Superconduttività IV

Nicola Semprini Cesari

Leggi di Aharonov-Bohm

La meccanica quantistica associa ad ogni particella materiale una funzione d'onda Ψ. Se sono assenti processi di creazione o distruzione di particelle il modulo della funzione d'onda è costante e si può scrivere

$$\Psi = \Psi_0 e^{i\phi(\vec{r},t)}$$

La dinamica quantistica può essere costruita specificando per ogni processo le regole che governano la fase della funzione d'onda (Es. ottica: legge di Snell). Se la particella materiale si propaga nel vuoto la fase, in un tratto *dr* e nel tempo *dt* è soggetta alla variazione (Legge di De Broglie)

$$d\phi = \frac{1}{\hbar}\left[\vec{p}\cdot d\,\vec{r} - E\cdot d\,t\right]$$

Se la particella materiale si propaga in un campo elettromagnetico, alla variazione della fase data dalla legge di De Broglie si deve aggiungere un ulteriore contributo. La variazione della fase in un tratto dr e nel tempo dt vale complessivamente (Legge di Ahronov-Bohm)

$$d\phi = \frac{1}{\hbar}\left[(\vec{p} + q\,\vec{A})\cdot d\,\vec{r} - (E + qV)dt\right]$$

Queste leggi furono trovate formalmente negli anni '20 nel corso dei primi sviluppi della meccanica quantica. Il loro vero significato fu però compreso solo negli anni '50 da Ahronov e Bohm che le sottoposero a verifica sperimentale proponendo il celebre esperimento delle due fenditure.

$$\phi_1 = \frac{1}{\hbar}\int_{l_1} \vec{p}\cdot d\,\vec{r} + \frac{q}{\hbar}\int_{l_1} \vec{A}\cdot d\,\vec{r}$$

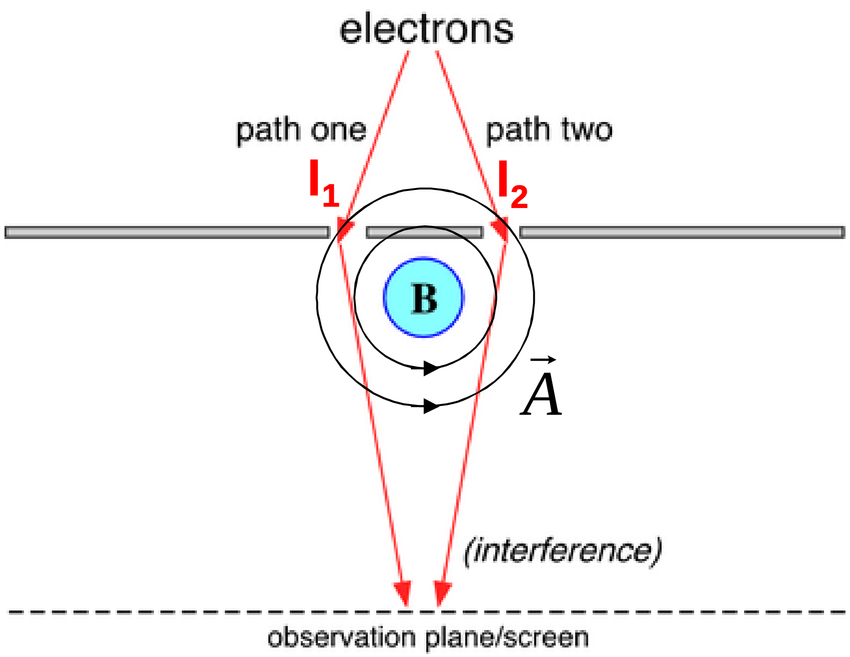
$$\phi_2 = \frac{1}{\hbar}\int_{l_2} \vec{p}\cdot d\,\vec{r} + \frac{q}{\hbar}\int_{l_2} \vec{A}\cdot d\,\vec{r}$$

$$\phi_2 - \phi_1 = \frac{1}{\hbar}\int_{l_2} \vec{p}\cdot d\,\vec{r} - \frac{1}{\hbar}\int_{l_1} \vec{p}\cdot d\,\vec{r} - \frac{q}{\hbar}\oint_{l_1+l_2} \vec{A}\cdot d\,\vec{r}$$

$$2\pi\, n = \frac{1}{\hbar}|\vec{p}|(l_2 - l_1) - \frac{q}{\hbar}\oint_{l_1+l_2} \vec{A}\cdot d\,\vec{r}$$

$$\sin\vartheta = \frac{\lambda}{d}\left(n + \frac{q}{\hbar}\iint_{\Sigma_{sol}} \vec{B}\cdot d\vec{\Sigma}\right)$$

shift dei massimi d'interferenza



Significato delle leggi di Aharonov-Bohm

- Le leggi di AB specificano il comportamento della fase della funzione d'onda di una particella materiale e permettono di risolvere tutti i problemi dinamici di meccanica quantistica (MQ) in presenza di campi elettromagnetici;

- rivestono all'interno della MQ lo stesso ruolo della forza di Lorentz nella meccanica classica;

- prevedono i fenomeni già noti nella meccanica classica (ad esempio la deflessione della traiettoria di una particella carica da parte di un campo magnetico, il calcolo della deflessione effettuato con le leggi di AB oppure con la forza di Lorentz fornisce lo stesso risultato) più nuovi fenomeni tipicamente quantistici (ad esempio lo spostamento delle frange d'interferenza nell'esperimento delle due fenditure);

- dato che in elettromagnetismo classico le grandezze univocamente definite sono i campi elettrici e magnetici mentre i potenziali sono solo parzialmente determinati (invarianza di gauge) si è sempre creduto che questi non avessero una realtà fisica. Le leggi di AB mostrano invece che nella MQ i potenziali non solo hanno realtà fisica ma sono le grandezze fondamentali dell'elettromagnetismo (tutti i tentativi di formulare l'elettrodinamica quantica con i campi al posto dei potenziali non sono riusciti);

- dato che comunque i potenziali rimangono indeterminati anche in MQ dobbiamo aspettarci altrettante indeterminazioni nelle fasi delle funzioni d'onda (simmetria di gauge).

Conseguenze delle leggi di Aharonov-Bohm

Applichiamo ora le leggi di Aharonov Bohm alla funzione d'onda di una singola particella

$$d\Psi = d\,(\Psi_0 e^{i\phi(\vec r,t)}) = i\,\Psi_0 e^{i\phi(\vec r,t)} d\phi(\vec r,t) = i\,\Psi d\phi(\vec r,t) =$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left[(\vec p + q\,\vec A)\cdot d\,\vec r - (E + qV)\,dt\,\right]\Psi$$

ma dall'analisi sappiamo che

$$d\Psi = \vec\nabla\Psi \cdot d\vec r + \frac{\partial \Psi}{\partial t} dt$$

per confronto otteniamo allora

$$\vec p\,\Psi = (-i\hbar\vec\nabla - q\,\vec A)\,\Psi$$

$$E\,\Psi = (i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - qV)\,\Psi$$

in assenza di campi elettromagnetici (con le soli leggi delle fasi di De Broglie) avremmo ottenuto

$$\vec p\,\Psi = -i\hbar\vec\nabla\,\Psi$$

$$E\,\Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi$$

Dunque il passaggio dal sistema classico libero a quello quantistico libero si effettua con le sostituzioni (principio di corrispondenza)

$$\vec p \rightarrow -i\hbar\vec\nabla \qquad\qquad E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

il passaggio dal sistema classico libero a quello quantistico in presenza di campo elettromagnetico si effettua con le sostituzioni

$$\vec p \rightarrow -i\hbar\vec\nabla - q\vec A \qquad\qquad E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - qV$$

otteniamo allora che il passaggio dal sistema quantistico libero a quello quantistico in presenza di campo elettromagnetico si effettua con le sostituzioni (sostituzioni minimali)

$$\boxed{-i\hbar\vec\nabla \rightarrow -i\hbar\vec\nabla - q\vec A \qquad\qquad i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - qV}$$

Invarianza di gauge dell'elettromagnetismo

E' noto che l'elettromagnetismo gode di una problematica simmetria nota con il nome di invarianza di gauge. Cosa significa? Consideriamo le equazioni di Maxwell

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{\nabla}\wedge\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{J}=-\frac{\partial}{\partial t}\rho$$

Dalla III si ha $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ $\quad \vec{B}=\vec{\nabla}\wedge\vec{A}$

Sostituendo nella II si ottiene

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\wedge\vec{A} \qquad \vec{\nabla}\wedge(\vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A})=\vec{0} \qquad \vec{E}+\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}=-\vec{\nabla}V \qquad \vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}-\vec{\nabla}V$$

Si noti che la trasformazione $\vec{A}'=\vec{A}+\vec{\nabla}\phi$ lascia invariato il campo magnetico e trasforma il campo elettrico nel modo seguente

$$\vec{E}'=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}'-\vec{\nabla}V'=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}-\vec{\nabla}\frac{\partial\phi}{\partial t}-\vec{\nabla}V'=-\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}-\vec{\nabla}(\frac{\partial\phi}{\partial t}+V')$$

dunque ponendo $\frac{\partial\phi}{\partial t}+V'=V$ anche il campo elettrico rimane invariato il che significa che il potenziale elettrostatico viene trasformato secondo la $V'=V-\frac{\partial\phi}{\partial t}$

Giungiamo pertanto alla conclusione che *i campi elettrici E e magnetici B (e di conseguenza le equazioni di Maxwell e l'equazione della forza) rimangono inalterati quando i potenziali elettrico e magnetico (potenziale vettore) sono trasformati secondo le equazioni*

$$\boxed{V' = V - \frac{\partial \phi}{\partial t} \qquad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi}$$

dove Φ è una fuzione arbitraria. Tale proprietà di invarianza campi E e B prende il nome di *invarianza di gauge*, la funzione Φ prende il nome di gauge è viene scelta secondo criteri di semplicità ed opportunità. Quando si sceglie una determinata espressione della funzione Φ si dice che si fissa il gauge.

NOTA L'elettromagnetismo classico è fondato sulla forza meccanica e quindi sui campi elettrici e magnetici che ovviamente hanno sempre valori perfettamente definiti. Le leggi cui soddisfano tali campi sono tali da suggerire l'introduzione di nuove grandezze fisiche dette potenziali. I potenziali a differenza dei campi non sono univocamente definiti sussistendo l'invarianza di gauge. Per questo motivo, nonostante le descrizioni dell'elettromagnetismo attraverso i campi ed i potenziali siano assolutamente equivalenti, si è sempre ritenuto che le grandezze fisiche reali in elettromagnetismo siano i campi elettrici e magnetici essendo invece i potenziali grandezze ausiliarie utili nei calcoli. Questo punto di vista viene rovesciato in meccanica quantistica. Qui la dinamica non poggia sul concetto di forza bensì sul concetto di fase della funzione d'onda. Siccome le fasi delle funzioni d'onda sono determinate dai potenziali dobbiamo concludere che i potenziali non solo sono grandezze fisiche reali come i campi elettrici e magnetici ma che sono anche le grandezze fondamentali dell'elettromagnetismo.

Come accennato la scelta del gauge è assolutamente arbitraria e risponde a criteri di comodità per cui accade che a seconda del calcolo che si deve fare si scelga l'uno o l'altro gauge. Nei problemi di elettromagnetismo dove le equazioni intervengono al completo risulta comodo il cosidetto *<u>gauge di Lorentz</u>*. Scriviamo le equazioni di Maxwell attraverso i potenziali elettrico e magnetico. Dopo facili passaggi si ottiene

$$\vec{\nabla}^2 V + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} V) = -\mu_0 \vec{J}$$

ora dalla arbitrarietà del gauge risulta che

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi \qquad \vec{\nabla} \cdot \vec{A}' = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{\nabla}^2 \phi$$

la quale mostra che il valore della divergenza di A è arbitrario. Conviene allora scegliere tale divergenza nel modo seguente

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} V = 0}$$

il che permette di semplificare le equazioni generali per i potenziali

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{\nabla}^2 V - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ &\vec{\nabla}^2 \vec{A} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \end{aligned}}$$

Proprietà di simmetria della transizione superconduttiva

Si è in precedenza sottolineato il fatto che nel corso di una transizione di fase si ha anche riduzione del grado di simmetria del sistema fisico. Ci si può domandare pertanto *quali cambiamenti di simmetria si realizzino (quale simmetria venga rotta) nella transizione allo stato superconduttore.* La tecnica che illustreremo è assolutamente generale.

Superconduttore in assenza di campi elettromagnetici

Consideriamo in primo luogo un *superconduttore in assenza di campo elettromagnetico esterno posto al di sopra della temperatura critica*. Come già visto lo stato di minima energia è lo stato nullo $\Psi=0$. Consideriamo ora *un superconduttore in assenza di campo elettromagnetico posto sotto la temperatura critica*. Lo stato di minima energia è non nullo ($\Psi \neq 0$) e soddisfa l'equazione

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi+\alpha\Psi+\beta\left|\Psi\right|^2\Psi=0$$

Moltiplichiamo ora da sinistra (poiché a destra si applicano gli operatori) l'intera equazione per exp(iΛ) con Λ costante, si ottiene

$$-\frac{\hbar^2}{2m}e^{i\Lambda}\vec{\nabla}^2\Psi+\alpha\Psi e^{i\Lambda}+\beta(\Psi^* e^{-i\Lambda}\Psi e^{i\Lambda})\Psi e^{i\Lambda}=-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2(\Psi e^{i\Lambda})+\alpha\Psi e^{i\Lambda}+\beta(\Psi^* e^{-i\Lambda}\Psi e^{i\Lambda})\Psi e^{i\Lambda}=0$$

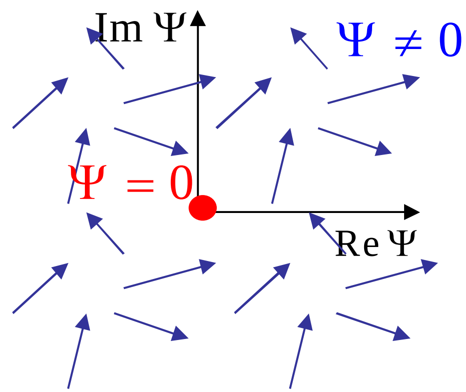
da cui ponendo $\Psi'=\Psi e^{i\Lambda}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2\Psi'+\alpha\Psi'+\beta\left|\Psi'\right|^2\Psi'=0$$

Concludiamo allora che *in un superconduttore al di sotto della temperatura critica se Ψ è uno stato di minima energia tale risulta anche lo stato Ψexp(iΛ) dove Λ è una costante arbitraria (spesso si dice che lo stato di minima energia è <u>invariante per trasformazioni di fase globali</u>, ovvero indipendenti dalla posizione).*

Ricordiamo ora che secondo i principi generali della meccanica quantistica *la funzione Ψ e la funzione Ψexp(iΛ) sono associate sempre allo stesso stato quantico* poiché differiscono per un numero complesso a modulo 1 del tutto inessenziale. Fatta questa precisazione questo significa che *lo stato di minima energia di un superconduttore al di sotto della temperatura critica è essenzialmente unico e definito (non degenere).*

Questo significa che nella transizione superconduttiva il sistema non deve scegliere tra stati equivalenti in quanto esiste un solo stato accessibile per cui non si ha alcuna perdita di simmetria da parte del sistema. In termini più appropriati diremo che *il grado di simmetria dello stato di minima energia coincide con il grado di simmetria della equazione (hamiltoniano) del sistema che lo determina* per cui possiamo affermare anche che *nella transizione superconduttiva di un superconduttore in assenza di campi elettromagnetici esterni non si nessuna rottura spontanea di simmetria.*



Superconduttore in presenza di campi elettromagnetici

Consideriamo in primo luogo un *superconduttore in presenza di campo elettromagnetico esterno posto al di sopra della temperatura critica*. Come già visto lo stato di minima energia è lo stato nullo Ψ=0. Consideriamo ora *un superconduttore in presenza di campo elettromagnetico posto sotto la temperatura critica*. Lo stato di minima energia è non nullo ($\Psi \neq 0$) e soddisfa l'equazione

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla}-\frac{ie}{\hbar}\vec{A})^2\Psi+\alpha\,\Psi+\beta\left|\Psi\right|^2\Psi=0$$

Vogliamo ora moltiplicare a sinistra l'intera espressione per exp(iΛ(r)) dove questa volta Λ è una funzione della posizione. Per semplificare i calcoli conviene vedere prima come passa tale esponenziale attraverso l'operatore gradiente. Si ha

$$\vec{\nabla}(\Psi(\vec{r})\,e^{i\Lambda(\vec{r})})=e^{i\Lambda}\vec{\nabla}\Psi+i\,\Psi\,e^{i\Lambda}\vec{\nabla}\Lambda$$

da cui

$$e^{i\Lambda}\vec{\nabla}\Psi=\vec{\nabla}(\Psi\,e^{i\Lambda})-i\,e^{i\Lambda}\vec{\nabla}\Lambda\;\Psi=(\vec{\nabla}-i\,\vec{\nabla}\Lambda)(\Psi\,e^{i\Lambda})$$

Possiamo ora eseguire il calcolo

$$-\frac{\hbar^2}{2m}e^{i\Lambda}(\vec{\nabla}-\frac{ie}{\hbar}\vec{A})(\vec{\nabla}-\frac{ie}{\hbar}\vec{A})\Psi+\alpha\,e^{i\Lambda}\Psi+\beta e^{i\Lambda}\left|\Psi\right|^2\Psi=0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla}-\frac{ie}{\hbar}\vec{A}-i\vec{\nabla}\Lambda)\,e^{i\Lambda}(\vec{\nabla}-\frac{ie}{\hbar}\vec{A})\Psi+\alpha\,e^{i\Lambda}\Psi+\beta e^{i\Lambda}\left|\Psi\right|^2\Psi=0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla}-\frac{ie}{\hbar}\vec{A}-i\vec{\nabla}\Lambda)(\vec{\nabla}-\frac{ie}{\hbar}\vec{A}-i\vec{\nabla}\Lambda)\Psi e^{i\Lambda}+\alpha\,e^{i\Lambda}\Psi+\beta e^{i\Lambda}\left|\Psi\right|^2\Psi=0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla}-\frac{ie}{\hbar}\vec{A}-i\vec{\nabla}\Lambda)(\vec{\nabla}-\frac{ie}{\hbar}\vec{A}-i\vec{\nabla}\Lambda)\Psi e^{i\Lambda}+\alpha\,\Psi e^{i\Lambda}+\beta(\Psi^* e^{-i\Lambda}\,\Psi e^{i\Lambda})\Psi e^{i\Lambda}=0$$

Dunque la funzione $\Psi'(\vec{r}) = \Psi(\vec{r})\, e^{i\Lambda(\vec{r})}$ è soluzione della equazione

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar}\vec{A} - i\vec{\nabla}\Lambda\right)\left(\vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar}\vec{A} - i\vec{\nabla}\Lambda\right)\Psi' + \alpha\,\Psi' + \beta\left|\Psi'\right|^2\Psi' = 0$$

Questa equazione è uguale o diversa dalla equazione cui soddisfa la funzione Ψ ?

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\vec{\nabla} - \frac{ie}{\hbar}\vec{A}\right)^2\Psi + \alpha\,\Psi + \beta\left|\Psi\right|^2\Psi = 0$$

Per capirlo è necessario richiamare una proprietà fondamentale dell'elettromagnetismo: l'invarianza di gauge che consiste nella possibilita di scegliere arbitrariamente i potenziali secondo le equazioni

$$V' = V - \frac{\partial\phi}{\partial t} \qquad \vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\phi$$

dove Φ è una funzione arbitraria. Questo fatto ci fa capire che i termini

$$-\frac{ie}{\hbar}\vec{A} - i\vec{\nabla}\Lambda \qquad -\frac{ie}{\hbar}\vec{A}$$

differendo per il gradiente di una funzione rappresentano in realtà lo stesso campo elettro magnetico dunque le equazioni sono identiche. Possiamo allora riassumere i nostri risultati nel modo seguente ponendo innanzitutto nella prima equazione

$$-\frac{ie}{\hbar}\vec{A}' = -\frac{ie}{\hbar}\vec{A} - i\vec{\nabla}\Lambda = -\frac{ie}{\hbar}\left(\vec{A} + \frac{\hbar}{e}\vec{\nabla}\Lambda\right) \qquad \vec{A}' = \left(\vec{A} + \frac{\hbar}{e}\vec{\nabla}\Lambda\right)$$

ed ottenendo quindi le equazioni

$$1)\quad -\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla}-\frac{ie}{\hbar}\vec{A}')^2\Psi'+\alpha\Psi'+\beta|\Psi'|^2\Psi'=0 \qquad 2)\quad -\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla}-\frac{ie}{\hbar}\vec{A})^2\Psi+\alpha\Psi+\beta|\Psi|^2\Psi=0$$

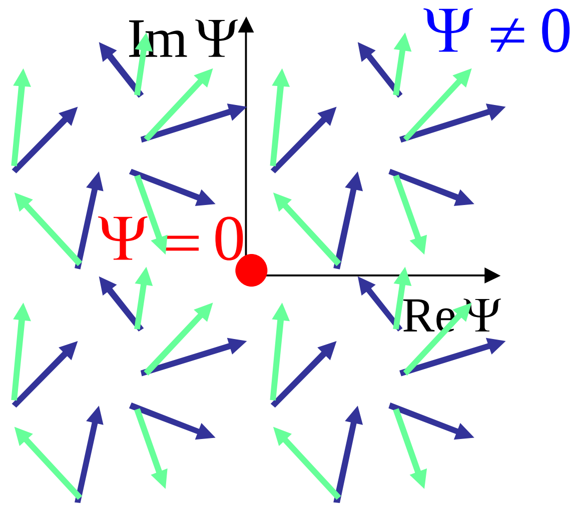
$$3)\quad \Psi'(\vec{r})=\Psi(\vec{r})e^{i\Lambda(\vec{r})}$$

$$4)\quad \vec{A}'=(\vec{A}+\frac{\hbar}{e}\vec{\nabla}\Lambda)$$

Abbiamo dunque mostrato che la equazione 1) e la equazione 2) sono in realtà la stessa equazione contenendo in virtù della invarianza di gauge dell'elettromagnetismo lo stesso campo elettromagnetico(vedi relazione 4)). Per questo possiamo affermare che le funzioni Ψ e Ψ' devono essere associate allo stesso stato fisico di minima energia [Questa volta si tratta di una degenerazione essenziale poiché stati ottenuti attraverso la rimoltiplicazione con una fase dipendente dalla posizione sono a tutti gli effetti, per la meccanica quantica, stati differenti (si pensi a fenomeni d'interferenza per esempio)]. Dunque *lo stato di minima energia di un superconduttore immerso in un campo elettromagnetico è degenere (invariante per trasformazioni di fase locali). Se Ψ è uno stato di minima energia allora lo sono tutti gli stati Ψ' ottenuti dalla relazione 3).*

NOTA*:* Sottolineiamo ulteriormente il fatto che tale degenerazione dello stato di minima energia ha la sua causa nella invarianza di gauge dell'elettromagnetismo: ogni volta che si moltiplica la funzione d'onda per una fase dipendente dalla posizione si modifica in effetti il potenziale vettore. Tuttavia a causa della simmetria di gauge dell'elettromagnetismo tale modifica è fisicamente ininfluente per cui tale nuova funzione d'onda rimane associata allo stesso stato fisico.

Quando un superconduttore si trova al di sopra della Tc la densità di cariche superconduttive è nulla e si ha Ψ=0. Abbassando la temperatura la configurazione con |Ψ|=0 diventa energeticamente instabile (massimo locale) ed il sistema, a causa delle fluttuazioni nel valore dell'energia, tenderà ad evolvere verso valori di energia più bassi. La dipendenza della energia dal |Ψ| è tale che il minimo viene raggiunto quando |Ψ|=/0. Il punto essenziale è ora che quando il superconduttore è immerso in un campo elettromagnetico, a causa dell'invarianza di gauge dell'elettromagnetismo, il sistema ha a disposizione tutta una serie di stati aventi la stessa energia minima (nella figura gli stati blù chiaro e blù scuro). Dato che il sistema evolve per effetto di fluttuazioni casuali la scelta dello stato è di natura statistica (ripetendo la transizione di fase N volte il sistema si porterebbe con la stessa frequenza su tutti gli stati di minima energia disponibili). Il sistema dunque raggiunge uno stato Ψ ben definito e di conseguenza anche un valore di A ben definito (infatti secondo le equazioni di G-L Ψ è definita solo se A è definito). La simmetria del sistema per trasformazioni di fase locali della funzione d'onda e di gauge del potenziale vettore è nascosta dalla scelta di uno tra i possibili stati di minima energia. Il grado di simmetria di tale stato è inferiore a quello della equazione che lo ha determinato. Concludiamo allora che *nella transizione superconduttiva in presenza di campi elettromagnetici ciò che viene persa (o rotta) è la simmetria per trasformazioni di fase locali della funzione d'onda e di gauge del potenziale vettore (trasformazioni di gauge).*



Può essere utile sviluppare il confronto tra i fenomeni della superconduttività in presenza di campi elettromagnetici e della magnetizzazione spontanea

Il sistema è regolato da equazioni invarianti per trasformazioni di gauge

Sopra Tc la densità di cariche superconduttive è nulla $\left|\Psi\right| = 0$

Abbassando la temperatura al di sotto di Tc si ha la superconduttività

$$\left|\Psi\right| \neq 0$$

Tutti gli stati per i quali

$$\Psi'(\vec{r}) = \Psi(\vec{r})\, e^{i\Lambda(\vec{r})}$$

dove Λ è un versore arbitrario, hanno la stessa energia minima.

Le fluttuazioni spontanee indirizzano il sistema verso uno stato con un valore definito di Λ.

La scelta di una un valore definito di Λ ovvero di un gauge definito distrugge l'invarianza del sistema rispetto alle trasformazioni di gauge

Il sistema è regolato da equazioni invarianti per rotazioni spaziali

Sopra Tcurie la densità di magnetizzazione è nulla $\left|\vec{M}\right| = 0$

Abbassando la temperatura al di sotto di Tcurie si ha la magnetizzazione spontanea

$$\left|\vec{M}\right| \neq 0$$

Tutti gli stati per i quali

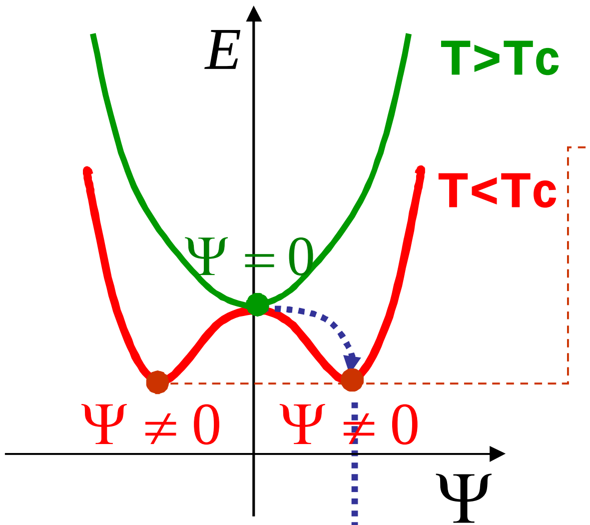
$$\vec{M}' = \left|\vec{M}\right| \hat{v}$$

dove *v* è un versore arbitrario, hanno la stessa energia minima.

Le fluttuazioni spontanee indirizzano il sistema verso uno stato con un valore definito di *v*.

La scelta di una direzione definita della magnetizzazione distrugge l'invarianza del sistema rispetto alle rotazioni

Transizione superconduttiva del I tipo



$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\vec{\nabla}-\frac{ie}{\hbar}\vec{A})(\vec{\nabla}-\frac{ie}{\hbar}\vec{A})\Psi+\alpha\Psi+\beta|\Psi|^2\Psi=0$$

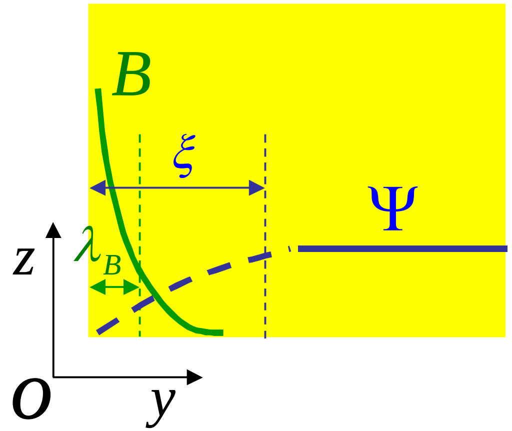
$$\vec{j}=-\frac{ie\hbar}{2m}\left(\Psi(\vec{\nabla}+\frac{ie}{\hbar}\vec{A})\Psi^*-\Psi^*(\vec{\nabla}-\frac{ie}{\hbar}\vec{A})\Psi\right)$$

superconduttore del I tipo

$\lambda << \xi$

$$\lambda=\sqrt{\frac{m\beta}{\mu_0 e^2\alpha}}$$

$$\xi=\sqrt{\frac{\hbar^2}{2m\alpha}}$$



rottura della invarianza di gauge
(invarianza di fase della funzione d'onda + invarianza di gauge dei potenziali)

$$\Psi \approx \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \qquad j_x=-\frac{e^2}{m}A_x|\Psi|^2$$

Eq. di Maxwell

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}=\frac{\mu_0 e^2|\Psi|^2}{m}A_x \quad \Rightarrow \quad A_x=A_{x0}\,e^{-\frac{y}{\lambda}}$$

il campo elettro magnetico acquista massa

Fine