Fisica Generale LA

Prof. Nicola Semprini Cesari

Prova Scritta del 19 Giugno 2017

Meccanica

Q1) Un punto materiale si muove con velocità $\vec{v} = 3t\,\vec{i}_R + 4t\,\vec{i}_\phi + 5\vec{k}$. Calcolare l'accelerazione.

Q2) Un pendolo conico di lunghezza *L* si muove con una certa velocità lungo una certa circonferenza. Determinare il modulo della velocità affinché il raggio della traiettoria circolare valga *L/2*.

Q3) Sia data una corona circolare di raggio interno R_1, raggio esterno $R_2 = 2R_1$ e densità superficiale di massa uniforme σ. Calcolare il momento d'inerzia della corona circolare rispetto ad un asse normale al piano che la contiene passante per un qualunque punto della circonferenza esterna (esprimere il risultato in funzione della massa M e del raggio interno).

Q4) Un disco rotola senza strisciare lungo un piano orizzontale con velocità del centro di massa di modulo $V_{CM} = 6 m/s$. Ad un certo punto incontra un piano inclinato ben raccordato con il piano orizzontale. Determinare la massima quota raggiunta dal centro di massa del disco nella ipotesi che la sua densità superficiale di massa sia uniforme.

Q5) Mostrare i passaggi che conducono al calcolo della derivata temporale del versore cilindrico $\vec{i}_\varphi$.

Q6) Enunciare e discutere il terzo principio della dinamica.

Termodinamica

1) Due moli di gas perfetto compiono un ciclo termodinamico reversibile costituito da i) una compressione adiabatica AB; ii) una isocora con aumento della pressione BC; iii) una espansione adiabatica CD; iv) una isocora con diminuzione della pressione DA. Calcolare i) il calore assorbito in funzione delle temperature; ii) il lavoro prodotto sull'intero ciclo in funzione delle temperature; iii) il rendimento in funzione dei volumi nella ipotesi che il quoziente tra volume maggiore e volume minore (rapporto di compressione) valga 10 ed il gas sia biatomico.

2) Nel corso di una trasformazione reversibile la temperatura aumenta di un fattore 6 e la pressione di un fattore 3. Calcolare la variazione di entropia di due moli di gas monoatomico.

SOLUZIONI

Q1

$$\vec{v} = 3t\,\vec{i}_R + 4t\,\vec{i}_\phi + 5\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(3t\,\vec{i}_R + 4t\,\vec{i}_\phi + 5\vec{k}) = 3\vec{i}_R + 3t\frac{d}{dt}\vec{i}_R + 4\vec{i}_\phi + 4t\frac{d}{dt}\vec{i}_\phi = 3\vec{i}_R + 3t\,\dot{\phi}\,\vec{i}_\phi + 4\vec{i}_\phi - 4t\,\dot{\phi}\,\vec{i}_R = (3-4t\,\dot{\phi})\vec{i}_R + (4+3t\,\dot{\phi})\vec{i}_\phi$$

volendo il calcolo può proseguire nel modo seguente

$$\vec{v} = 3t\,\vec{i}_R + 4t\,\vec{i}_\phi + 5\vec{k} = \dot{r}\,\vec{i}_r + r\dot{\phi}\,\vec{i}_\phi + \dot{z}\,\vec{k} \qquad 4t = r\dot{\phi} \qquad \dot{\phi} = \frac{4t}{r}$$

$$\vec{a} = (3 - \frac{16t^2}{r})\vec{i}_R + (3 + \frac{12t^2}{r})\vec{i}_\phi$$

Q2

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\begin{cases} T\sin\alpha = m\dfrac{v^2}{R} \\ T\cos\alpha = mg \\ R = L\sin\alpha = \dfrac{L}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} tg\alpha = \dfrac{v^2}{gR} = \dfrac{v^2}{gL/2} \\ - \\ \sin\alpha = \dfrac{1}{2};\ \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2};\ tg\alpha = 1/\sqrt{3} \end{cases} \qquad V = \sqrt{\frac{gL\,tg\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{gL}{2\sqrt{3}}}$$

Q3

$$I_{CM} = \iint r^2 dm = \iint r^2\sigma dS = \sigma\int_0^{2\pi}\int_{R_1}^{R_2} r^2 r\,d\phi\,dr = \sigma 2\pi\frac{1}{4}(R_2^4 - R_1^4) = \sigma\frac{\pi}{2}(R_2^4 - R_1^4) = \sigma\frac{\pi}{2}(R_2^2 - R_1^2)(R_2^2 + R_1^2) =$$

$$= \frac{M}{2}(R_2^2 + R_1^2) = \frac{M}{2}(4R_1^2 + R_1^2) = \frac{5}{2}MR_1^2$$

dal teorema di Huygens-Steiner si ha infine

$$I = I_{CM} + MR^2 = \frac{5}{2}MR_1^2 + MR_2^2 = \frac{5}{2}MR_1^2 + M4R_1^2 = \frac{13}{2}MR_1^2$$

Q4

$$E_{in} = E_{fin} \qquad V_{CM} = \omega R$$

$$\frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = Mgh \qquad \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}MR^2)(\frac{V_{CM}}{R})^2 = Mgh \qquad \frac{1}{2}MV_{CM}^2 + \frac{1}{4}MV_{CM}^2 = Mgh \qquad \frac{3}{4}V_{CM}^2 = gh$$

$$h = \frac{3V_{CM}^2}{4g} = \frac{3\times 36}{4\times 9.81} = 2.75m$$

Termodinamica

Esercizio n.1

i)

$$\text{đ}Q = dU + \text{đ}L \qquad \text{đ}Q = dU \qquad \text{đ}Q = nc_V dT$$

$$\int_B^C \text{đ}Q = nc_V \int_{T_B}^{T_C} dT \qquad Q_{BC} = nc_V (T_C - T_B)$$

ii)

$$\text{đ}Q = dU + \text{đ}L \qquad 0 = dU + \text{đ}L \qquad \text{đ}L = -dU \qquad \text{đ}L = -nc_V dT$$

$$\int_A^B \text{đ}L = -nc_V \int_{T_A}^{T_B} dT \qquad L_{AB} = nc_V (T_A - T_B)$$

$$\int_C^D \text{đ}L = -nc_V \int_{T_C}^{T_D} dT \qquad L_{CD} = nc_V (T_C - T_D)$$

$$L_{ciclo} = nc_V (T_A - T_B) + nc_V (T_C - T_D)$$

iii)

$$Q_{BC} = nc_V (T_C - T_B) \qquad \eta = \frac{L_{ciclo}}{Q_{BC}} = \frac{nc_V (T_A - T_B) + nc_V (T_C - T_D)}{nc_V (T_C - T_B)} = 1 - \frac{(T_D - T_A)}{(T_C - T_B)}$$

sulle adiabatiche si ha $TV^{\,cP/cV-1} = K$ da cui si ottiene

$$T_A V_A^{\frac{c_P}{c_V}-1} = T_B V_B^{\frac{c_P}{c_V}-1} \qquad T_C V_B^{\frac{c_P}{c_V}-1} = T_D V_A^{\frac{c_P}{c_V}-1} \qquad (T_D - T_A) V_A^{\frac{c_P}{c_V}-1} = (T_C - T_B) V_B^{\frac{c_P}{c_V}-1} \qquad \frac{(T_D - T_A)}{(T_C - T_B)} = \frac{V_B^{\frac{c_P}{c_V}-1}}{V_A^{\frac{c_P}{c_V}-1}} = \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\frac{c_P}{c_V}-1}$$

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_B}{V_A}\right)^{\frac{c_P}{c_V}-1} = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{7/2}{5/2}-1} = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{2}{5}} = 0.60$$

Esercizio n.2

$$dS = nc_P \frac{dT}{T} - nR\frac{dP}{P} \qquad \int_1^2 dS = nc_P \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} - nR \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{P}$$

$$S_{12} = nc_P \ln\frac{T_2}{T_1} - nR\ln\frac{P_2}{P_1} = (2\frac{5}{2}\ln 6 - 2\ln 3) \times 8.31\frac{J}{K} = 56.19\frac{J}{K}$$