

Fisica Generale LA

Prof. Nicola Semprini Cesari

Prova Scritta del 18 Gennaio 2017

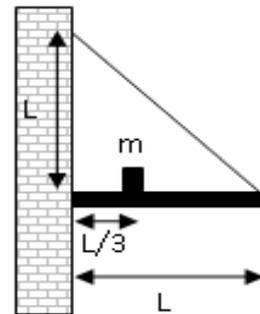
Meccanica

Q1) Un punto materiale si muove sul piano $z = 0$ lungo una traiettoria identificata dalla equazione $r = a\phi$ (spirale di Archimede in coordinate cilindriche). Nella ipotesi di uno scorrimento con velocità angolare costante $\dot{\phi}_0$, scrivere l'espressione del vettore posizione e velocità. Dato infine un generico punto della curva, scrivere l'espressione dell'angolo formato dalla direzione tangente con quella radiale.

Q2) Ai capi di una asticella di massa trascurabile e lunghezza l sono posizionate due masse m . L'asticella ruota, in assenza di attriti, con velocità angolare iniziale di modulo ω_0 attorno ad un asse perpendicolare passante per il suo centro. Un congegno, di massa trascurabile e solidale con l'asticella, avvicina le due masse ad una distanza $l/2$. Determinare l'espressione del modulo della velocità angolare finale ω .

Q3) Verificare se il campo di forze $\vec{F}(x, y, z) = \alpha [(2xy + z^2)\vec{i} + (2yz + x^2)\vec{j} + (2xz + y^2)\vec{k}]$, dove

Q4) Un'asta di lunghezza $L = 50 \text{ cm}$ e massa $M = 0.5 \text{ kg}$ è incernierata ad un estremo ad un muro tramite un perno privo di attrito, mentre l'altro estremo è tenuto orizzontalmente da una corda fissata al muro a distanza L . Una massa $m = 2 \text{ kg}$ è posta a distanza $L/3$ dal perno. Calcolare, in condizioni di equilibrio, la tensione della fune.



Q5) Si commenti in dettaglio le proprietà del moto circolare uniforme.

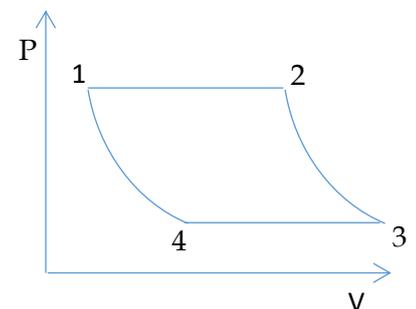
Q6) Si commenti in dettaglio la legge di gravitazione universale.

Termodinamica

Q1) Una quantità di gas monoatomico esegue il ciclo reversibile indicato in figura. Calcolare il rendimento sapendo che i rami 23 e 41 sono trasformazioni isoterme alle temperature $T_H = 450^\circ \text{ K}$ e $T_L = 350^\circ \text{ K}$ mentre $P_2/P_3 = 5$.

Q2) Nel corso di una trasformazione un gas monoatomico aumenta la propria temperatura ed il proprio volume di un fattore due. Determinare la variazione di entropia.

Q3) Commentare e mostrare i passaggi che conducono a stabilire l'equivalenza tra le formulazioni di Kelvin-Planck e Clausius del secondo principio della termodinamica.



SOLUZIONI

Meccanica

Q1)

$$\vec{r} = r\hat{i}_r \quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{i}_r + r\dot{\phi}_0\hat{i}_\phi$$

$$\vec{r} = a\phi\hat{i}_r \quad \dot{\vec{r}} = a\dot{\phi}_0\hat{i}_r + a\phi\dot{\phi}_0\hat{i}_\phi$$

$$\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|} = \frac{r\hat{i}_r}{r} \cdot \frac{a\dot{\phi}_0\hat{i}_r + a\phi\dot{\phi}_0\hat{i}_\phi}{\sqrt{(a\dot{\phi}_0)^2 + (a\phi\dot{\phi}_0)^2}} = \frac{a\dot{\phi}_0}{\sqrt{(a\dot{\phi}_0)^2 + (a\phi\dot{\phi}_0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\phi/a\dot{\phi}_0)^2}}$$

Q2)

Dato che l'asticella costituisce un sistema isolato possiamo applicare la conservazione del momento della quantità di moto e della sua proiezione assiale

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f \quad \omega_i = \omega_0 \quad I_i = 2m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}ml^2 \quad I_f = 2m\left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}ml^2 \quad \omega_f = \frac{I_i}{I_f}\omega_i = \frac{\frac{1}{2}ml^2}{\frac{1}{8}ml^2}\omega_0 = 4\omega_0$$

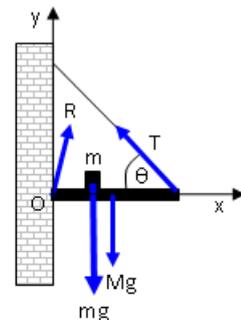
Q3)

Il rotore è nullo, quindi il campo è conservativo. Integrando sul circuito a zig-zag si ha

$$V(x,y,z) = -\alpha(xz^2 + yx^2 + zy^2).$$

Q4)

Bisogna imporre le condizioni della statica alle forze che agiscono sul sistema. Innanzitutto sul sistema agiscono 4 forze (figura a lato): le 2 forze peso dell'asta e della massa, la tensione della corda e la reazione vincolare del perno (che non so come è diretta ed è stata disegnata a caso). Tutte queste forze sono applicate in punti diversi. Scegliamo un sistema di riferimento (sdr) con origine O sul perno e assi x e y come in figura e valutiamo il momento della forza rispetto al polo O. Con ovvie considerazioni geometriche si ottiene $\theta = 45^\circ$.



Condizioni di statica:

$$\begin{cases} \sum \vec{F} = 0 \\ \sum \vec{M}_O = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{P}_A + \vec{P}_m + \vec{T} + \vec{R} = 0 \\ \frac{L}{2}\hat{i} \times (-Mg)\hat{j} + \frac{L}{3}\hat{i} \times (-mg)\hat{j} + L\hat{i} \times (-T \cos\theta\hat{i} + T \sin\theta\hat{j}) + 0 \times \vec{R} = 0 \end{cases}$$

dove $\vec{P}_A = -Mg\hat{j}$ è il peso dell'asta, $\vec{P}_m = -mg\hat{j}$ è il peso della massa m ,

$\vec{T} = -T \cos\theta\hat{i} + T \sin\theta\hat{j}$ è la tensione del filo e \vec{R} è la reazione del perno. Svolgendo i prodotti vettoriali si ottiene:

$$\begin{cases} \vec{P}_A + \vec{P}_m + (-T \cos \theta \hat{i} + T \sin \theta \hat{j}) + \vec{R} = \mathbf{0} \\ -\frac{MLg}{2} \hat{k} - \frac{mLg}{3} \hat{k} + LT \sin \theta \hat{k} = \mathbf{0} \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -Mg\hat{j} - mg\hat{j} + (-T \cos \theta \hat{i} + T \sin \theta \hat{j}) + \vec{R} = \mathbf{0} \\ T = \frac{g}{\sin \theta} \left(\frac{M}{2} + \frac{m}{3} \right) = 12.7 \text{ N} \end{cases}$$

Sostituendo nella prima equazione si ottiene:

$$\begin{cases} \vec{R} = (Mg + mg)\hat{j} - (-T \cos \theta \hat{i} + T \sin \theta \hat{j}) = T \cos \theta \hat{i} + (Mg + mg - T \sin \theta)\hat{j} = (8.98\hat{i} + 15.5\hat{j}) \text{ N} \\ \vec{T} = -T \cos \theta \hat{i} + T \sin \theta \hat{j} = (-8.98\hat{i} + 8.98\hat{j}) \text{ N} \end{cases}$$

Termodinamica

Q1)

sulle isobare $dQ = nc_p dT - VdP$ $dQ = nc_p dT$

sulle isoterme $dQ = nc_v dT + PdV = PdV$ $PV = nRT$ $P = nRT/V$ $dQ = nRT \frac{dV}{V}$

$$Q_{12} = nc_p (T_H - T_L)$$

$$Q_{23} = nRT_H \ln \frac{V_3}{V_2} \quad \text{ma } P_2 V_2 = P_3 V_3 \quad Q_{23} = nRT_H \ln \frac{P_2}{P_3}$$

$$Q_{34} = nc_p (T_H - T_L)$$

$$Q_{41} = nRT_L \ln \frac{V_4}{V_1} \quad \text{ma } P_4 V_4 = P_1 V_1 \quad Q_{41} = nRT_L \ln \frac{P_1}{P_4}$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_{34} + Q_{41}}{Q_{12} + Q_{23}} = 1 - \frac{nc_p (T_H - T_L) + nRT_L \ln \frac{P_1}{P_4}}{nc_p (T_H - T_L) + nRT_H \ln \frac{P_2}{P_3}} = 1 - \frac{\frac{5}{2}100 + 350 \ln 5}{\frac{5}{2}100 + 450 \ln 5} = 0.165$$

Q2)

$$dS = nC_v \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \quad \Delta S = nC_v \ln \frac{T_2}{T_1} + nR \ln \frac{V_2}{V_1} = n(C_v + R) \ln 2 = n \frac{5}{2} R \ln 2$$