \frac{\not{d}Q}{T} = nC_V\,\frac{dT}{T} + nR\,\frac{dV}{V}$$

$$(S_2 - S_1)_{gas} = nC_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + nR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nC_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + nR \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

$$ma \;\; P_1 V_1 = nRT_1 \qquad P_2 V_2 = nRT_2 \qquad \frac{V_2}{V_1} = \frac{P_1 T_2}{P_2 T_1} = \frac{T_2}{T_1} \;\; poiché \;\; P_1 = P_2$$

$$(S_2 - S_1)_{gas} = nC_V \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + nR \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nC_V \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + nR \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = n\frac{3}{2} R \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + nR \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = n\frac{5}{2} R \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) =$$

$$= 3 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times \ln\left(\frac{573.15}{303.15}\right) = 39.70\ J/K$$

la frazione di calore scambiata dal gas vale

$\cancel{d}Q = nC_V\, dT + PdV = nC_V\, dT + n\,R\,dT$ *poichè il gas scambia calore a pressione costante*

$Q_{gas} = n\,(C_V + R)(T_2 - T_1)$

$Q_{serbatoio} = -Q_{gas} = -n\,(C_V + R)(T_2 - T_1)$

$$(S_2 - S_1)_{serbatoio} = \frac{Q_{serbatoio}}{T_2} = -\frac{n\,(C_V + R)(T_2 - T_1)}{T_2} = -n\frac{5}{2}R\,(1 - \frac{T_1}{T_2}) =$$

$$= -3 \times \frac{5}{2} \times 8.31 \times (1 - \frac{303.15}{573.15}) = -29.36\ J/K$$