Fisica Generale LA

Prof. Nicola Semprini Cesari

Prova Scritta del 21 Giugno 2018

Meccanica

Q1) Un punto materiale si muove come indicato dal vettore posizione $\vec{r} = r(t)\vec{i}_R(\varphi(t)) + z(t)\vec{k}$ dove $r(t) = r_0$, $\varphi(t) = \omega t$, $z(t) = \dot{z}_0 t$. Calcolare i vettori velocità ed accelerazione.

Q2) Un corpo materiale di massa *m* si muove attorno alla terra lungo un'orbita circolare di raggio *r*. Esprimere l'energia meccanica del corpo materiale in funzione del raggio dell'orbita.

Q3) Un corpo materiale, inizialmente fermo, cade lungo la verticale soggetto all'azione della forza peso $\vec{f}_p = m\vec{g}$ e della forza di attrito viscoso $\vec{f}_a = -\lambda\vec{v}$. Determinare la velocità del corpo materiale in funzione del tempo e la velocità di regime.

Q4) Calcolare il momento d'inerzia di una corona circolare (raggio interno *r/2*, raggio esterno *r*, omogenea ed uniforme con densità superficiale di massa σ e massa complessiva *M*) rispetto ad un asse normale al piano della corona e passante per un punto del bordo esterno.

Q5) Dimostrare il teorema di Huygens-Steiner.

Q6) Discutere le proprietà delle forze conservative.

Q7) Dimostrare il secondo teorema del centro di massa (primo teorema di Konig o teorema del momento della quantità di moto).

Termodinamica

Q1) Un pendolo di massa *m=0.1 Kg*, scostato dalla posizione di equilibrio ad un quota *h=10 cm* rispetto al punto più basso della sua traiettoria, oscilla fino a fermarsi all'interno di un contenitore adiabatico contenente una mole di gas perfetto. Trascurando gli scambi di calore della massa del pendolo ed ipotizzando una temperatura iniziale del gas pari a *T=293K*, calcolare i) la temperatura finale del gas; ii) la variazione di entropia del sistema.

Q2) Data un trasformazione adiabatica reversibile calcolare l'espressione della relazione esistente tra pressione e temperatura.

Q3) In relazione al teorema di Carnot calcolare l'espressione del rendimento del ciclo reversibile.

SOLUZIONI

Q1

$\vec{r} = r(t)\vec{i}_R(\varphi(t)) + z(t)\vec{k}$

$r(t) = r_0$

$\varphi(t) = \omega t$

$z(t) = \dot{z}_0 t$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(r(t)\vec{i}_R(\varphi(t)) + z(t)\vec{k}) = \dot{r}(t)\vec{i}_R(\varphi(t)) + r(t)\frac{d\vec{i}_R(\varphi)}{d\varphi}\frac{d\varphi(t)}{dt} + \dot{z}(t)\vec{k} = r_0\,\omega\,\vec{i}_\varphi(\varphi(t)) + \dot{z}_0\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(r_0\,\omega\,\vec{i}_\varphi(\varphi(t)) + \dot{z}_0\vec{k}) = r_0\,\omega\frac{d}{dt}\vec{i}_\varphi(\varphi(t)) = r_0\,\omega\frac{d}{d\varphi}\vec{i}_\varphi(\varphi)\frac{d\varphi}{dt} = -r_0\,\omega^2\,\vec{i}_r(\varphi)$$

Q2

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad G\frac{Mm}{r^2}\vec{n} = m\frac{v^2}{r}\vec{n} \qquad v^2 = G\frac{M}{r}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = \frac{1}{2}mG\frac{M}{r} - G\frac{Mm}{r} = -\frac{GMm}{2}\frac{1}{r}$$

Q3

$\vec{F} = m\vec{a}$

$$-mg - \lambda\dot{z} = m\ddot{z} \qquad -(g + \frac{\lambda}{m}\dot{z}) = \frac{d\dot{z}}{dt} \qquad -dt = \frac{d\dot{z}}{(g + \frac{\lambda}{m}\dot{z})} \qquad -\frac{\lambda}{m}dt = \frac{d(g + \frac{\lambda}{m}\dot{z})}{(g + \frac{\lambda}{m}\dot{z})}$$

$$-\frac{\lambda}{m}\int_0^t dt = \int_{\dot{z}_0}^{\dot{z}(t)}\frac{d(g + \frac{\lambda}{m}\dot{z})}{(g + \frac{\lambda}{m}\dot{z})} \qquad -\frac{\lambda}{m}t = \ln(\frac{g + \frac{\lambda}{m}\dot{z}(t)}{g + \frac{\lambda}{m}\dot{z}_0}) \qquad g + \frac{\lambda}{m}\dot{z}(t) = (g + \frac{\lambda}{m}\dot{z}_0)e^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

$$\dot{z}(t) = \frac{mg}{\lambda}(e^{-\frac{\lambda}{m}t} - 1) + \dot{z}_0 e^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

tenendo conto delle condizioni iniziali si ottiene

$$\dot{z}(t) = \frac{mg}{\lambda}(e^{-\frac{\lambda}{m}t} - 1)$$

con una velocità di regime

$$\dot{z}(\infty) = -\frac{mg}{\lambda}$$

Q4

Il momento d'inerzia rispetto all'asse normale al piano della corona e passante per il centro di massa vale

$$I = \int_0^{2\pi}\int_{R/2}^{R} \sigma r d\varphi dr\, r^2 = \sigma 2\pi \frac{r^4}{4}|_{R/2}^{R} = \frac{\pi\sigma}{2}(R^4 - \frac{R^4}{16}) = \frac{15}{32}\pi\sigma R^4$$

$$M = \sigma\pi(R^2 - \frac{R^2}{4}) = \frac{3}{4}\pi\sigma R^2$$

$$I = \frac{5}{8}MR^2$$

applicando ora il teorema di Huygens-Steiner otteniamo il risultato richiesto

$$I = \frac{5}{8}MR^2 + MR^2 = \frac{13}{8}MR^2$$

Termodinamica

Q1)

L'energia meccanica del pendolo mgh viene trasferita interamente alla energia interna del gas

$$dU = nC_v dT \qquad \int_{U_i}^{U_f} dU = \int_{T_i}^{T_f} nC_v dT \qquad U_f - U_i = nC_v(T_f - T_i) \qquad mgh = \frac{3}{2}R(T_f - T_i)$$

$$T_f = T_i + \frac{2mgh}{3R} = 293.008$$

$$dS = \frac{\cancel{d}Q}{T} = \frac{dU + \cancel{d}L}{T} = \frac{nC_v dT}{T} \qquad \int_{S_i}^{S_f} dS = \int_{T_i}^{T_f} nC_v \frac{dT}{T} \qquad S_f - S_i = nC_v \ln\frac{T_f}{T}$$

$$S_f - S_i = \frac{3}{2} R \ln(1 + \frac{2mgh}{3T_i R}) = 3.35 \times 10^3 J/K$$