

Fisica Generale LA

Prof. Nicola Semprini Cesari

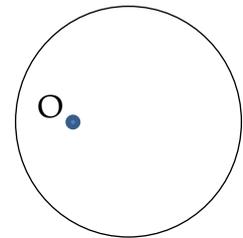
Prova Scritta del 15 Settembre 2017

Meccanica

Q1) Un aereo, in volo con velocità costante di modulo $v_0 = 900 \text{ km/h}$ ad una quota $h_0 = 2000 \text{ m}$, lascia cadere una massa m che deve colpire un punto al suolo che giace sulla parallela alla propria traiettoria. Determinare la distanza tra la verticale dell'aereo al momento del lancio e quella del bersaglio.

Q2) Dato un punto materiale di massa m posto in un campo di forze la cui energia potenziale ha l'espressione $V(x, y, z) = \alpha y^2$ (con α costante positiva) e sapendo che al tempo $t_0 = 0$ il punto si trova nel punto $P = (x_0, y_0, z_0)$ con velocità $\vec{v}_0 = v_0 \hat{i}$, determinare: a) la forza a cui è soggetto il punto all'istante t_0 ; b) le equazioni cartesiane del moto; c) il lavoro fatto dalla forza dall'istante iniziale al tempo $t_1 = \pi / 2 \sqrt{m / 2\alpha}$.

Q3) Un disco omogeneo di massa M e raggio R , disposto su di un piano verticale e libero di ruotare attorno ad un asse normale passante per la posizione eccentrica O , è trattenuto nella posizione iniziale indicata in figura con il diametro passante per O in posizione orizzontale. Determinare la distanza di O dal centro affinché l'accelerazione iniziale del centro di massa, qualora il disco venisse liberato, valga $g/3$.



Q4) Un punto materiale di massa m , inizialmente in quiete, scivola senza attrito lungo un profilo semicircolare di raggio R disposto su di un piano verticale (vedi figura). Determinare la reazione vincolare fornita dal profilo quando il punto materiale transita nel punto A di minima quota.



Q5) Discutere il concetto di energia meccanica specificando a quali sistemi meccanici è applicabile.

Q6) Commentare la seconda equazione cardinale nel caso di sistemi meccanici rigidi rotanti attorno ad un asse fisso.

Termodinamica

1) Un gas monoatomico, in uno stato iniziale con temperatura $T_0 = 300 \text{ K}$ e pressione $p_0 = 15 \text{ atm}$, si espande attraverso una trasformazione adiabatica quasi statica dimezzando il valore della pressione. Determinare la temperatura finale.

2) Una macchina di Carnot lavora tra due serbatoi di calore di temperatura $T_H = 800 \text{ K}$ e $T_L = 400 \text{ K}$ cedendo, al serbatoio freddo, una frazione di calore $Q_L = 10000 \text{ J}$. Determinare il rendimento termodinamico della macchina ed il lavoro compiuto in un ciclo.

3) Si commenti in dettaglio il concetto di entropia.

SOLUZIONI

Meccanica

Q1)

Riferimento con l'origine sulla verticale al suolo dell'aereo al momento dello sgancio

Coordinate della massa sganciata

$$y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2 \quad x = v_0t$$

Coordinate della massa sganciata al suolo

$$y_0 - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \quad t = \sqrt{\frac{2y_0}{g}} \quad x = v_0\sqrt{\frac{2y_0}{g}}$$

Quindi la distanza tra le verticali vale

$$x = 900 \frac{1000m}{3600s} \sqrt{\frac{2 \times 2000m}{9.81m/s^2}} = 5048,2m$$

Q2)

a)

La forza si ottiene facendo il gradiente (cambiato di segno) dell'energia potenziale:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}V \quad \rightarrow \quad \begin{cases} F_x = -\frac{\delta V}{\delta x} = 0 \\ F_y = -\frac{\delta V}{\delta y} = -2\alpha y \\ F_z = -\frac{\delta V}{\delta z} = 0 \end{cases}$$

b)

L'accelerazione a cui è soggetto il corpo è

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \left(0, \frac{-2\alpha y}{m}, 0\right) \quad \text{che in coordinate cartesiane diventa} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -\frac{2\alpha}{m}y \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Poiché lungo x e z l'accelerazione è nulla si ha un moto rettilineo uniforme, mentre lungo y si ha

$$F_y = ma_y = -2\alpha y$$

che conduce ad un'equazione differenziale del tipo

$$m\ddot{y} = -2\alpha y \quad \rightarrow \quad \ddot{y} + \frac{2\alpha}{m}y = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \quad \text{con} \quad \omega = \sqrt{\frac{2\alpha}{m}}$$

caratteristica di un moto armonico:

le equazione del moto sono dunque

$$\begin{cases} x(t) = x_o + v_{ox}t \\ y(t) = A \cos(\omega t + \varphi_o) = A \cos\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}} t + \varphi_o\right) \\ z(t) = z_o + v_{oz}t \end{cases}$$

imponendo le condizioni iniziali si ottiene

$$\begin{cases} x(t) = x_o + v_o t \\ y(t) = y_o \cos\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}} t\right) \\ z(t) = z_o \end{cases}$$

c)

Il lavoro fatto tra due generici istanti o posizioni vale

$$L = V_1 - V_2 = \alpha(y_1^2 - y_2^2)$$

Dunque occorre solo le coordinate y nei due istanti:

$$y(t) = y_o \cos\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}} t\right) \quad y(0) = y_o \quad y\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\right) = y_o \cos\left(\sqrt{\frac{2\alpha}{m}} \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{2\alpha}}\right) = y_o \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

da cui

$$L = V_1 - V_2 = \alpha(y_1^2 - y_2^2) = \alpha y_o^2$$

Q3)

$$\hat{\omega} \cdot \vec{M}^e = I_o \ddot{\phi}$$

$$\vec{i} \cdot [(y \vec{j}) \wedge (-Mg \vec{k})] = \left(\frac{1}{2} MR^2 + My^2\right) \ddot{\phi}$$

$$-Mgy = \frac{1}{2} M(R^2 + 2y^2) \ddot{\phi} \quad dZ_{CM} = y d\phi \quad \dot{Z}_{CM} = y \dot{\phi} \quad \ddot{Z}_{CM} = y \ddot{\phi}$$

$$-Mgy = \frac{1}{2} M(R^2 + 2y^2) \frac{\ddot{Z}_{CM}}{y} = -\frac{1}{2} M(R^2 + 2y^2) \frac{g}{3y}$$

$$y^2 = (R^2 + 2y^2) \frac{1}{6} \quad y = R/2$$

Q4)

$$mgR = \frac{1}{2} m v^2 \quad v = \sqrt{2gR}$$

$$R_V - mg = ma = m \frac{v^2}{R} = 2mg$$

$$R_V = 3mg$$

Termodinamica

Q1)

$$0 = nc_v dT + p dV \quad p dV + V dp = nR dT$$

$$p dV = nR dT - V dp$$

$$0 = nc_v dT + nR dT - V dp = nc_v dT + nR dT - \frac{nRT}{p} dp$$

$$0 = (c_v + R) \frac{dT}{T} - R \frac{dP}{P} \quad 0 = \frac{dT}{T} - \frac{R}{(c_v + R)} \frac{dP}{P}$$

$$\ln \frac{T_2}{T_1} = \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{R}{(c_v + R)}} \quad T_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{R}{(c_v + R)}} = 300 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{1 + \frac{3}{2}}} = 227.4^\circ K$$

Q2)

$$\eta = 1 - \frac{T_L}{T_H} = 1 - \frac{400}{800} = 0.5$$

$$\eta = \frac{L}{Q_H} = 1 - \frac{Q_L}{Q_H} \quad Q_H = \frac{Q_L}{1 - \eta} \quad L = Q_H \eta = \frac{Q_L}{1 - \eta} \eta = \frac{10000}{0.5} 0.5 = 10000$$