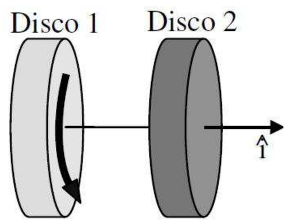
Fisica Generale LA

Prova Scritta dell' 11 Gennaio 2013
Prof. Nicola Semprini Cesari

Meccanica

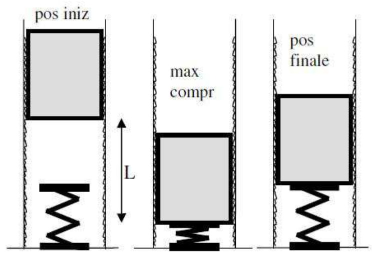
1) Un satellite artificiale di massa *m* percorre orbite circolari di raggio *R* attorno alla luna di massa *M*. Supponendo che il raggio dell'orbita *R* coincida con il raggio della luna determinare: *a)* il periodo di rivoluzione *T* del satellite. Assumendo la Luna come un sistema sferico con la massa distribuita uniformemente, determinare: *b)* la densità media ρ della Luna.
$Dati: \; G = 6.6\times10^{-11} m^3 / Kg \cdot s^2, \; M = 7.3\times10^{22} Kg, \; R = 1738 \; Km.$

2) Due dischi hanno momenti d'inerzia I_1 e I_2 rispetto allo stesso asse fisso orizzontale coincidente con l'asse di simmetria ad essi perpendicolare. Inizialmente il disco 2 è fermo, mentre il disco 1 ruota intorno all'asse di simmetria con velocità angolare $\vec{\omega}_1 = \omega_1 \hat{\imath}$. Ad un certo istante i due dischi vengono a contatto e, a causa dell'attrito tra le due superfici, assumono la stessa velocità angolare $\vec{\omega}_f = \omega_f \hat{\imath}$. Determinare il modulo di $\vec{\omega}_f$.



$Dati: \; I_1 = 1 \, Kg \; m^2, \; I_2 = 9 \; Kg \; m^2, \; |\vec{\omega}_1| = 1 \, rad / s.$

3) Un ascensore di massa *M* è fermo al primo piano di un condominio. Ad un certo istante il cavo si spezza e la cabina cade lungo le sue guide verso la sottostante molla ammortizzatrice di costante elastica *K* che l'ascensore comprime percorrendo in totale, all'istante di massima compressione della molla, un tratto verticale lungo *L*. Un dispositivo di sicurezza agisce da freno sulle guide, in modo che esse sviluppino, in caso di emergenza, una forza d'attrito costante di modulo F_a sia in salita che in discesa. Rimbalzando, l'ascensore ritorna ad un'altezza in cui la molla ha riacquistato la sua lunghezza a riposo. Determinare: a) la massima compressione D*x* della molla; b) l'espressione del modulo della forza F_a.



4) Dato il campo di forze $F(x, y, z) = -\alpha [3x^2 y \, \hat{\imath} + (x^3 + 4y \, z^2)\hat{\jmath} + 4y^2 z \, \hat{k}]$ determinare: a) le dimensioni fisiche della costante α; b) se il campo è conservativo e nel caso calcolare l'energia potenziale in un punto P(x,y,z); c) il lavoro compiuto dalla forza quando sposta il punto di applicazione da R(0,0,0) a S(1,1,1).

5) Discutere il concetto di energia meccanica specificando a quali sistemi meccanici è applicabile.

6) Commentare la seconda equazione cardinale nel caso di sistemi meccanici rigidi rotanti attorno ad un asse fisso.

Termodinamica

1) Un pezzo di ferro di massa m_{Fe}*=5 Kg* e temperatura T_{Fe}*=120* ^oC viene immerso in un recipiente contenente una massa m_{Ac}*=50 Kg* di acqua alla temperatura T_{Ac}*=20* ^oC. Sapendo che le capacità termiche del ferro e dell'acqua valgono rispettivamente C_{Fe}*=880 J/(Kg K)* e C_{Ac}*=4186 J/(Kg K)* e assumendo che gli scambi di calore avvengano esclusivamente tra ferro e acqua, calcolare i) la temperatura di equilibrio del sistema ferro-acqua; ii) la variazione di entropia del ferro, dell'acqua e del sistema ferro-acqua.

2) Si commenti in dettaglio il concetto di entropia.

Soluzioni Meccanica:

Esercizio 1:

a)

Poichè possiamo considerare la luna come un punto materiale collocato nel centro del pianeta e nel quale sia concentrata tutta la sua massa *M*, dal secondo principio della dinamica si ha che la forza gravitazionale esercitata dalla Luna sul satellite di massa *m*, produce la forza centripeta che mantiene il satellite artificiale sulla sua orbita circolare di raggio *R*, secondo la relazione

$$G\frac{mM}{R^2} = m\omega^2 R \quad \rightarrow \quad G\frac{mM}{R^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}R \quad \rightarrow \quad T^2 = \frac{4\pi^2 R^3}{GM} \quad \rightarrow$$

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 R^3}{GM}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 (1738\times10^3)^3}{6.6\times10^{-11}\ 7.3\times10^{22}}} = \sqrt{4.3\times10^7} = 6557\ s \quad \rightarrow \quad \text{1h 49' 17''}$$

b)

Dato che la luna é supposta a simmetria sferica, la densità media ρ é data da:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4\pi R^3}{3}} = \frac{3M}{4\pi R^3} = \frac{3 \bullet 7.3\times10^{22}}{4\pi(1738\times10^3)^3} = 0.33\times10^4 = 3.3\times10^3\ kg/m^3$$

Sapendo che la densità media della terra é $\rho_{TERRA} = 5.5\times10^3\ kg/m^3$ si ricava che la luna ha una densità media pari a circa il 64% di quella terrestre.

Esercizio 2

Poichè il sistema non é soggetto ad alcuna forza esterna (o meglio la risultante delle forze esterne è nulla), il sistema conserva il momento della quantità di moto:

$\vec{K}_{ini} = \vec{K}_{fin}$ tra l'istante iniziale e quello finale → $I_1\vec{\omega}_1 = (I_1 + I_2)\vec{\omega}_f$ dove entrambi i vettori $\vec{\omega}$ sono diretti lungo la retta $\hat{i}$ e possiamo dunque omettere la notazione vettoriale. Dunque:

$$\omega_f = \frac{I_1}{(I_1 + I_2)}\omega_1 = \frac{1}{10}\ rad/s$$

Esercizio 3:

a)

Applichiamo il teorema delle forze vive:

$L_{Ftot} = T_{Fin} - T_{in}$ dove

L_{Ftot} é il lavoro di tutte le forze che agiscono sull'ascensore e $T_{in}(T_{Fin})$ é l'energia cinetica nello stato iniziale (finale), dove per stato iniziale (finale) si intende l'ascensore fermo ad una quota L (l'ascensore fermo ad altezza zero e la molla completamente compressa).

Sull’ascensore agiscono 3 forze: la forza di gravità, la forza di attrito delle guide F_a e la forza della molla.
Essendo l’ascensore fermo sia nell’istante iniziale che in quello finale →
$T_{Fin} = T_{in} = 0$
mentre
$$L_{Ftot} = F_g L + F_a L + \int_0^{\Delta x} \vec{F}_m \cdot d\vec{x} = (Mg - F_a)L - \frac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2$$
Sostituendo nel teorema delle forze vive si ottiene:
$$(Mg - F_a)L - \frac{1}{2}k\left(\Delta x\right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta x = \sqrt{\frac{2(Mg - F_a)}{k}L}$$

b)
Applichiamo il “teorema delle forze vive” per le sole forze non conservative che assume la forma:

$L_{Fnc} = E_{Fin} - E_{in}$ dove
L_{Fnc} é il lavoro delle sole forze non conservative che agiscono sull’ascensore (in questo caso la sola forza di attrito delle guide) e $E_{in}(E_{Fin})$ é l’energia meccanica nello stato iniziale (finale), dove per stato iniziale (finale) si intende l’ascensore fermo alla quota di partenza L (l’ascensore fermo ad altezza Δx e la molla in condizione di riposo).

$$E_{Fin} = Mg\,\Delta x$$

$$E_{in} = Mg\,L$$

$$L_{Fnc} = F_a L + F_a \Delta x = -F_a L - F_a \Delta x = -F_a (L + \Delta x)$$

Dunque sostituendo a $L_{Fnc} = E_{Fin} - E_{in}$ si ottiene:

$$-F_a (L + \Delta x) = Mg\,\Delta x - MgL \quad \rightarrow \quad F_a = \frac{Mg(L - \Delta x)}{(L + \Delta x)}$$

Esercizio 4:
a)
La costante α ha le seguenti dimensioni fisiche:

$[\alpha] = [F]/[L^3]=[M][L^{-2}][T^{-2}]$ e unità di misura N/m^3 oppure $Kg/(m^2s^2)$.

b)
Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l’origine O(0,0,0) ed un punto generico C(x,y,z)

$$L_{OP} = \int_{ooo}^{xoo} F_x\,dx + \int_{xoo}^{xyo} F_y\,dy + \int_{xyo}^{xyz} F_z\,dz =$$
$$L_{OP} = -\alpha\left[\int_{ooo}^{xoo} 3x^2y\,dx + \int_{xoo}^{xyo}\left(x^3 + 4yz^2\right)dy + \int_{xyo}^{xyz} 4y^2z\,dz\right] =$$

$$= -\alpha\left\{\left[x^3 y\right]_{xoo}^{xyo} + \left[2y^2 z^2\right]_{xyo}^{xyz}\right\} = -\alpha\left(x^3 y + 2y^2 z^2\right)$$

dunque $L_{OP} = V(o,o,o) - V(x,y,z) = -\alpha\left(x^3 y + 2y^2 z^2\right)$

da cui segue l'energia potenziale $V(x,y,z) = \alpha\left(x^3 y + 2y^2 z^2\right)$

c)

Il lavoro tra il punto R(0,0,0) a S(1,1,1) è dato da:

$$L_{RS} = V(R) - V(S) = V(o,o,o) - V(1,1,1) = 0 - 3\alpha = -3\alpha$$

Soluzioni Termodinamica:

a)

$$dQ = m\,C\,dT \qquad \Delta Q = m\,C\,(T_2 - T_1)$$

$$\Delta Q_{Fe} = m_{Fe} C_{Fe} (T_{eq} - T_{Fe}) \qquad \Delta Q_{Ac} = m_{Ac} C_{Ac} (T_{eq} - T_{Ac})$$

$$\Delta Q_{Fe} + \Delta Q_{Ac} = 0$$

$$m_{Fe}\,C_{Fe}\,(T_{eq} - T_{Fe}) + m_{Ac} C_{Ac} (T_{eq} - T_{Ac}) = 0$$

$$T_{eq} = \frac{m_{Fe} C_{Fe} T_{Fe} + m_{Ac} C_{Ac} T_{Ac}}{m_{Fe} C_{Fe} + m_{Ac} C_{Ac}} = \frac{5 \times 880 \times 393 + 50 \times 4186 \times 293}{2 \times 880 + 50 \times 4186} = 298.7\ K = 25.7\ ^{\circ}C$$

b)

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{m\,C\,dT}{T} \qquad \Delta S = m\,C \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = m\,C\,\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

$$\Delta S_{Fe} = m_{Fe} C_{Fe}\,\ln\left(\frac{T_{eq}}{T_{Fe}}\right) = 5 \times 880 \times \ln\left(\frac{298.7}{393}\right) = -1207.2\ J/K$$

$$\Delta S_{Ac} = m_{Ac} C_{Ac}\,\ln\left(\frac{T_{eq}}{T_{Ac}}\right) = 50 \times 4186 \times \ln\left(\frac{298.7}{293}\right) = 4032.6\ J/K$$

c)

$$\Delta S_{Sis} = \Delta S_{Fe} + \Delta S_{Ac} = -1207.2 + 4032.6 = 2825.4\ J/K$$