Fisica Generale LA

Prof. Nicola Semprini Cesari

Prova Scritta del 12 Febbraio 2013

Meccanica

1) Calcolare il prodotto scalare tra i vettori $\vec{a} = a\,\hat{\imath}_r(\pi/2)$ e $\vec{b} = b\,\hat{\imath}_r(\pi/3)$.

2) Un carro, schematizzabile come costituito da un cassone di massa M e da quattro ruote, ciascuna assimilabile ad un disco omogeneo di massa m e raggio R, è lanciato con velocità di modulo v_0 su di una strada asfaltata orizzontale. Il carro si ferma dopo aver percorso un tratto di strada lungo s. Determinare l'espressione del lavoro complessivo L_a compiuto dalle forze d'attrito che hanno determinato l'arresto del carro.

3) Si supponga che una stella, la quale ruota con velocità angolare di modulo ω_0 attorno ad un suo asse di simmetria, cominci a collassare, riducendo il proprio raggio dal valore iniziale R_0 a quello finale R, modificando il modulo della propria velocità angolare da ω_0 a ω e mantenendo inalterata la propria massa m. Assimilando la stella ad una sfera a densità costante e sapendo che le forze che determinano il collasso sono tutte forze interne, determinare: a) l'espressione del modulo della velocità angolare finale ω; b) la variazione ΔV dell'energia potenziale della stella (si ricordi che il momento di inerzia di una sfera di massa M e raggio R calcolato rispetto ad un suo asse di simmetria vale $I = \frac{2}{5}MR^2$).

4) Dato il campo di forze, $\vec{F}(x,y,z) = -\alpha\left[\left(y^2z + 2xz^2\right)\vec{i} + 2xyz\vec{j} + (xy^2 + 2x^2z)\vec{k}\right]$ determinare: a) le dimensioni fisiche della costante α; b) se il campo è conservativo e nel caso calcolare l'energia potenziale in un punto P(x,y,z); c) il lavoro compiuto dalla forza quando sposta il punto di applicazione da R(0,0,0) a S(1,2,3).

5) Discutere i concetti di massa inerziale e massa gravitazionale.

6) Dedurre e commentare la prima equazione cardinale della meccanica.

Termodinamica

1) Una quantità di gas biatomico, all'equilibrio nello stato $P_0 = 1\,atm$, $V_0 = 100\,l$ e $T_0 = 20\,^\circ C$, viene scaldato isobaricamente fino a raddoppiare il proprio volume. Determinare la variazione di energia interna del gas $(1\,atm = 101325\,Pa,\ R = 8.31\,J\ K^{-1}mol^{-1},\ C_v = 5/2)$.

2) Si commenti la scala Kelvin e la scala assoluta delle temperature.

Soluzioni Meccanica:

Esercizio 1:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\,\hat{\imath}_r(\pi/2)\cdot\hat{\imath}_r(\pi/3) = ab\cos(\pi/6) = ab\sqrt{3}/2$$

Esercizio 2

Il lavoro complessivo delle forze d'attrito assorbe l'energia cinetica iniziale del carro, nella quale occorre tener conto, applicando il teorema di Koenig, della parte traslazionale del cassone e delle ruote nonché della parte rotazionale delle ruote

$$L_a = T_f - T_i = -T_i = -(\frac{1}{2}Mv_0^2 + 4\frac{1}{2}mv_0^2 + 4\frac{1}{2}I\omega^2) \qquad I = \frac{1}{2}mR^2 \qquad \omega = \frac{v_0}{R}$$

$$L_a = -(\frac{1}{2}Mv_0^2 + 4\frac{1}{2}mv_0^2 + 4\frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\frac{v_0^2}{R^2}) = -(\frac{1}{2}M + 3m)v_0^2$$

Esercizio 3:

Dato che la stella costituisce un sistema isolato possiamo applicare la conservazione del momento della quantità di moto e della sua proiezione assiale nonché della energia meccanica

$a)$

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

$$\omega_i = \omega_0 \qquad I_i = \frac{2}{5}MR_0^2 \qquad I_f = \frac{2}{5}MR^2$$

$$\omega_f = \frac{I_i}{I_f}\omega_i = \frac{2}{5}MR_0^2\frac{5}{2\,MR^2}\omega_0 = \frac{R_0^2}{R^2}\omega_0$$

$b)$

$$E = T + V = Kost \qquad 0 = \Delta T + \Delta V \qquad \Delta V = -\Delta T$$

$$\Delta V = -(\frac{1}{2}I_f\omega_f^2 - \frac{1}{2}I_i\omega_i^2) = -\frac{1}{2}(\frac{2}{5}MR_0^2\frac{R_0^4}{R^4}\omega_0^2 - \frac{2}{5}MR_0^2\omega_0^2) = \frac{1}{5}MR_0^2\omega_0^2(1 - \frac{R_0^4}{R^4})$$

Esercizio 4:

a) La costante α ha le seguenti dimensioni fisiche:

   [α] = [F]/[L^3]=[M][L^{-2}][T^{-2}] e unità di misura *N/m^3* oppure *$Kg/(m^2s^2)$.*

b) Il rotore del campo è nullo, dunque il campo è conservativo. Calcolando il lavoro su un cammino rettilineo a tratti tra l'origine O(0,0,0) ed un punto generico C(*x,y,z*)

$$L_{OP} = \int_{ooo}^{xoo} F_x\,dx + \int_{xoo}^{xyo} F_y\,dy + \int_{xyo}^{xyz} F_z\,dz =$$

$$L_{OP} = -\alpha\left[\int_{ooo}^{xoo}\left(y^2z + 2xz^2\right)dx + \int_{xoo}^{xyo} 2xyz\,dy + \int_{xyo}^{xyz}\left(xy^2 + 2x^2z\right)dz\right] =$$

$$= -\alpha\left\{\left[xy^2z + x^2z^2\right]_{xyo}^{xyz}\right\} = -\alpha\left(xy^2z + x^2z^2\right)$$

dunque $L_{OP} = V(0,0,0) - V(x,y,z) = -\alpha\left(xy^2z + x^2z^2\right)$

da cui segue l'energia potenziale $V(x,y,z) = \alpha(xy^2z + x^2z^2)$.

c) Il lavoro compiuto dalla forza per spostare il punto di applicazione dal punto R(0,0,0) al punto S(1,2,3) è dato da:

$L_{RS} = V(R) - V(S) = V(0,0,0) - V(1,2,3) = 0 - \alpha\left(1\cdot 4\cdot 3 + 1\cdot 9\right) = -21\alpha$

Soluzioni Termodinamica:

$$PV = nRT \qquad n = \frac{PV}{RT}$$

$$n = \frac{P_0V_0}{RT_0} = \frac{101325\times 0.1}{8.31\times 293} = 4.16\ mol$$

$$\frac{P_0V_0}{RT_0} = \frac{P_0V}{RT} \qquad T = \frac{V}{V_0}T_0 = 2\times 293 = 586^\circ K$$

$$\Delta U = nC_v\Delta T = nC_v(T - T_0) = 4.16\times\frac{5}{2}\times 8.31\times(586 - 293) = 25322.2\ J$$